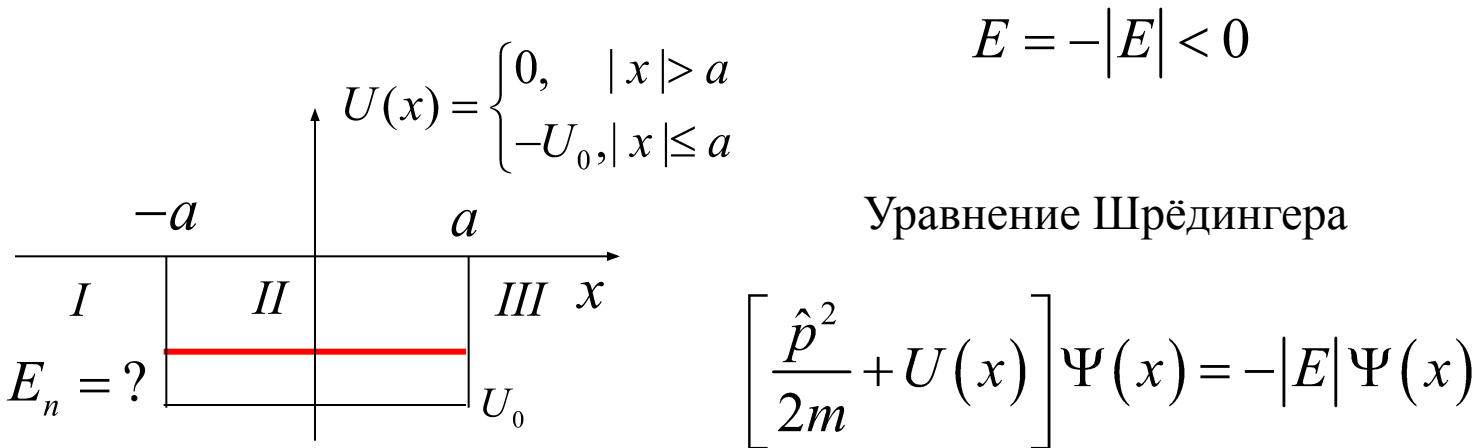


## «Мелкая» прямоугольная яма

Рассматриваем случай финитного движения (в классической механике)



Уравнение Шрёдингера в разных областях

$$I, III: \Psi'' - k^2 \Psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$II: \Psi'' + \kappa^2 \Psi = 0, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - |E|)}$$

В «мелкой» яме существует только одно чётное решение

$$I, III: \Psi = A \cdot e^{-k|x|}$$

$$II: \Psi = B \cdot \cos \kappa x$$

Условия сшивки

$$\begin{cases} A \cdot e^{-ka} - B \cdot \cos \kappa a = 0 \\ -kA \cdot e^{-ka} + \kappa B \cdot \sin \kappa a = 0 \end{cases}$$

Уравнение для энергии

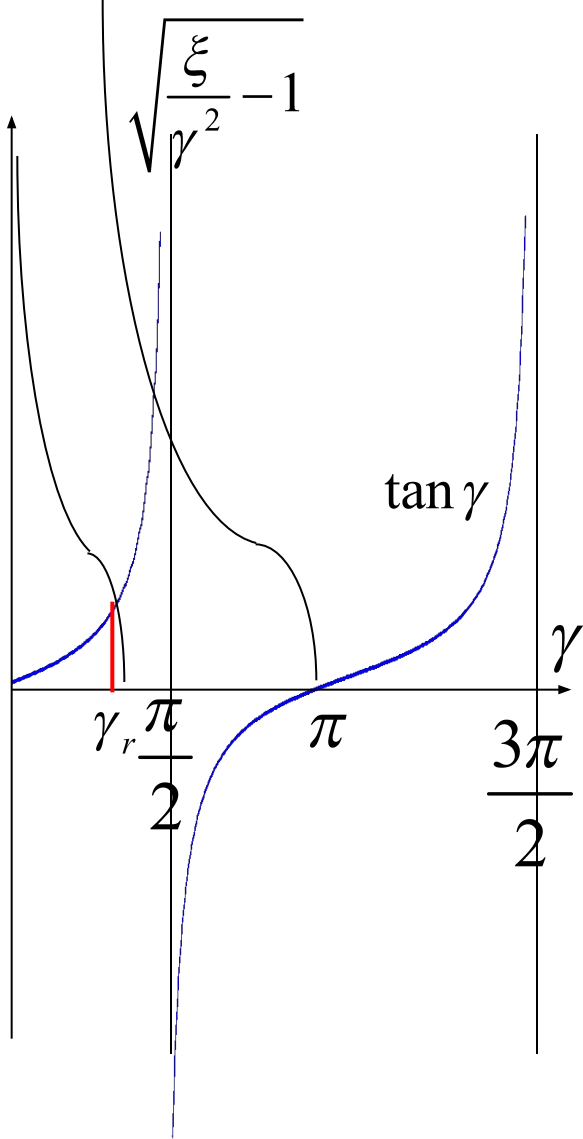
$$\frac{k}{\kappa} = \tan \kappa a$$

Уравнение для энергии и безразмерных переменных

$$\sqrt{\frac{\xi}{\gamma^2} - 1} = \tan \gamma; \quad \gamma = \kappa a, \quad \xi = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2}$$

Найти решение в приближении «мелкой» ямы

$$\xi = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2} \ll 1$$



«Графические» соображения

Корень мал по сравнению с единицей

$$\gamma_r \ll 1$$

Найти решение характеристического уравнения в первом исчезающем приближении?

Решение

$$\sqrt{\frac{\xi}{\gamma^2} - 1} = \tan \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^4 + \gamma^2 - \xi = 0$$

Или

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 4\xi} - 1 \right)$$

Найти энергию в первом исчезающем приближении при

$$\xi \ll 1$$

Решение с точностью до линейного слагаемого

$$\gamma^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\xi} - 1) \approx \xi$$

Или, возвращаясь к исходным обозначениям

$$\frac{2ma^2}{\hbar^2}(U_0 - |E|) = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} \Rightarrow |E| = 0$$

Является ли ответ физически значимым?

Указание: подставить полученное значение в условия сшивки.

Условия сшивки при нулевой энергии

$$\begin{cases} A - B \cdot \cos \xi = 0 \\ \xi B \cdot \sin \xi = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow \Psi(x) = 0$$

Надо искать решение с точностью до квадратичных слагаемых

$$\boxtimes \xi^2$$

Решение с точностью до квадратичных слагаемых

Полезная формула

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

Поэтому

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1+4\xi} - 1 \right) \approx \xi - \xi^2$$

Или

$$\frac{2ma^2}{\hbar^2} (U_0 - |E|) = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} - \left( \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} \right)^2 \Rightarrow |E| = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2} \cdot U_0 = \xi \cdot U_0 \ll U_0$$

Энергия связанного состояния в мелкой яме много меньше глубины ямы!

В том же приближении найти волновую функцию связанного состояния?

Указание. Оценить величины

$$ka \ll ?, \quad ka \ll ?$$

и записать условия сшивки для «мелкой» ямы.



## Неравенства для «мелкой» ямы

$$ka = \sqrt{\frac{2m|E|a^2}{\hbar^2}} \ll \sqrt{\xi} \ll 1, ka \approx \sqrt{\xi} \ll 1 \Rightarrow e^{-ka} \approx \cos ka \approx 1$$

## Условия сшивки для «мелкой ямы»

$$A \approx B$$

Волновая функция частицы в «мелкой» яме во всём интервале изменения координаты

$$I, II, III: \Psi(x) \approx A \cdot e^{-k|x|}$$

Вычислить нормировочную константу?

Волновая функция частицы в «мелкой» яме во всём интервале изменения координаты

$$\Psi(x) \approx \sqrt{k} \cdot e^{-k|x|}, \quad x \in ]-\infty, \infty[$$

---

Задачи.

1. Вычислить средние значения кинетической и потенциальной энергии частицы в мелкой яме.
2. Найти плотность распределения вероятности для импульса частицы в мелкой яме.

1. Вычислить средние значения кинетической и потенциальной энергии частицы в мелкой яме.

Среднее значение кинетической энергии частицы в мелкой яме.

$$\bar{T} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (\hat{p}^2 \Psi(x)) = -\frac{\hbar^2 k}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-k|x|} \left( \frac{d^2 e^{-k|x|}}{dx^2} \right)$$

$$\frac{d^2 e^{-k|x|}}{dx^2} = ?$$

Из семинара о дельта-функции

$$\frac{d e^{-k|x|}}{dx} = -k e^{-k|x|} \cdot \frac{d|x|}{dx} = -k e^{-k|x|} \cdot (\eta(x) - \eta(-x))$$

$$\frac{d^2 e^{-k|x|}}{dx^2} = -k \frac{d}{dx} \left[ e^{-k|x|} \cdot (\eta(x) - \eta(-x)) \right] = -k (\eta(x) - \eta(-x)) \frac{d e^{-k|x|}}{dx} - 2k e^{-|x|} \cdot \delta(x)$$

$$\boxed{\frac{d^2 e^{-k|x|}}{dx^2} = k^2 \cdot e^{-k|x|} - 2k \cdot \delta(x)}$$

Среднее значение кинетической энергии частицы в мелкой яме (продолжение)

$$\bar{T} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (\hat{p}^2 \Psi(x)) = -\frac{\hbar^2 k^3}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2k|x|} + \frac{\hbar^2 k^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x)$$

Вычислить интегралы?

## Интегралы

$$-\frac{\hbar^2 k^3}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2k|x|} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{m}$$

Среднее значение кинетической энергии частицы в мелкой яме (продолжение)

$$\bar{T} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Среднее значение потенциальной энергии частицы в мелкой яме.

$$\bar{U} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x) (U(x) \Psi(x)) = -kU_0 \int_{-a}^a dx e^{-2k|x|} \approx -2kaU_0$$

Сравнить величины средних значений кинетической и потенциальной энергий?

Отношение средних значений кинетической и потенциальной энергий

$$\left| \frac{\bar{T}}{\bar{U}} \right| = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \cdot \frac{1}{2kaU_0}$$

$$ka = \xi, \quad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = |E| = \xi U_0$$

$$\left| \frac{\bar{T}}{\bar{U}} \right| = \frac{\xi U_0}{2\xi U_0} = \frac{1}{2}$$



**Найти плотность распределения вероятности для импульса частицы в мелкой яме.**

Используя принцип суперпозиции, записать в явном виде волновую функцию в импульсном представлении?

Волновая функция в импульсном представлении

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp a_p \Psi_p(x), \quad a_p = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_p^*(x) \Psi(x)$$

Связанное состояние в «мелкой» яме

$$a_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-k|x|-ipx/\hbar} = ?$$

Результат

$$a_p = \sqrt{\frac{k}{2\pi\hbar}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-k|x| - ipx/\hbar} = \sqrt{\frac{k}{2\pi\hbar}} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} dx e^{-kx + ipx/\hbar} + \int_0^{\infty} dx e^{-kx - ipx/\hbar} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{(\hbar k)^{3/2}}{p^2 + (\hbar k)^2}$$

Плотность распределения вероятности импульса

$$\rho(p) = \left( \frac{2}{\pi} \right) \cdot \frac{(\hbar k)^3}{(p^2 + (\hbar k)^2)^2}$$

Оценить дисперсию импульса и координаты?