Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

1. Правило вычисления площадей плоских фигур

Определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:
1. По условию задачи сделать схематический чертеж.
2.Представить искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определить пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеций.
3.Записать каждую функцию в виде $y = f(x)$
4.Вычислить площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.

2.Площади фигур, расположенных над осью Ox

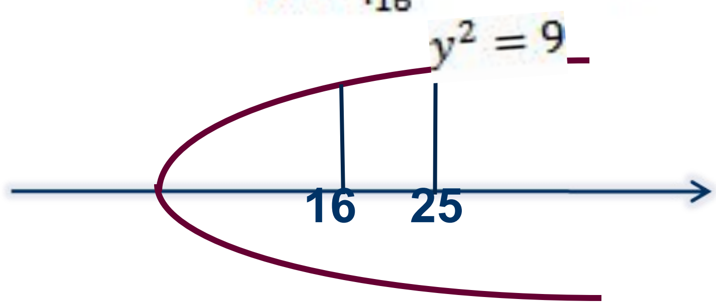
Пусть на тотрезке [a,b] функция f(x) принимает неотрицательные значения,т.е $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$.Тогда график функции $y = f(x)$ расположен над осью Ox.Если фигура,расположенная над осью Ox, являются криволинейной трапецией,то ее площадь вычисляется по известной формуле:

$$S = \int_a^b f(x)$$

Н-р:Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями: $y^2 = 9, x = 16, x = 25 , y = 0$

Р-е:

$$S = \int_{16}^{25} \sqrt{9x}\, dx = \int_{16}^{25} 3x^{1/2}\, dx = \frac{3x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{16}^{25} = 2x\sqrt{x}\Big|_{16}^{25} = 2(125 - 64) = 2 * 61 = 122$$



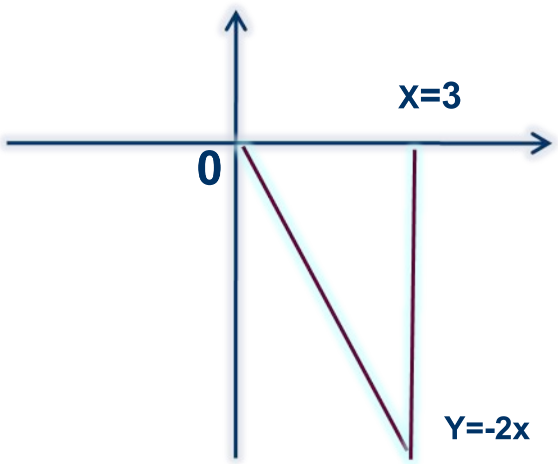
3.Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью Ох

Пусть на отрезке [*a*,*b*] задана неположительная непрерывная функция $y = f(x)$,т.е. $f(x) \le 0$ для любого $x \in [a, b]$Тогдм график функции $y = f(x)$ расположен под осью Ох.
Если фигура, расположенная над осью Ох, является криволинейной трапецией, то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Н-р: $y = -2, y = 0, x = 3$

Р-е: $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_0^3 (-2x)dx\right| = |(-x^2)|_0^3 = 9$



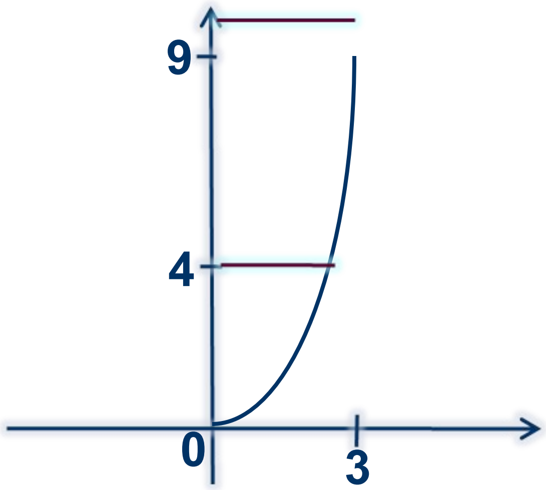
4.Площади фигур, прилегающих к оси Оу

Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x = f(y)$,прямыми y=a,y=b и осью Оу,то её площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(y)\,dy$$

Н-р: $y = x^2, y = 4, y = 9, x = 0$

Р-е: $S = \int_4^9 \sqrt{y}\ dy = \frac{2}{3} y\sqrt{y}\Big|_4^9 = 12\frac{2}{3}$

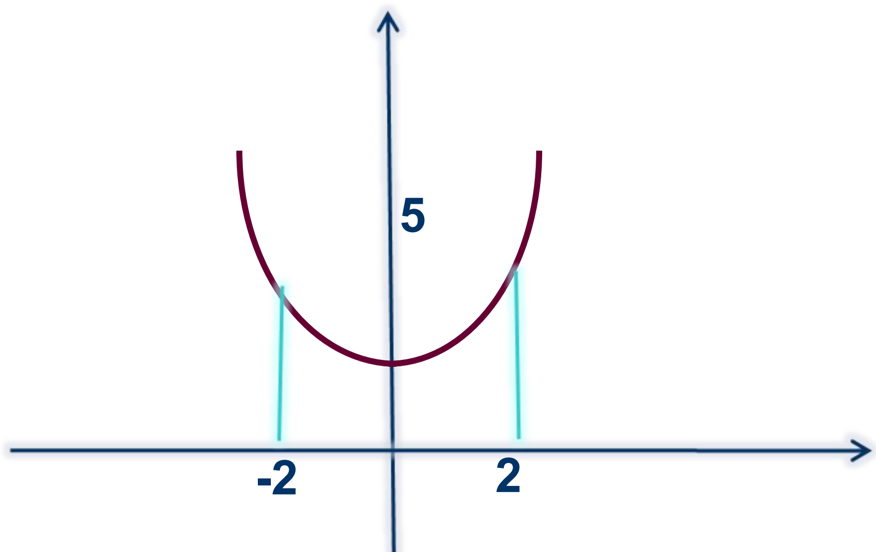


5.Симметрично расположенные плоские фигуры

Если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат, то можно упростить вычисления, определив половину площади и затем удвоив результат.

Н-р: $y = x^2 + 1, x = -2, x = 2, y = 0$

Р-е: $S = \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^2 + 1)\,dx = 2\frac{x^3}{3} + x\Big|_0^2 = 9\frac{1}{3}$



Решение примеров

№1 $xy = 6, x + y - 7 = 0$

№2 $y = 4x - x^2, y = 0, x = 5$

№3 $y = x^2 - 6x, x = 0$

№4 Вычислить площадь, ограниченной кривыми $y^2 = 4x, x^2 = 4y$

Решение №1:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

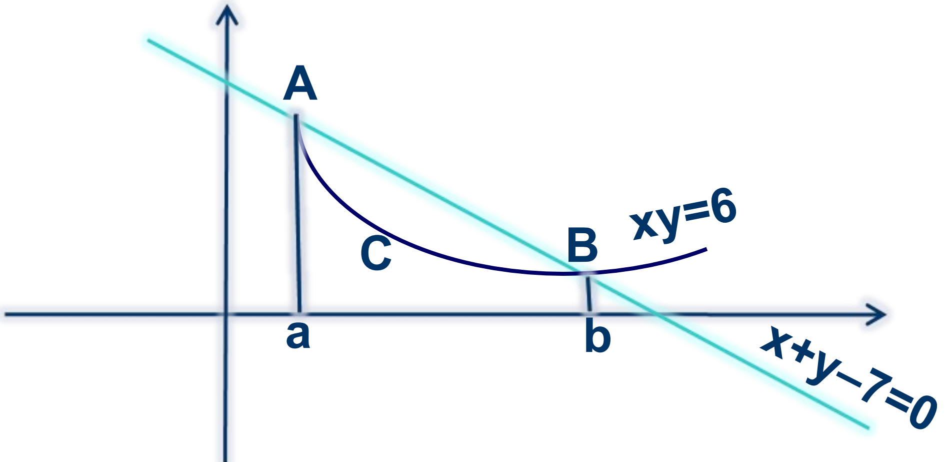
Имеем

$$x(7 - x) = 6$$
$$7x - x^2 = 6$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$x_1 = 6, x_2 = 1 \qquad a = 6, b = 1$$

$$S_{aABb} = \int_1^6 (7 - x)\,dx = 7x - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^6 = \left(7 * 6 - \frac{36}{2}\right) - \left(7 * 1 - \frac{1}{2}\right) = 17{,}5$$

$$S_{aABb} = \int_1^6 \frac{6\,dx}{x} = 6\ln x|_1^6 = 6\ln 6$$

Т.Е. $S = (17{,}5 - 6\ln 6)$



Решение №2

Парабола $y = 4x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x = 0, x = 4$

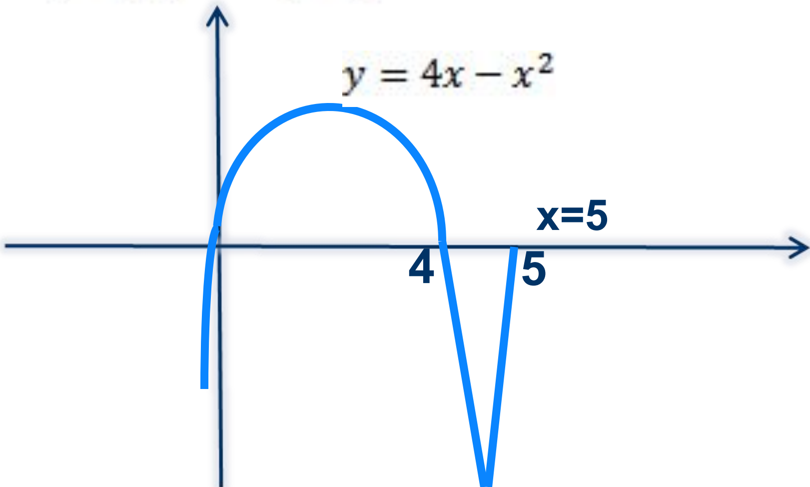
S_1 и S_2 площади частей этой фигуры,соответствующих отрезкам [0,4] и [4,5]

S - искомая площадь,тогда $S = S_1 + S_2$

$$S_1 = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$S_2 = \left|\int_4^5 (4x - x^2)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\right|_4^5 = \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) = \frac{7}{3}$$

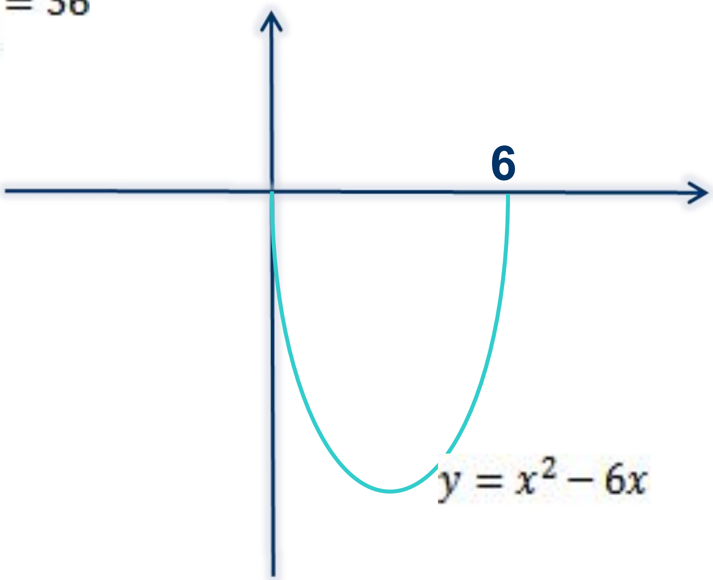
С-но: $S = S_1 + S_2 = 32/3 + 7/3 = 13$



Решение №3

Точки пересечения параболы $y = x^2 - 6x$ с осью Ох имеют абсциссы $x = 0$ и $x = 6$, так как $x^2 - 6x = x(x-6)$, где $x_1 = 0, x_2 = 6$. На отрезке [0,6] график функции $y = x^2 - 6x$ расположен ниже оси Ох.

$$S = \left|\int_0^6 (x^2 - 6x)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\right|_0^6 = 36$$



Решение №4

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2/4 \end{cases}$ получим $x = 4, y = 4$, т.е $M = (4; 4)$

$$S = \int_0^4 \sqrt{4x}\, dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{4}{3} x^{3/2}\Big|_0^4 - \frac{x^3}{12}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$