Основы комбинаторики

Предмет комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого множества в соответствии с заданными правилами.

Типичные задачи комбинаторики:

«Сколькими способами можно сделать … ?», «Сколько вариантов существует … ?», «Сколькими способами можно выбрать столько-то объектов?» и т.п.

Предмет комбинаторики

Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчета вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин.
Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для понимания статистических закономерностей.

Правила комбинаторики

1. Правило суммы

Если некоторые *k* действий взаимно исключают друг друга, причем первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами, третье – n_3 способами и т.д. до *k*-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то выполнить одно любое из этих действий можно числом способов, равным:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$$

Правила комбинаторики

2. Правило произведения

Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, третье – n_3 способами и т. д. до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий могут вместе быть выполнены числом способов, равным:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Факториал

Факториал – операция произведения всех натуральных чисел от единицы до заданного *n* включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n$$

Например:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 24$$

По определению: $0! = 1$

Свойства факториала

Отношение двух факториалов упрощается следующим образом:

$$\frac{(n+m)!}{n!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n\cdot (n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m-1)\cdot (n+m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n} =$$

$$= \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}\cdot (n+1)\cdot \ldots \cdot (n+m-1)\cdot (n+m)}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n}} =$$

$$= (n+1)\cdot \ldots (n+m-1)\cdot (n+m)$$

Перестановки без повторений

Число **перестановок** определяет, сколькими способами можно переставить n элементов множества.
Если элементы множества можно считать различными, то применяется формула подсчета числа **перестановок без повторений**:

$$P_n = n!$$

Перестановки с повторениями

Если в рассматриваемом множестве присутствуют одинаковые элементы, причем элементов первого типа n_1 штук, элементов второго – n_2 штук, третьего – n_3 и т.д. до *k*-го типа элементов, общее число которых равно n_k, то применяется формула подсчета числа **перестановок с повторениями**:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$$

Сочетания без повторений

Число **сочетаний** определяет, сколькими способами можно выбрать *m* элементов из множества, состоящего из *n* элементов.
Если элементы множества можно считать различными, то применяется формула подсчета числа **сочетаний без повторений**:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Сочетания с повторениями

Если в множестве присутствуют одинаковые элементы, причем число различных типов элементов равно *n*, и из них требуется выбрать *m* элементов (причем все *m* элементов могут быть одного типа), то применяется формула подсчета числа **сочетаний с повторениями**:

$$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} = C_{n+m-1}^m$$

Размещения без повторений

Число **размещений** определяет, сколькими способами можно выбрать *m* элементов из множества, состоящего из *n* элементов, и в каждой выборке переставить их местами. Если элементы множества можно считать различными, то применяется формула подсчета числа **размещений без повторений**:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot P_m$$

Размещения с повторениями

Если каждый из *n* элементов множества можно выбирать неоднократно, то применяется формула подсчета числа **размещений с повторениями**:

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Выбор формулы комбинаторики