Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

3, 4 ПЗ. Повторення незалежних випробувань:

Тема 1. Формула Бернуллі. Формула Пуассона.

Тема 2. Теореми Муавра- Лапласа.

Повторення незалежних випробувань:

Тема 1. Формула Бернуллі. Формула Пуассона.

Формула Бернулли

Пусть при выполнении серии n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и не зависит от номера проводимого испытания, т. е. $P(A)=p$ для любого испытания. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что событие A в серии n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p, наступит ровно k раз определяется по *формуле Бернулли*[1]

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Наивероятнейшее число

Значение k_0, которому соответствует наибольшая вероятность $P_n(k)$ называется *наивероятнейшим числом* (*наивероятнейшей частотой*) появления события A в серии n независимых испытаний. Наивероятнейшее число находится в интервале длина которого равна единице:

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Теорема Пуассона

Если вероятность p появления события A близка к нулю, то следует использовать теорему Пуассона[3], которая в этом случае дает большую точность.

Если в n независимых испытаниях событие A происходит с вероятностью p, близкой к нулю, то при достаточно большом n ($np \le 10$) вероятность появления события A ровно k раз приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

Для функции Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ составлены таблицы.

Повторення незалежних випробувань:

Тема 2. Локальна та інтегральна и теореми Муавра–Лапласа

Локальная теорема Муавра–Лапласа

Если в n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к нулю и единице ($0<p<1$), то при достаточно большом количестве испытаний n вероятность того, что событие A произойдет k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ – функция Гаусса, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Свойства функции Гаусса

Свойства функции $\varphi(x)$:

1. Функция $\varphi(x)$ – четная ($\varphi(-x)=\varphi(x)$) и принимает только неотрицательные значения.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

3. Если $x>5$, то $\varphi(x)\approx 0$.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы.

Интегральная теорема Муавра – Лапласа

Если в n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая отличается от 0 *и* 1, *то при достаточно большом n вероятность того, что число k появления события A находится в диапазоне от* k_1, до k_2 *приближенно равна*

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ называется *функцией Лапласа* и является интегралом от функции $\varphi(x)$, который не выражается через элементарные функции;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Свойства функции Лапласа

Свойства функции $\Phi(x)$:

1. Функция $\Phi(x)$ – нечетная ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$).
2. Функция $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая, т.е. $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 0,5$.
4. Если $x>5$, то $\Phi(x) \approx 0,5$.

Для функции $\Phi(x)$ составлены таблицы.

Итог

- Вероятность $P_n(k)$ того, что событие наступит ровно k раз при n повторений независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p, вычисляется по ***ф-ле Бернулли.***

- Если p близко к 0, а n велико $(np \leq 10)$ используем ***т-му Пуассона.***

- Если p не близка ни к 0 ни к 1 $(0<p<1)$, а n и k велико используем ***локальную т-му Муавра–Лапласа.***

- Если p не близка ни к 0 ни к 1 $(0<p<1)$, n велико и k задано в диапазоне используем ***интегральную т-му Муавра–Лапласа.***

Для понимания как может быть задано *k* (напр. с числом 3)

- Не больше 3: $P(k \le 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$
- Меньше 3: $P(k < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$
- Ровно 3: $P(k = 3) = P(3)$
- Больше 3: $P(k > 3) = 1 - P(k \le 3)$
- Не меньше 3: $P(k \ge 3) = 1 - P(k < 3)$

Задание

- Самостоятельное решение типовых задач вручную и средствами Excel / MathCad по вариантам из списка

5 типовых задач

- Решение индивидуальных задач вручную

10 инд. задач (5 из 1 темы, 5 из 2 темы)

- Самостоятельная работа по инд. задачам на следующем пз (*4-5 задач*)