УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Линейное пространство

Санкт-Петербург, 2022

Определение линейного пространства

Множество $\mathcal{L}$ называется элементов любой природы называется *линейным пространством*, если выполнены следующие условия:

1) На множестве $\mathcal{L}$ определена операция сложения элементов, т.е. каждой паре элементов x и $y \in \mathcal{L}$ поставлен в соответствие определенный элемент z из $\mathcal{L}$. Элемент z называется суммой элементов x и y $(z = x + y)$
2) Для элементов множества $\mathcal{L}$ определена операция умножения на вещественное число (каждому элементу $x \in \mathcal{L}$ и каждому вещественному числу α поставлен в соответствие элемент $y \in \mathcal{L}$). Элемент y называется произведением элемента x на число α $(y = \alpha x)$
3) Данные операции удовлетворяют следующим требованиям (аксиомам линейного пространства):

Аксиомы линейного пространства

1. *Аксиомы сложения*

а) $\forall x$ и $y \in \mathcal{L}$ $\quad x + y = y + x$ (коммутативность)

б) $\forall x, y, z \in \mathcal{L}$ $\quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность)

в) существование нулевого элемента

$$\exists 0 \in \mathcal{L}: \text{ для } \forall x \in \mathcal{L} \quad x + 0 = x$$

г) существование противоположного элемента

$$\text{для } \forall x \in \mathcal{L} \quad \exists -x \in \mathcal{L}: \quad x + (-x) = 0$$

2. *Аксиомы умножения*

д) $\forall x \in \mathcal{L} \quad 1 \cdot x = x$

е) $\forall x \in \mathcal{L}$ и для любых вещественных чисел α и β: $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$
(ассоциативность)

3. Аксиомы, связывающие обе операции

ж) $\forall x \in \mathcal{L}$ и для любых вещественных чисел α и β: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(умножение дистрибутивно по отношению к сложению чисел)

з) $\forall x$ и $y \in \mathcal{L}$ и для любого вещественного числа α: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(умножение на число дистрибутивно по отношению к сложению элементов из $\mathcal{L}$)

Примеры линейных пространств:

1) Множество вещественных чисел

2) Множество $\mathcal{V}_3$ всех геометрических векторов (множество геометрических векторов в трехмерном пространстве)

3) Множество столбцов с n элементами

4) Множество $m \times n$ матриц с вещественными элементами

Назовите нулевые элементы данных линейных пространств

Свойства линейных пространств

1. В каждом линейном пространство существует единственный нулевой элемент

2. В каждом линейном пространстве существует единственный противоположный элемент

3. Для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство $0 \cdot x = 0$

4. Для каждого элемента $x \in \mathcal{L}$ противоположный элемент выражается формулой $x^{-1} = (-1) \cdot x$

5. Для любого числа α выполняется $\alpha \cdot 0 = 0$

Базис линейного пространства и координаты вектора. Размерность линейного пространства

Пусть векторы (элементы) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ принадлежат линейному пространству $\mathcal{L}$ и пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$ – какие-то произвольные числа. Выражение $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов (элементов) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, а числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ – коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение 1. Векторы (элементы) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ называются линейно зависимыми, если

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = 0 \qquad (1)$$

при условии, что не все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю; если же соотношение (1) выполняется лишь при условии, что $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, то векторы называются линейно независимыми.

Линейная зависимость и независимость тесно связаны с понятием **базиса.**

Определение 2. Совокупность n элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется базисом этого пространства, если:

1) Элементы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы

2) Каждый элемент пространства $\mathcal{L}$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{L})$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$, т.е. справедливо равенство

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n. \qquad (2)$$

Представление (2) называется разложением элемента $\boldsymbol{x}$ по данному базису. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые являются коэффициентами в разложении вектора по данному базису, называются координатами вектора в данном базисе.

Теорема 1. Координаты вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ относительно некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ этого линейного пространства определяются единственным образом.

Доказательство.

Разложим вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ относительно некоторого базиса этого линейного пространства:

$$\mathbf{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \qquad (3)$$

и пусть имеет место другое разложение этого же вектора относительно этого же базиса:

$$\mathbf{x} = {x'}_1\boldsymbol{e}_1 + {x'}_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + {x'}_n\boldsymbol{e}_n \qquad (4)$$

Вычтем (4) из (3):

$$(x_1 - {x'}_1)\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - {x'}_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (x_n - {x'}_n)\boldsymbol{e}_n = 0 \qquad (5)$$

Так как базисные векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ линейно независимы, то это означает, что коэффициенты линейной комбинации могут быть только нулями, значит

$$x_1 = x_1', x_2 = x'_2, x_n = x'_n$$

Теорема доказана.

Теорема 2. При сложении элементов линейного пространства их координаты в данном базисе складываются. При умножении элемента на число его координаты умножаются на это число.

Примеры базисов:

1) Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов является базисом в пространстве V_3

2) Рассмотрим пространство многочленов $P_n(x)$ степени $\leq n$

Базис этого пространства: одночлены $1, x, x^2, \dots x^n$.

Любой многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x_n$$

В силу определения коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ являются координатами многочлена $P_n(x)$ в выбранном базисе.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix},$$

где левая часть уравнения представляет собой произвольный вектор из R^n, а правая часть – набор из n векторов такого же размера, умноженных на коэффициенты. Тогда если существует только одно решение $c_1, c_2, \dots c_n$ для данного уравнения, то векторы

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

составляют базис.

Другими словами, базис – это минимальный набор векторов, необходимый для выражения произвольного вектора в R^n. Важное свойство базиса – вектора, входящие в этот набор, линейно независимы.

Задача. Проверьте, образуют ли базис следующие векторы

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

на примере вектора $\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$.

Векторы, входящие в набор $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, не образуют базис, т.к. для произвольного вектора $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ можно найти различные варианты c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Тот факт, что набор векторов линейно независим, не означает, что он образует базис.

Например, набор $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ образует базис, а набор $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ – не образует, хотя они оба линейно независимы.

Задача а. Могут ли данные векторы

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

описать вектор $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$?

Различие понятий линейной независимости векторов и базиса

1. Линейная независимость

Набор векторов $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ линейно независим, если

существует только одно решение $c_1 = c_2 = \cdots = c_n$ уравнения

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Базис

Набор векторов $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$ образует базис, если существует

только одно решение уравнения

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Размерность линейного пространства

Определение 3. Говорят, что линейное пространство имеет **размерность** равную n, если n – число базисных векторов, пространство при этом обозначают $\mathcal{L}^n$.

Любые $n + 1$ элементов пространства являются линейно зависимыми.

Пространство, имеющее базис, состоящий из конечного числа элементов, называется конечномерным пространством.

Линейное пространство, в котором существует бесконечно много линейно независимых элементов, называется бесконечномерным пространством.

Преобразование базиса и координат

1. Матрица преобразования координат

Рассмотрим два различных базиса в пространстве R^n: $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, f_2, \dots, f_n$. Один и тот же вектор $\boldsymbol{x}$ относительно разных базисов имеет различные координаты. Ограничимся случаем $n = 3$ и запишем:

$$\boldsymbol{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{x} = x_1{}' f_1 + x_2{}' f_2 + x_3{}' f_3 \qquad (2)$$

Любой вектор второго базиса можно разложить по первому базису:

$$\begin{aligned} f_1 &= \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \tau_{31} e_3 \\ f_2 &= \tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \tau_{32} e_3 \\ f_3 &= \tau_{13} e_1 + \tau_{23} e_2 + \tau_{33} e_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2):

$$\boldsymbol{x} = x_1{}'(\tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \tau_{31} e_3) + x_2{}'(\tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \tau_{32} e_3) + x_3{}'(\tau_{13} e_1 + \tau_{23} e_2 + \tau_{33} e_3) = (\tau_{11} x_1' + \tau_{12} x_2' + \tau_{13} x_3') e_1 + (\tau_{21} x_1' + \tau_{22} x_2' + \tau_{23} x_3') e_2 + (\tau_{31} x_1' + \tau_{32} x_2' + \tau_{33} x_3') e_3 \qquad (4)$$

Приравняем коэффициенты при векторах e_1, e_2, e_3 в правых частях формул (1) и (4):

$$\begin{gathered} x_1 = \tau_{11}x_1{}' + \tau_{12}x_2{}' + \tau_{13}x_3{}' \\ x_2 = \tau_{21}x_1{}' + \tau_{22}x_2{}' + \tau_{23}x_3{}' \\ x_3 = \tau_{31}x_1{}' + \tau_{32}x_2{}' + \tau_{33}x_3{}' \end{gathered} \qquad (5)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, X' = \begin{bmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{bmatrix}, \ T = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношения (5) можно переписать в виде

$$X = TX'.$$

Матрица T – матрица преобразования координат при переходе от старого базиса к новому (от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $f_1, f_2, \dots, f_n$).
Столбцы матрицы координат – координаты вектора нового базиса $f_1, f_2, \dots, f_n$ относительно старого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Для того, чтобы выразить X', вычислим T^{-1} и запишем

$$X' = T^{-1}X.$$

Задача 1. Вектор x в базисе e_1, e_2 имеет координаты $1, -2$. Найти координаты этого вектора в базисе $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2$.

Запишем матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Ее столбцами матрицы координат являются координаты вектора нового базиса e_1', e_2' относительно старого базиса e_1, e_2. Поэтому $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Находим координаты вектора x в новом базисе по формуле $x' = T^{-1}x$:

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Найти координаты геометрического вектора $x = -i + 2j + k$ в базисе, состоящем из векторов $e_1' = i + j$, $e_2' = j + k$, $e_3' = i + k$.

Запишем координаты векторов e_1', e_2', e_3' в исходном базисе (i, j, k):

$$e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Составляем матрицу преобразования координат

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обращаем матрицу T и вычисляем координаты вектора x в новом базисе:

$$x' = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Системы линейных уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{matrix} \qquad (1)$$

Или в матричной форме

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ – вектор-столбец неизвестных x_i

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов

Расширенная матрица системы

$$\bar{A} = (A|B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

Если $B = 0$, то система называется **однородной**;
Если $B \neq 0$, то система называется **неоднородной**.

Решение системы – вектор-столбец $X\,(n \times 1)$, обращающий (1) в равенство.

Совместная система – существует по крайней мере одно решение.

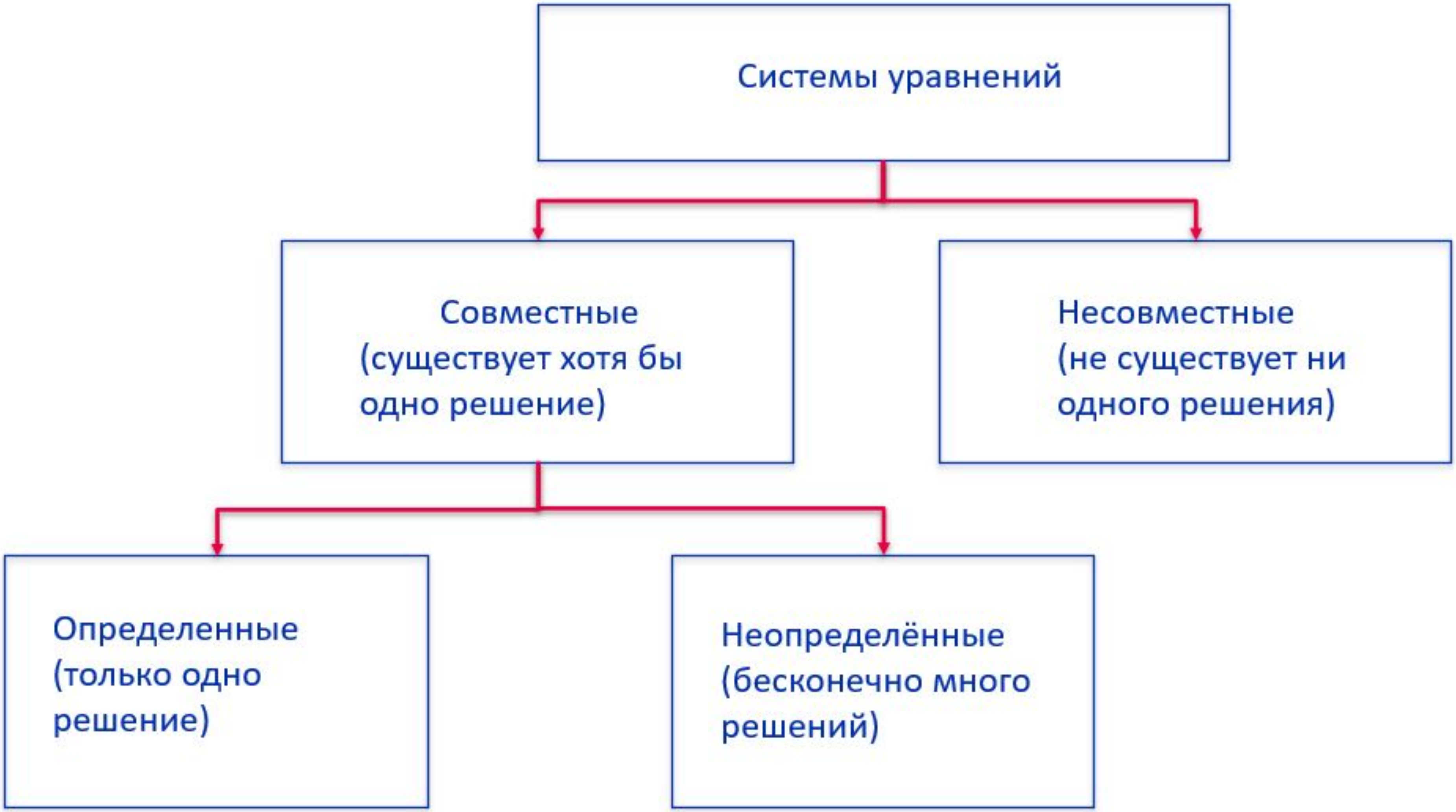
Несовместная система – не существует решений.

Определенная система – имеет единственное решение

Неопределенная система – имеет более одного решения

Эквивалентные системы – множества решений совпадают.

Классификация систем линейных уравнений



Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{gathered}$$

Как проверить совместность системы?

Теорема Кронекера-Капелли.
Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

$$rang(A) = rang(\bar{A}\,), \tag{4}$$

где $\bar{A} = (A|B)$ – **расширенная матрица** системы.

Пусть $rang(A) = rang(\bar{A}\,) = r$. Будем считать, что базисный минор располагается в первых r строках матрицы A. Отбросив последние $m - r$ уравнений системы (2), запишем укороченную систему:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \end{matrix} \qquad (5)$$

которая эквивалентна исходной.

Назовем неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ базисными, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ свободными и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (5).

Получим систему относительно базисных неизвестных:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n,
\end{gathered}
$$

Которая для каждого набора значений свободных неизвестных $x_{r+1} =$ $c_1, \dots, x_n == c_{n-r}$ имеет единственное решение $x_1(c_1, \dots, c_{n-r}), \dots, x_r(c_1, \dots, c_{n-r})$, находимое по правилу Крамера.

Соответствующее решение укороченной, а следовательно, исходной систем имеет вид:

$$
X = \begin{bmatrix} x_1(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{bmatrix}. \tag{6}
$$

Формула (6) называется **общим решением** системы (2).

Алгоритм решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получено общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Решить систему:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - \ \ x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение: $r(A) = r(\overline{A}) = 2$.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 + x_4} = 1, \\ x_1 - 2x_2 + \boxed{x_3 - x_4} = -1. \end{cases}$$

Назовем неизвестные x_3, x_4 базисными, а x_1, x_2 свободными и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений.

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \ \ 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_3 - x_4 = -1 - x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 \\ -1 - x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 \\ -1 - x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Частное решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Однородные системы уравнений

Однородная система

$$AX = 0$$

всегда совместна, т.к. имеет тривиальное решение $X = 0$. Для существования нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы $r = rangA < n$ (при $m = n$ это условие означает, что $\det A = 0$).

Пусть $Q \subset R^n$ – множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n - r$ векторов $e_1, \dots, e_{n-r}$. Соответствующая ему в каноническом базисе система вектор-столбцов $E_1, \dots, E_{n-r}$ называется *фундаментальной системой решений*. Общее решение однородной системы имеет вид:

$$X = c_1 E_1 + \cdots + c_{n-r} E_{n-r},$$

где $c_1, \dots c_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Пример.

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$
$$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$$
$$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$$

Записываем матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}$

Проверяем величину ранга матрицы A:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & 2 \\ -8 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow rang(A) = 2$ Система имеет нетривиальное решение

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Общее решение данной однородной системы имеет вид:

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2,$$

Выберем в качестве базисного минор $M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$.

Тогда укороченная система имеет вид:

$$-4x_2 + 5x_3 = -2x_1 - 3x_4$$

$$-6x_2 + 4x_3 = -3x_1 - 2x_4$$

Положим $x_1 = c_1$, $x_4 = c_2$ (свободные переменные)

Решим укороченную систему: $A_y = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, B_y = \begin{bmatrix} -2c_1 - 3c_2 \\ -3c_1 - 2c_2 \end{bmatrix}$

$$A_y^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{14} & -\frac{5}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{4}{14} \end{bmatrix}, X_y = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A_y^{-1} B_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{7}c_2 \\ -\frac{5}{7}c_2 \end{bmatrix}$$

Фундаментальная система решений:

$$X(c_1, c_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{7}c_2 \\ -\frac{5}{7}c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 E_1 + c_2 E_2, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ {}^1\!/_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/7 \\ -{}^5\!/_7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Неоднородные системы линейных уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (1)$$

Или в матричной форме

$$AX = B,$$

Теорема. Общее решение неонородной системы уравнений (1) имеет вид
$X_{OH} = X_{ЧH} + X_{OO}$ (*)
где $X_{ЧH}$ - какое-нибудь (частное) решение системы (1), X_{OO} – общее решение однородной системы уравнений (ФСР однородной системы уравнений)

Пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение: $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. $\Rightarrow$ система совместна

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Общее решение неоднородной системы уравнений

$$X_{OH} = X_{ЧH} + X_{OO}$$

Назовем неизвестные x_3, x_4 базисными, а x_1, x_2 свободными и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений.

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-x_1+2x_2\\-1-x_1+2x_2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1-x_1+2x_2\\-1-x_1+2x_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_1+2x_2\\1\end{bmatrix}$$

Частное решение: $x_1=0, x_2=0, \begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow\ X_{\text{ч}H}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Найдем ФСР (X_{OO}):

Решим укороченную систему: $A_y=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, B_y=\begin{bmatrix}-x_1+2x_2\\-x_1+2x_2\end{bmatrix}$

$$A_y^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, X_y=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=A_y^{-1}B_y=\begin{bmatrix}-x_1+2x_2\\0\end{bmatrix}$$

Фундаментальная система решений:

$$X(c_1, c_2) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1E_1 + c_2E_2, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{OH} = X_{ЧH} + X_{OO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Пусть $c_1 = c_2 = 1$. Тогда $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

en.ifmo.ru

international@mail.ifmo.ru

Санкт-Петербург, 2014