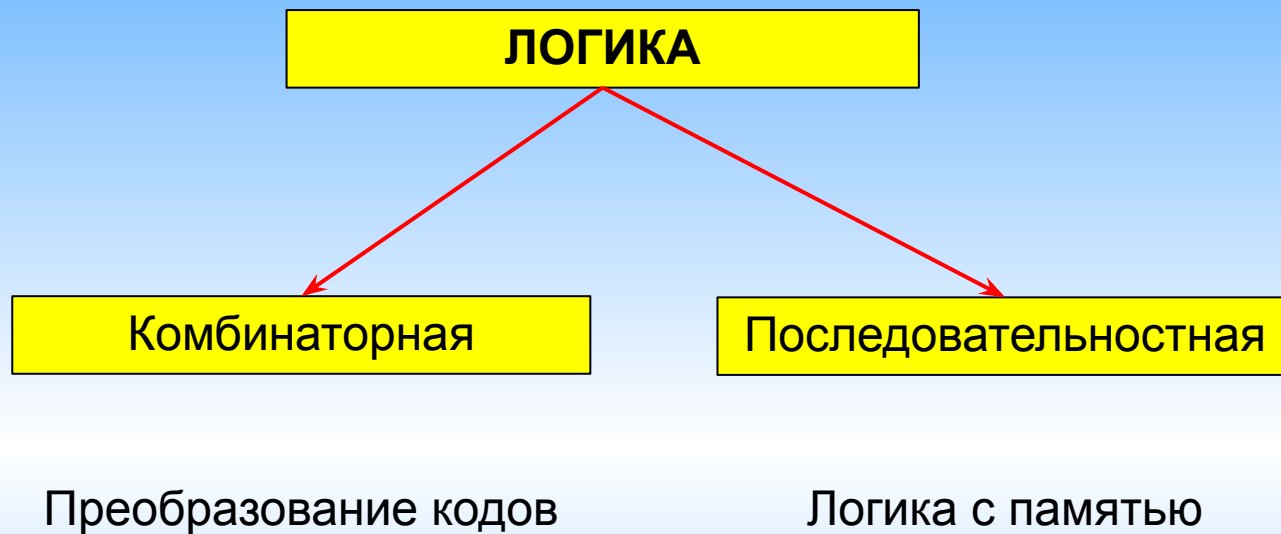


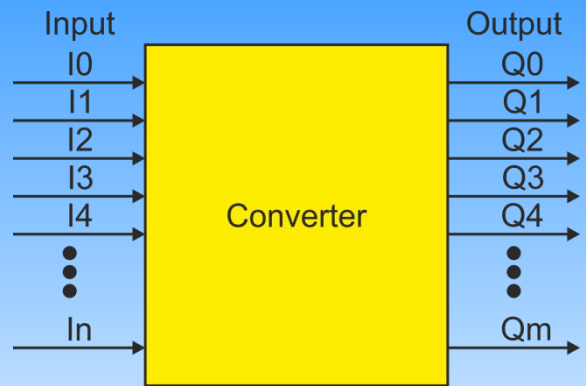


Введение в комбинаторную логику

Combinatory Logic



# Преобразование кодов



Стандартная часть.  
Входы

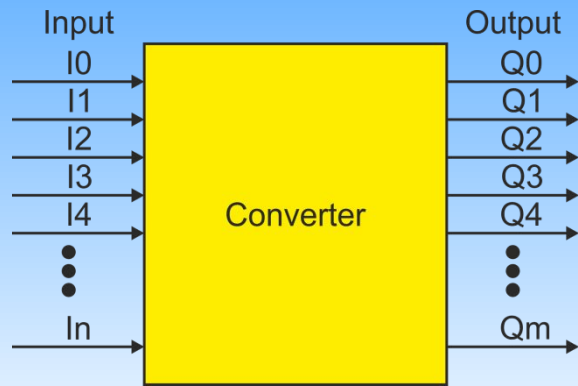
Таблица истинности

Оригинальная часть.  
Выходы

2<sup>n</sup> строк

In	...	I2	I1	I0	Qm	...	Q2	Q1	Q0
0		0	0	0					
0		0	0	1					
0		0	1	0					
0		0	1	1					
0		1	0	0					
		•					•		
		•					•		
		•					•		
1		1	1	0					
1		1	1	1					

# Преобразование кодов



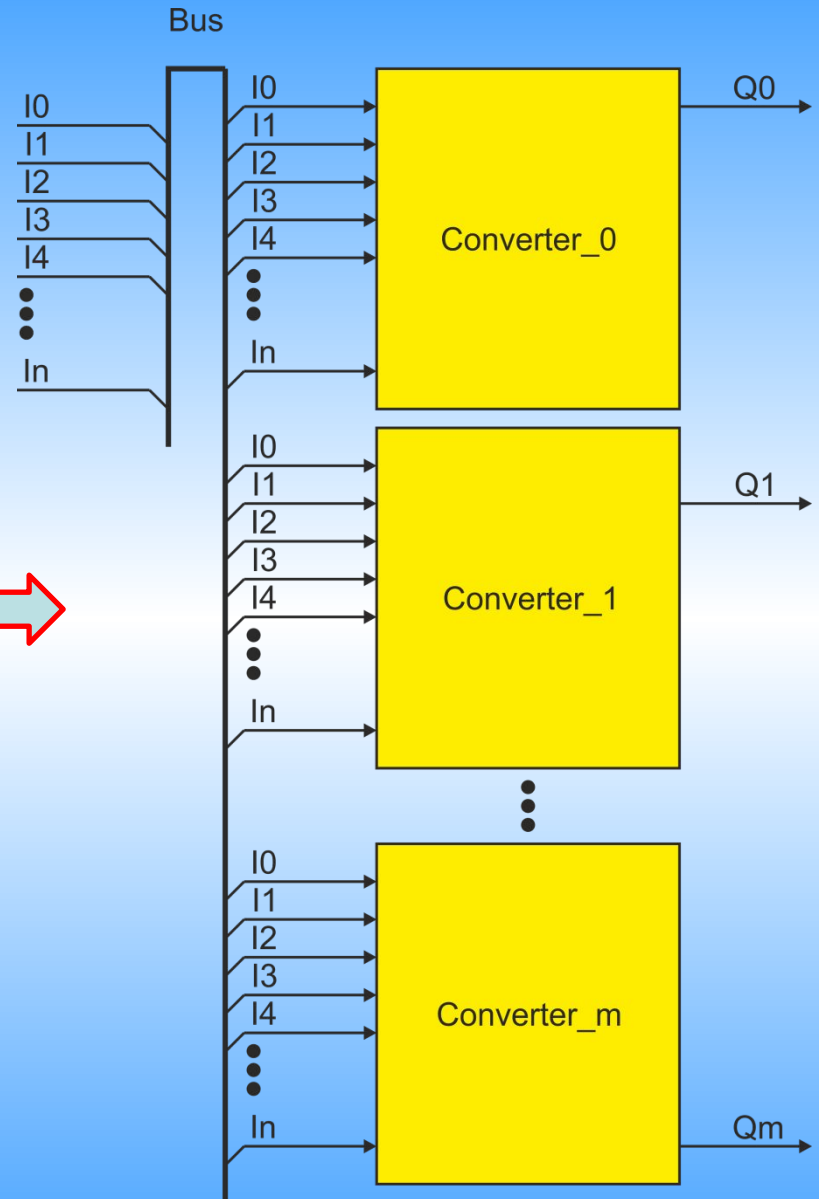
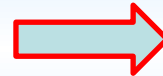
$$Q0 = f_0(I0, I1, I2 \dots In)$$

$$Q1 = f_1(I0, I1, I2 \dots In)$$

$$Q2 = f_2(I0, I1, I2 \dots In)$$

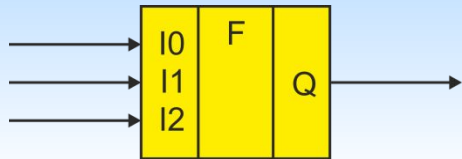
⋮

$$Qm = f_m(I0, I1, I2 \dots In)$$



# Таблицы истинности

Пример: преобразователь для 3 переменных



I2	I1	I0	Q
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Все комбинации входных сигналов.  
Для  $n$  входов  $2^n$  строк.

Определение функции

# Функции одной переменной

$$Q = a \times x + b$$

$$Q = \sin x$$

$$Q = \sqrt[n]{x}$$

$$Q = e^{-i\omega x}$$

$$Q = \tan x$$

$$Q = \sqrt[2]{x}$$

$$Q = \int f(x) dx$$

$$Q = \cos x$$

$$Q = x^n$$

Q =

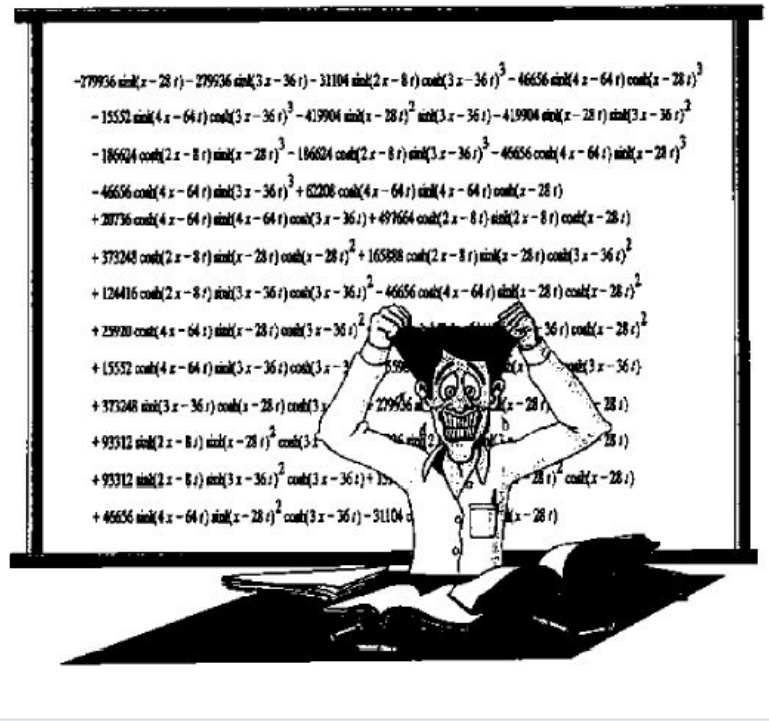


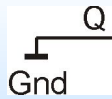
Рисунок из книги

Enns, Richard H.  
 Nonlinear physics with Mathematica for scientists and engineers / Richard H. Enns and  
 George C. McGuire.

# Логические функции одной переменной

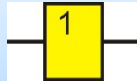
I	Q
0	
1	

I	Q
0	0
1	0



I	Q
0	0
1	1

Буфер



Другое обозначение

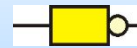


Другое обозначение



I	Q
0	1
1	0

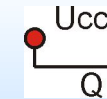
Инвертор



Другое обозначение



I	Q
0	1
1	1

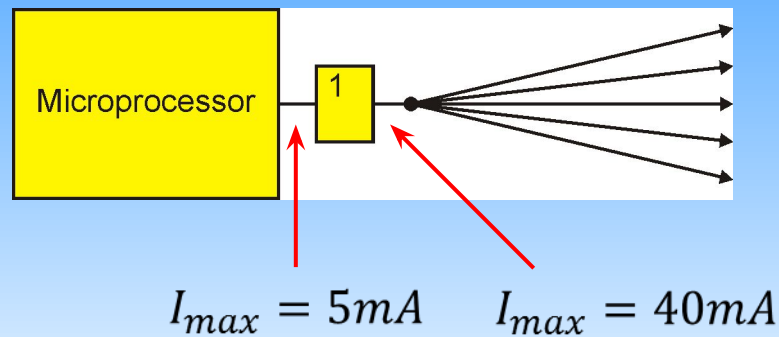


# Буферы и преобразователи уровней

Буфер  
Buffer

Увеличение нагрузочной способности

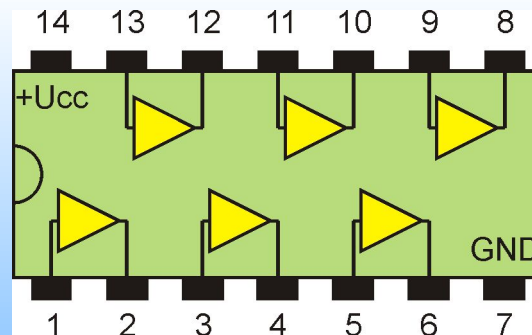
I	Q
0	0
1	1



Пример: 7407



SO14



DIP14

6 элементов в одном корпусе

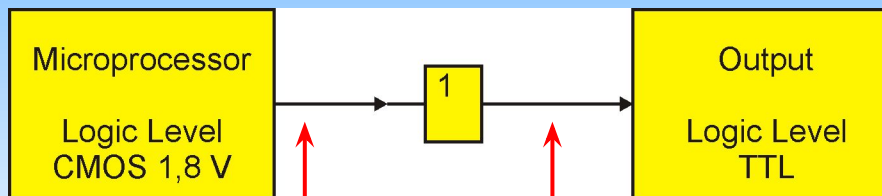


# Буферы и преобразователи уровней

Преобразователи уровней  
Level shifter



I	Q
0	0
1	1



Логические уровни	
Out_0	0 ÷ 0,1 В
Out_1	1,7 ÷ 1,8 В



Логические уровни	
Out_0	0 ÷ 0,4 В
Out_1	2,4 ÷ 5 В

Пример: MC14504B

# Инвертор

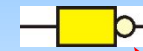
Единственная нетривиальная логическая функция от одной переменной

Таблица истинности  
(определение функции)

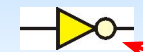
I	Q
0	1
1	0

NOT

Графическое  
обозначение



или



Символ отрицания

Алгебраическое обозначение

$$Q = \bar{I} \leftarrow \text{Штрих Шеффера}$$

$$Q = -I$$

$$Q = !I$$

$$Q = \sim I$$

$$Q = \neg I$$

# Функции двух переменных

I1	I0	Q
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

} 4

Всего  $2^4=16$  функций.  
 Нетривиальных и симметричных  $\rightarrow 6$ .

I1	I0	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2AND

I1	I0	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2NAND

$NAND = \overline{AND}$

I1	I0	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2OR

I1	I0	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2NOR

$NOR = \overline{OR}$

I1	I0	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR

I1	I0	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NXOR

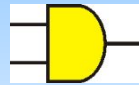
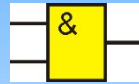
$NXOR = \overline{XOR}$

# Логическое умножение (конъюнкция)

B	A	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2И  
2AND

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = A \times B$$

$$Q = A \& B$$

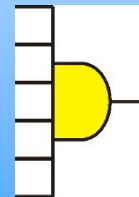
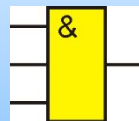
$$Q = A \wedge B$$

Элементы с количеством входов больше двух

C	B	A	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3И  
3AND

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = A \times B \times C$$

$$Q = A \& B \& C$$

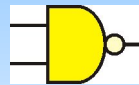
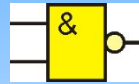
$$Q = A \wedge B \wedge C$$

# Логическое умножение с отрицанием

В	А	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**2И-НЕ**  
**2NAND**

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = \overline{A \times B}$$

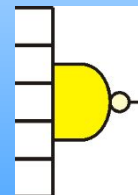
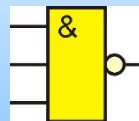
$$Q = \overline{A \& B}$$

$$Q = \neg(A \wedge B)$$

С	В	А	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

**3И-НЕ**  
**3NAND**

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = \overline{A \times B \times C}$$

$$Q = \overline{A \& B \& C}$$

$$Q = \neg(A \wedge B \wedge C)$$

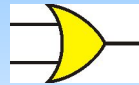
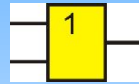
Элементы с количеством входов больше двух

# Логическое сложение (дизъюнкция)

В	А	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

**2ИЛИ**  
**2OR**

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = A + B$$

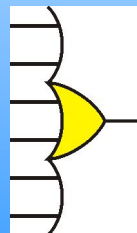
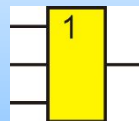
$$Q = A \vee B$$

С	В	А	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

**3ИЛИ**  
**3NOR**

Элементы с количеством входов больше двух

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = A + B + C$$

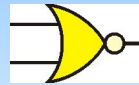
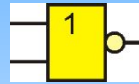
$$Q = A \vee B \vee C$$

# Логическое сложение с отрицанием

В	А	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**2ИЛИ-НЕ**  
**2NOR**

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = \overline{A + B}$$

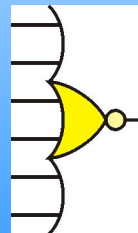
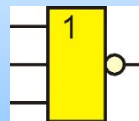
$$Q = \neg(A \vee B)$$

Элементы с количеством входов больше двух

С	В	А	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

**3ИЛИ-НЕ**  
**3NOR**

Графическое  
обозначение



Алгебраическое  
обозначение

$$Q = \overline{A + B + C}$$

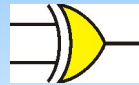
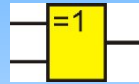
$$Q = \neg(A \vee B \vee C)$$

# Исключающее ИЛИ (сложение по модулю 2)

B	A	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2XOR

Графическое обозначение



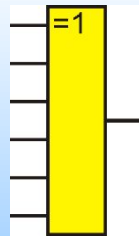
Алгебраическое обозначение

$$Q = A \oplus B$$

Элементы с количеством входов больше двух

C	B	A	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

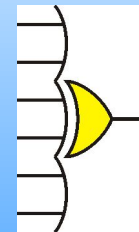
3XOR



$$Q = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E \oplus F$$

Четное кол-во 1  $\rightarrow Q=0$

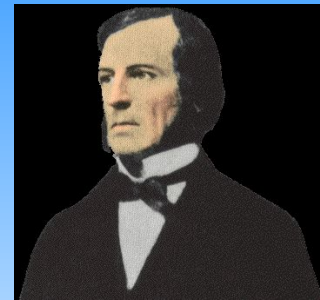
Нечетное кол-во 1  $\rightarrow Q=1$





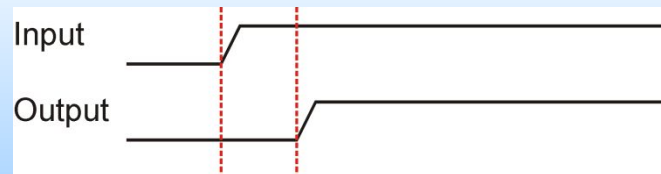
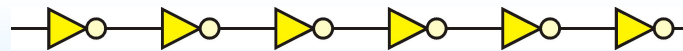
# Свойства логических функций. (Постулаты Булевой алгебры)

$$\overline{(\overline{A})} = A$$



Джордж Буль  
1815÷1864

Четное количество

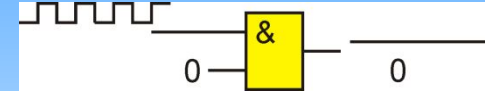
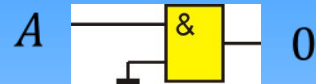


$$t = n \times \tau$$

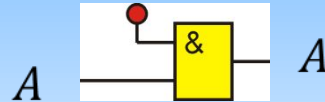
Линия задержки

# Свойства логических функций. (Постулаты Булевой алгебры)

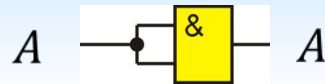
$$A \times 0 = 0$$



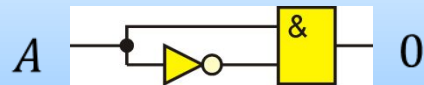
$$A \times 1 = A$$



$$A \times A = A$$

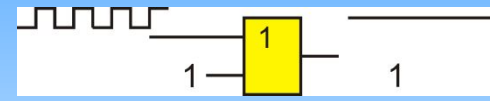
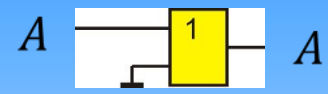


$$A \times \bar{A} = 0$$

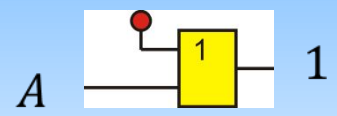


# Свойства логических функций. (Постулаты Булевой алгебры)

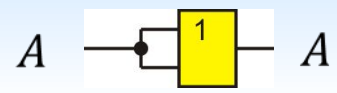
$$A + 0 = A$$



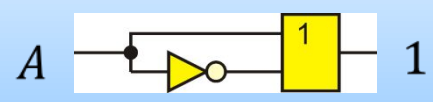
$$A + 1 = 1$$



$$A + A = A$$

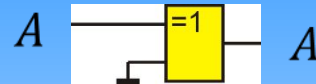


$$A + \bar{A} = 1$$

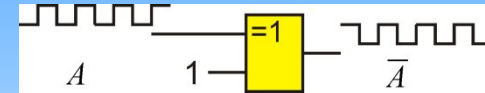
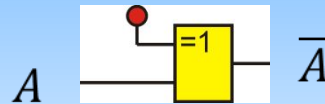


# Свойства логических функций. (Постулаты Булевой алгебры)

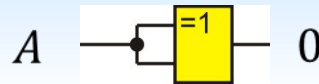
$$A \oplus 0 = A$$



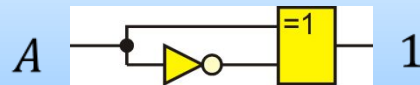
$$A \oplus 1 = \bar{A}$$



$$A \oplus A = 0$$



$$A \oplus \bar{A} = 1$$



# Законы Булевой алгебры

## Коммутативный

$$A \times B = B \times A$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$A + B = B + A$$

# Законы Булевой алгебры

## Ассоциативный

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$



$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$$



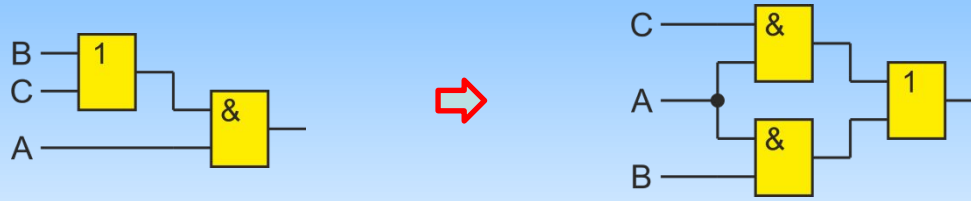
$$A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



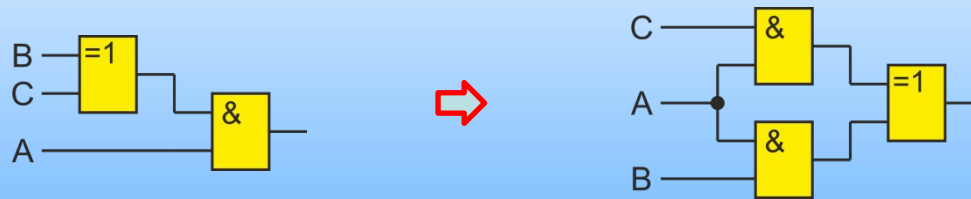
# Законы Булевой алгебры

## Дистрибутивный

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$



$$A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$$



# Свойства логических функций. (Постулаты Булевой алгебры)

Поглощение

$$A \times (A + B) = A$$

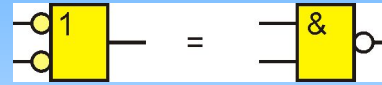
$$A \times (A + B) = A + A \times B = A \times (1 + B) = A$$



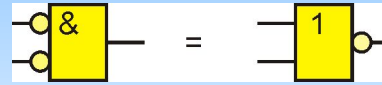
# Свойства логических функций. (Постулаты Булевой алгебры)

## Теорема Де Моргана

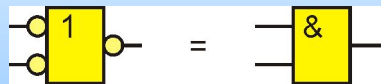
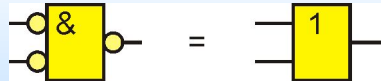
$$\bar{A} + \bar{B} = \overline{A \times B}$$



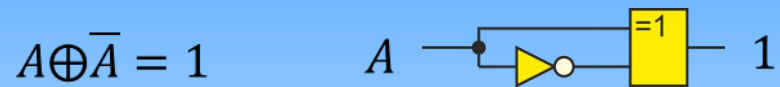
$$\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A + B}$$



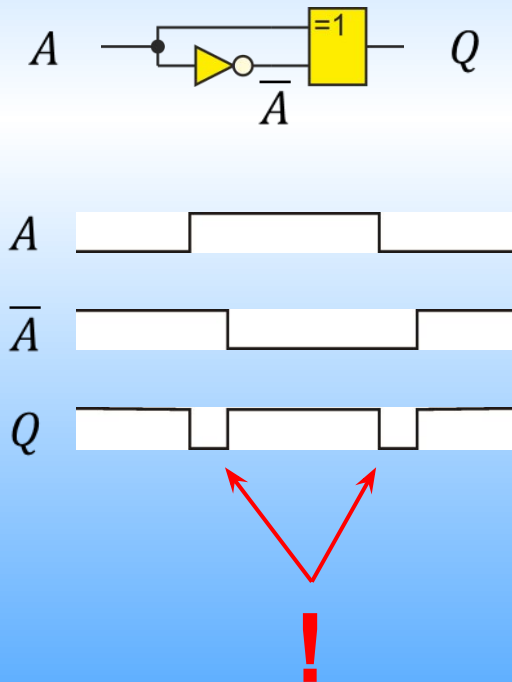
## Следствие теоремы Де Моргана



# Важность учета задержек

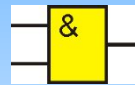


В реальных устройствах не совсем так!



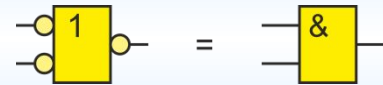
# Базис

Сколь угодно сложное логическое выражение может быть представлено с использованием только основных логических элементов.

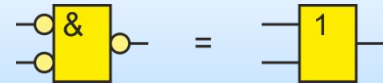


Используя теорему де-Моргана

$$\overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \times B$$

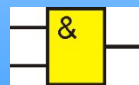


$$\overline{\overline{A} \times \overline{B}} = A + B$$



Можно обойтись только двумя функциями:

Базис 1



Базис 2



# NAND

Из элементов 2И-НЕ можно сделать все!

