

1.3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

где E – единичная матрица

Алгоритм нахождения обратной матрицы



Определяем, квадратная ли матрица. Если нет, то обратной матрицы для нее не существует.

2

*Найдем определитель
матрицы.*

*Если он равен нулю, то
обратной
матрицы не существует.*

3

*Заменяем каждый элемент
матрицы
его алгебраическим
дополнением.*

4

*Полученную матрицу
транспонируем.*

5

*Каждый элемент полученной
матрицы делим на
определитель
исходной матрицы. Получаем
матрицу, обратную к данной.*

6

*Делаем проверку. Для этого
перемножаем полученную и
исходную
матрицы. Должна
получиться
единичная матрица.*

Пример.

Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Применяем алгоритм нахождения обратной матрицы.

1 Матрица квадратная, следовательно обратная матрица для нее существует.

2 Находим определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

3

Найдем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = 2$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^2 \cdot M_{22} = 2$$

Составляем из полученных значений матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4

Транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5

Каждый элемент матрицы делим на определитель $\Delta=1$ и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$



Проверяем:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$