

Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла



1. Правило вычисления площадей плоских фигур

Определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:

- 1. По условию задачи сделать схематический чертеж.*
- 2. Представить искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определить пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.*
- 3. Записать каждую функцию в виде $y = f(x)$*
- 4. Вычислить площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.*

2. Площади фигур, расположенных над осью Oх

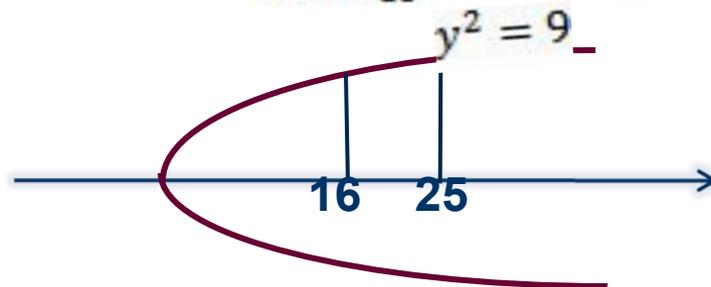
Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, т.е. $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда график функции $y = f(x)$ расположен над осью Oх. Если фигура, расположенная над осью Oх, является криволинейной трапецией, то ее площадь вычисляется по известной формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Н-р: Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y^2 = 9, x = 16, x = 25, y = 0$

Р-е:

$$S = \int_{16}^{25} \sqrt{9x} dx = \int_{16}^{25} 3x^{1/2} dx = \frac{3x^{3/2}}{3/2} \Big|_{16}^{25} = 2x\sqrt{x} \Big|_{16}^{25} = 2(125 - 64) = 2 * 61 = 122$$



3. Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью Ox

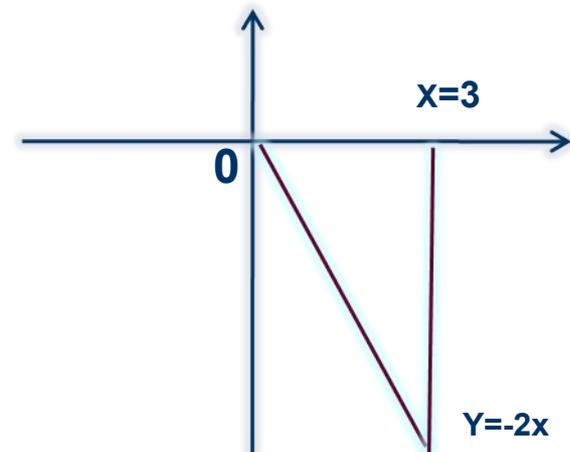
Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неположительная непрерывная функция $y = f(x)$, т.е. $f(x) \leq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда график функции $y = f(x)$ расположен под осью Ox .

Если фигура, расположенная над осью Ox , является криволинейной трапецией, то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Н-р: $y = -2, y = 0, x = 3$

Р-е: $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_0^3 (-2x) dx \right| = |(-x^2)|_0^3 = 9$



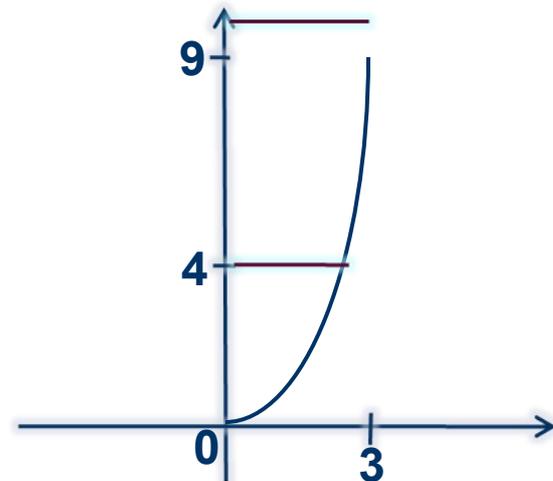
4. Площади фигур, прилегающих к оси Oy

Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x = f(y)$, прямыми $y=a, y=b$ и осью Oy, то её площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(y) dy$$

Н-р: $y = x^2, y = 4, y = 9, x = 0$

Р-е: $S = \int_4^9 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y \sqrt{y} \Big|_4^9 = 12 \frac{2}{3}$

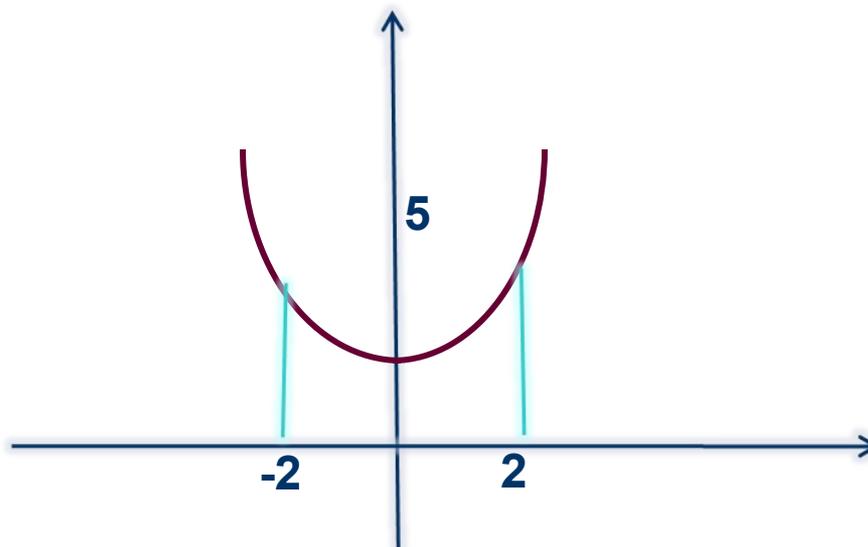


5. Симметрично расположенные плоские фигуры

Если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат, то можно упростить вычисления, определив половину площади и затем удвоив результат.

Н-р: $y = x^2 + 1, x = -2, x = 2, y = 0$

Р-е: $S = \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = 2 \int_0^2 (x^2 + 1) dx = 2 \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^2 = 9 \frac{1}{3}$



Решение примеров

№1 $xy = 6, x + y - 7 = 0$

№2 $y = 4x - x^2, y = 0, x = 5$

№3 $y = x^2 - 6x, x = 0$

№4 Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y^2 = 4x, x^2 = 4y$



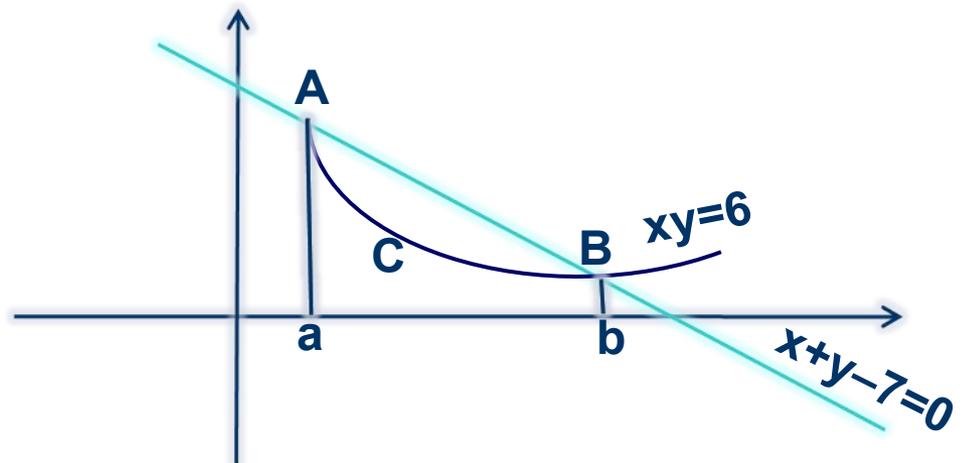
Решение №1:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{Имеем} \quad \begin{aligned} x(7 - x) &= 6 \\ 7x - x^2 &= 6 \\ x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ x_1 = 6, x_2 = 1 & \quad a = 6, b = 1 \end{aligned}$$

$$S_{aABb} = \int_1^6 (7 - x) dx = 7x - \frac{x^2}{2} \Big|_1^6 = \left(7 \cdot 6 - \frac{36}{2}\right) - \left(7 \cdot 1 - \frac{1}{2}\right) = 17,5$$

$$S_{aABb} = \int_1^6 \frac{6 dx}{x} = 6 \ln x \Big|_1^6 = 6 \ln 6$$

$$\text{T.E. } S = (17,5 - 6 \ln 6)$$



Решение №2

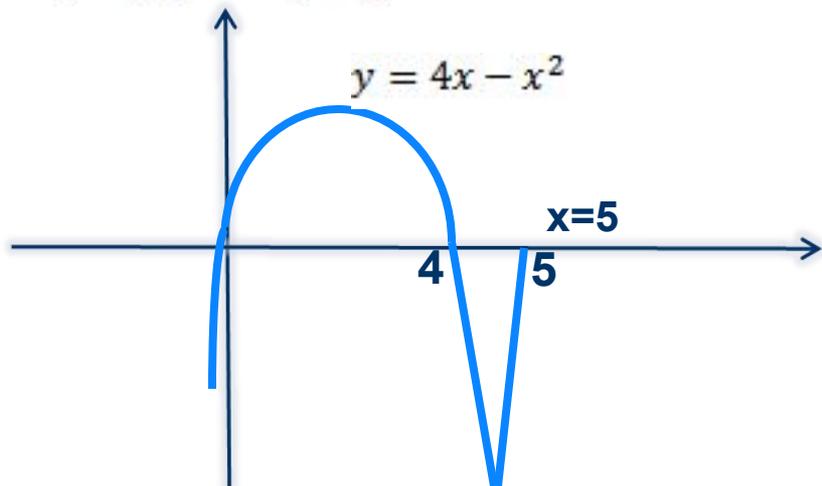
Парабола $y = 4x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x = 0, x = 4$
 S_1 и S_2 площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам $[0,4]$ и $[4,5]$

S - искомая площадь, тогда $S = S_1 + S_2$

$$S_1 = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$S_2 = \left| \int_4^5 (4x - x^2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_4^5 \right| = \left(\frac{125}{3} - 50 \right) - \left(\frac{64}{3} - 32 \right) = \frac{7}{3}$$

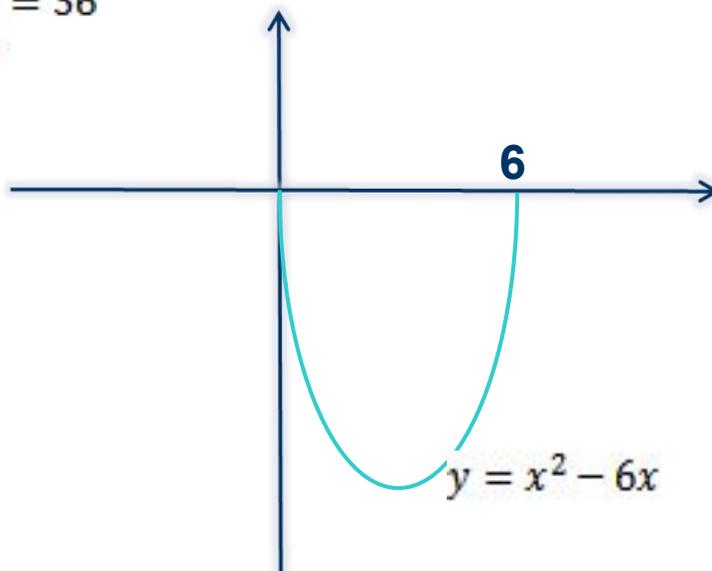
С-но: $S = S_1 + S_2 = 32/3 + 7/3 = 13$



Решение №3

Точки пересечения параболы $y = x^2 - 6x$ с осью Ox имеют абсиссы $x = 0$ и $x = 6$, так как $x^2 - 6x = x(x - 6)$, где $x_1 = 0$, $x_2 = 6$. На отрезке $[0, 6]$ график функции $y = x^2 - 6x$ расположен ниже оси Ox .

$$S = \left| \int_0^6 (x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 \right) \Big|_0^6 \right| = 36$$



Решение №4

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2/4 \end{cases} \text{ получим } x = 4, y = 4, \text{ т.е. } M = (4; 4)$$

$$S = \int_0^4 \sqrt{4x} \, dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} \, dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

