

# Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика

**3, 4 ПЗ.** Повторення незалежних випробувань:

Тема 1. Формула Бернуллі. Формула Пуассона.

Тема 2. Теореми Муавра-Лапласа.

Повторення незалежних випробувань:

Тема 1. Формула Бернуллі. Формула  
Пуассона.

# Формула Бернулли

Пусть при выполнении серии  $n$  независимых испытаний вероятность появления события  $A$  постоянна и не зависит от номера проводимого испытания, т. е.  $P(A)=p$  для любого испытания. Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  равна  $q = 1 - p$ .

Вероятность  $P_n(k)$  того, что событие  $A$  в серии  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события  $A$  постоянна и равна  $p$ , наступит ровно  $k$  раз определяется по формуле Бернулли<sup>1</sup>

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

## Наивероятнейшее число

Значение  $k_0$ , которому соответствует наибольшая вероятность  $P_n(k)$  называется *наивероятнейшим числом* (*наивероятнейшей частотой*) появления события  $A$  в серии  $n$  независимых испытаний. Наивероятнейшее число находится в интервале длина которого равна единице:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

# Теорема Пуассона

Если вероятность  $p$  появления события  $A$  близка к нулю, то следует использовать теорему Пуассона<sup>3</sup>, которая в этом случае дает большую точность.

*Если в  $n$  независимых испытаниях событие  $A$  происходит с вероятностью  $p$ , близкой к нулю, то при достаточно большом  $n$  ( $np \leq 10$ ) вероятность появления события  $A$  ровно  $k$  раз приближенно равна*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где  $\lambda = np$ .

Для функции Пуассона  $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  составлены таблицы.

Повторення незалежних випробувань:

Тема **2.** Локальна та інтегральна і  
теореми Муавра-Лапласа

## Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если в  $n$  независимых испытаниях событие  $A$  происходит с постоянной вероятностью  $p$ , которая не очень близка к нулю и единице ( $0 < p < 1$ ), то при достаточно большом количестве испытаний  $n$  вероятность того, что событие  $A$  произойдет  $k$  раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$$

где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  – функция Гаусса,  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ .

# Свойства функции Гаусса

Свойства функции  $\varphi(x)$ :

1. Функция  $\varphi(x)$  – четная ( $\varphi(-x)=\varphi(x)$ ) и принимает только неотрицательные значения.

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ .

3. Если  $x > 5$ , то  $\varphi(x) \approx 0$ .

Для функции  $\varphi(x)$  составлены таблицы.

# Интегральная теорема Муавра - Лапласа

Если в  $n$  независимых испытаниях событие  $A$  происходит с постоянной вероятностью  $p$ , которая отличается от 0 и 1, то при достаточно большом  $n$  вероятность того, что число  $k$  появления события  $A$  находится в диапазоне от  $k_1$ , до  $k_2$  приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где функция  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$  называется *функцией Лапласа* и является

интегралом от функции  $\phi(z)$ , который не выражается через элементарные функции;

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

# Свойства функции Лапласа

Свойства функции  $\Phi(x)$ :

1. Функция  $\Phi(x)$  – нечетная ( $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ).
2. Функция  $\Phi(x)$  – монотонно возрастающая, т.е.  $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$ , если  $x_2 > x_1$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0,5$ .
4. Если  $x > 5$ , то  $\Phi(x) \approx 0,5$ .

Для функции  $\Phi(x)$  составлены таблицы.

## Итог

- ▶ Вероятность  $P_n(k)$  того, что событие наступит ровно  $k$  раз при  $n$  повторений независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна  $p$ , вычисляется по *ф-ле Бернулли*.  

- ▶ Если  $p$  близко к 0, а  $n$  велико ( $np \leq 10$ ) используем *т-му Пуассона*.  

- ▶ Если  $p$  не близка ни к 0 ни к 1 ( $0 < p < 1$ ), а  $n$  и  $k$  велико используем *локальную т-му Муавра–Лапласа*.  

- ▶ Если  $p$  не близка ни к 0 ни к 1 ( $0 < p < 1$ ),  $n$  велико и  $k$  задано в диапазоне используем *интегральную т-му Муавра–Лапласа*.

## Для понимания как может быть задано $k$ (напр. с числом 3)

- ▶ Не больше 3:  $P(k \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$
- ▶ Меньше 3:  $P(k < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$
- ▶ Ровно 3:  $P(k = 3) = P(3)$
- ▶ Больше 3:  $P(k > 3) = 1 - P(k \leq 3)$
- ▶ Не меньше 3:  $P(k \geq 3) = 1 - P(k < 3)$

# Задание

- ▶ Самостоятельное решение типовых задач вручную и средствами Excel / MathCad по вариантам из списка  
*5 типовых задач*
- ▶ Решение индивидуальных задач вручную  
*10 инд. задач (5 из 1 темы, 5 из 2 темы)*
- ▶ Самостоятельная работа по инд. задачам на следующем пз (4-5 задач)