

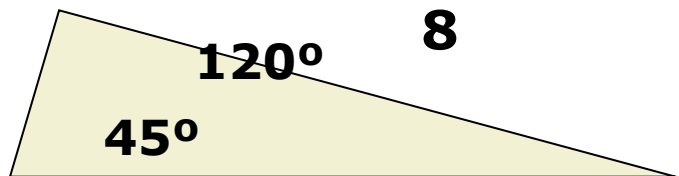
Решение треугольников

Урок №28

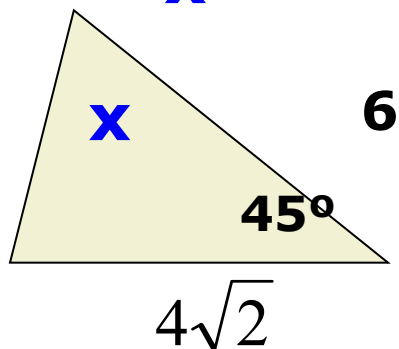
Самостоятельная работа

• Вариант 1

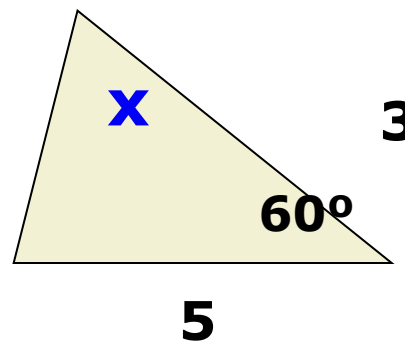
1.

**x**

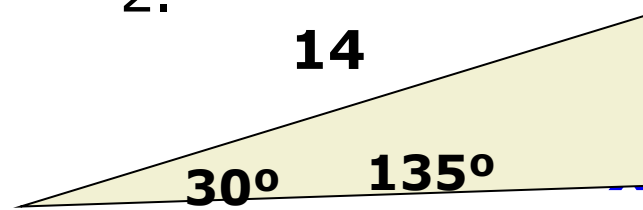
2.

**Найти x**

• Вариант 2

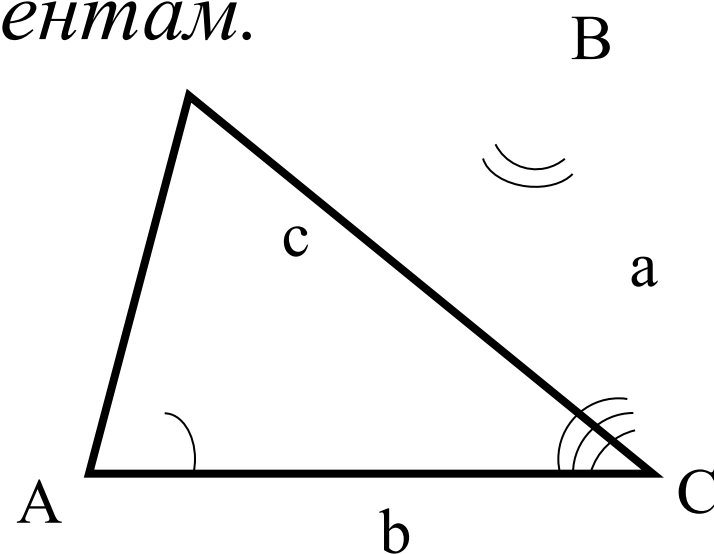


2.

**3. Определите вид треугольника со сторонами****3; 5; 7****4; 5; 6**

Определение

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (то есть трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам.



Для этого вспомним

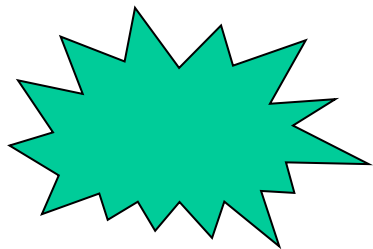
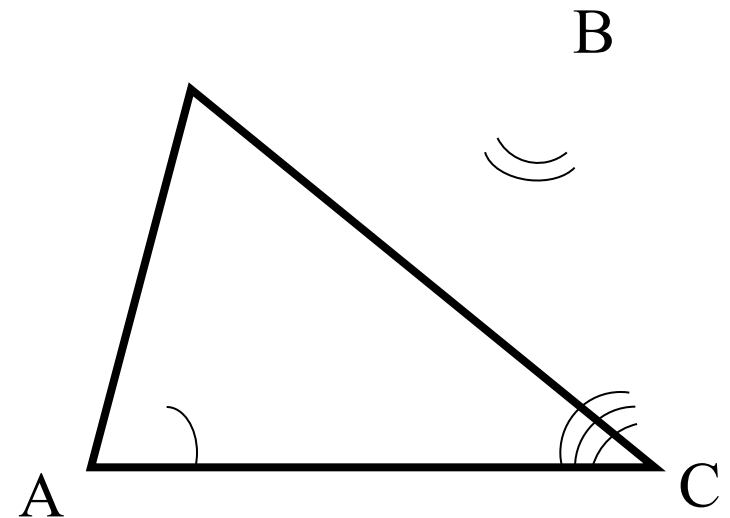
Решение данных задач основано на использовании теорем синусов и косинусов, теоремы о сумме углов треугольника и следствии из теоремы синусов: в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

Причем, при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов.

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°

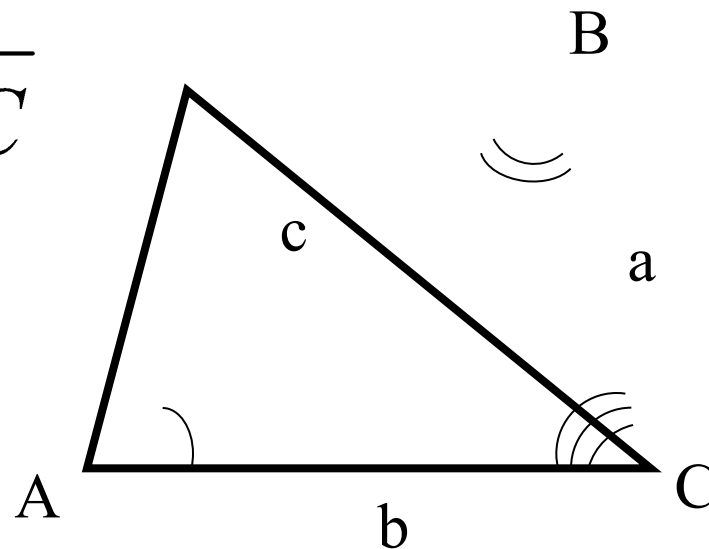
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам
противолежащих углов

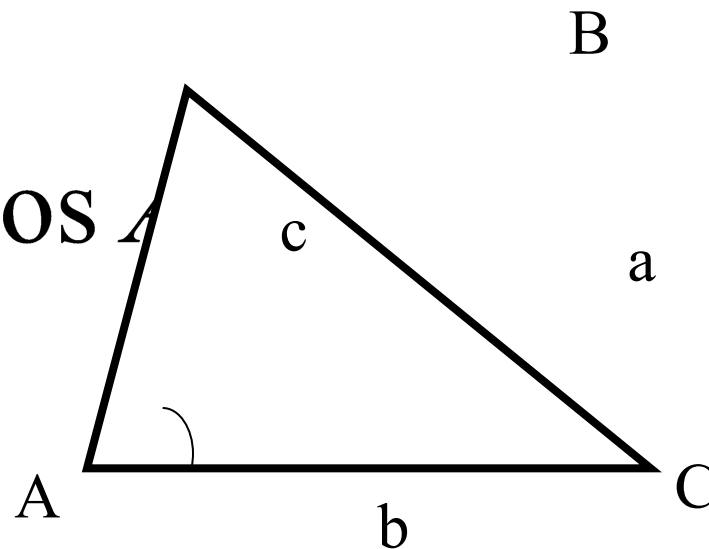
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

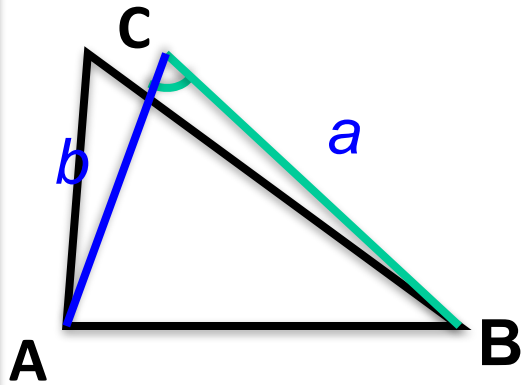
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Три задачи на решение треугольника



Решение треугольника
Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C$
по двум сторонам и углу между ними.



**Что можно
найти???**

1. AB по теореме косинусов
2. $\angle A$ и $\angle B$ по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

Решение

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma, \text{ значит}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

2) Если γ - *тупой угол*, значит α и β острые углы

Если γ – *острый угол*, то сравниваем a и b , *выбираем меньшую* и находим меньший угол (он точно острый)

Допустим это α

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}$$

$$3) \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

Задача имеет одно решение

Решаем задачу 1

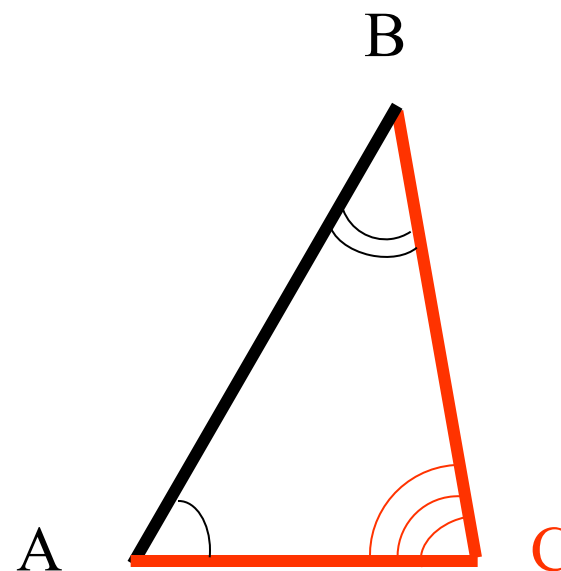
Решить треугольник ABC, если $a=6,3$ см, $b=6,3$ см, $\angle C=54^\circ$.

Дано: $\triangle ABC$, $a=6,3$ см,

$b=6,3$ см, $\angle C=54^\circ$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, c .

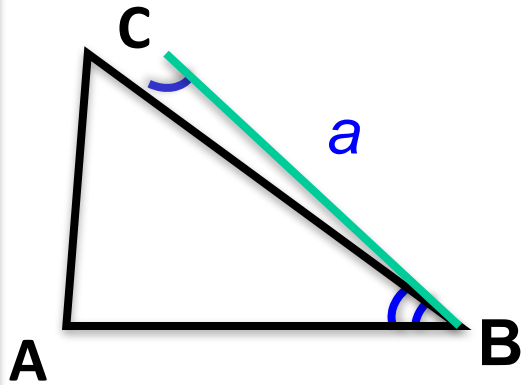
Ответ





Решение треугольника по стороне и двум прилегающим к ней

углам.
Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $\angle C$, $\angle B$



**Что можно
найти???**

1. AB по теореме косинусов
2. $\angle A$ и $\angle B$ по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

Решение:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \alpha + \beta < 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Задача имеет одно решение

Решаем задачу 2

Решить треугольник ABC, если $\angle A=60^\circ$ $\angle B=40^\circ$, c

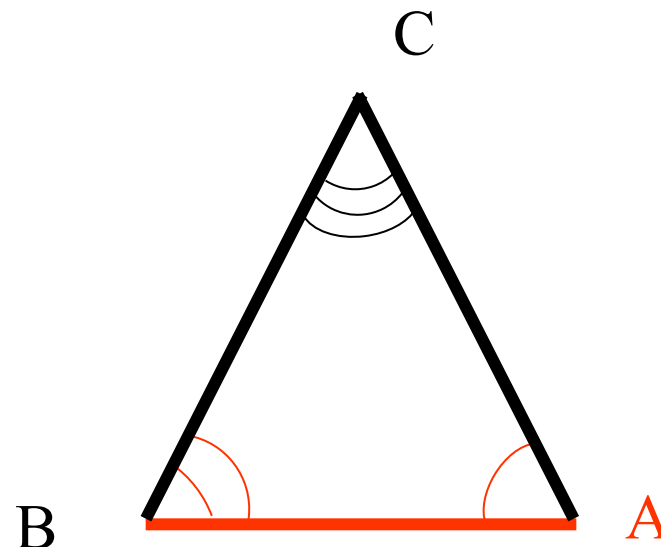
=14см.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle A=60^\circ$,

$\angle B=40^\circ$, c=14см.

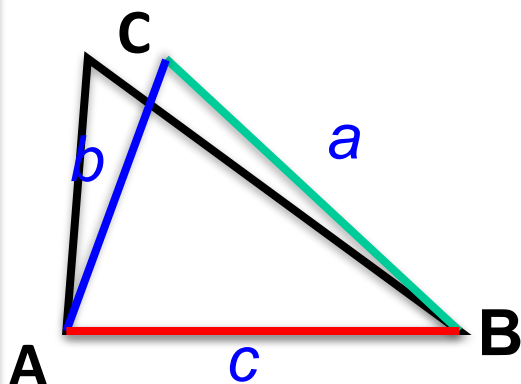
Найти: a, b, $\angle C$.

Ответ





Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
Решение: **Треугольника**
по трем сторонам.



**Что можно
найти???**

1. AB по теореме косинусов
2. $\angle A$ и $\angle B$ по теореме синусов
3. Площадь треугольника
4. Радиусы вписанной и описанной окружностей
5. Высоты треугольника

Решение

Пусть a – наибольшая сторона треугольника,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ значит}$$

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Задача имеет одно решение ₁₆

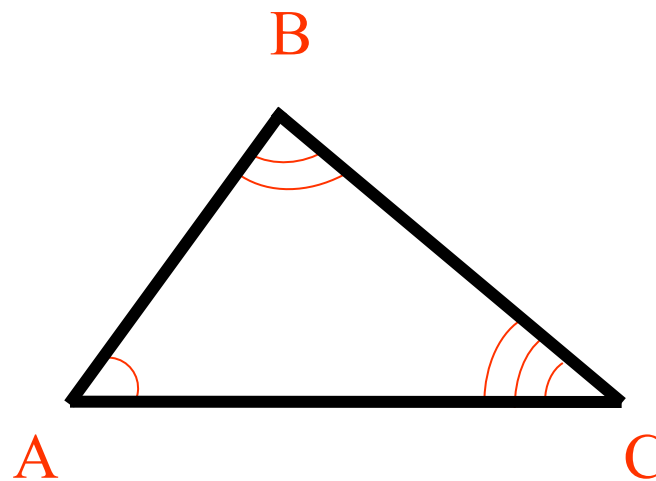
Решаем задачу 3

Решить треугольник ABC, если $a=6$ см, $b=7,7$ см, $c=4,8$ см.

Дано: $a=6$ см, $b=7,7$ см,
 $c=4,8$ см.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Ответ



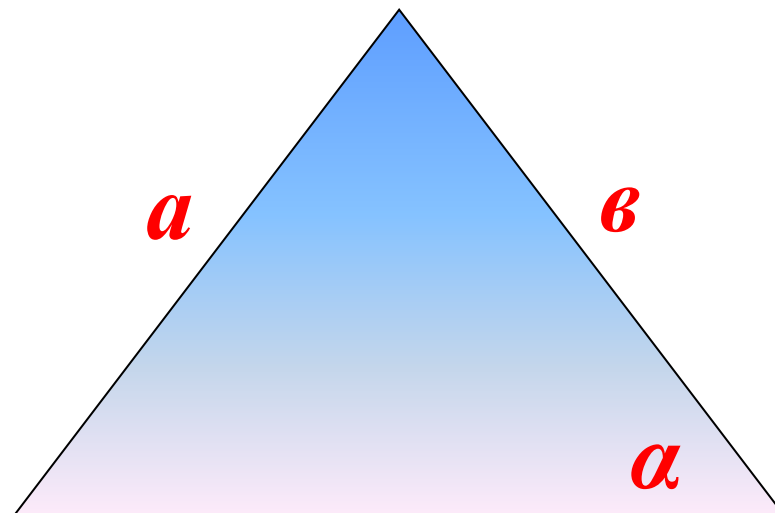
***IV тип задач
по двум сторонам и углу,
лежащему против одной из них***

Дано:

ΔABC

a, b, α

Найти: c, γ, β



Решение

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ значит } \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

1. Если **b** намного больше **a** , то $\sin \beta > 1$ и задача не имеет решений.

2. Если $\sin \beta = 1$, то $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ - \alpha$,

$$c = b \cos \alpha$$

в этом случае задача имеет единственное решение

3. Если $0 < \sin \beta < 1$, то β может быть и острым и тупым углом

Сравниваем a и b

Если $a < b$, то

существуют два угла β

β_1 -острый, значит
треугольник-
остроугольный

$\beta_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta_1)$ -тупой,
значит треугольник-
тупоугольный

$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta_1)$$

$$\gamma_2 = 180 - (\alpha + \beta_2)$$

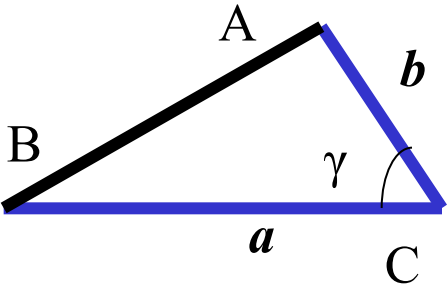
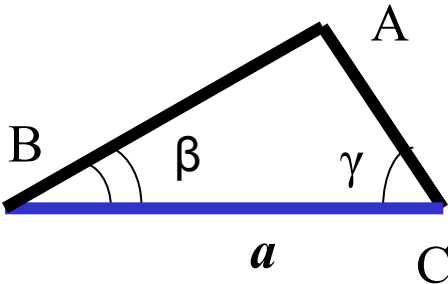
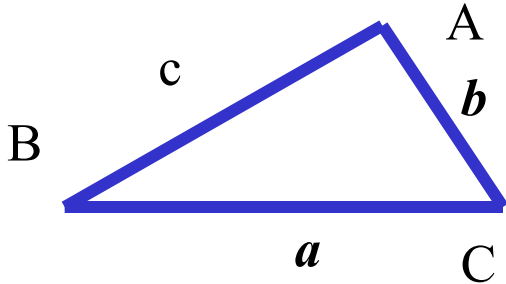
$$c_1 = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha}$$

$$c_2 = \frac{a \sin \gamma_2}{\sin \alpha}$$

В этом случае задача имеет два решения

Таблица – памятка



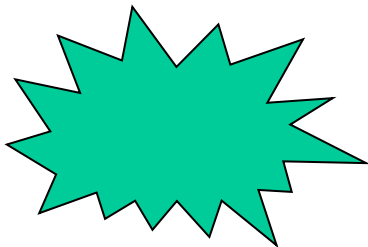
Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними	Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам	Решение треугольника по трем сторонам
		
$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$	$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$ $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$

Ответ к примеру 1

$$\angle A = 63^\circ$$

$$\angle B = 63^\circ$$

$$c \approx 5,7 \text{ см}$$

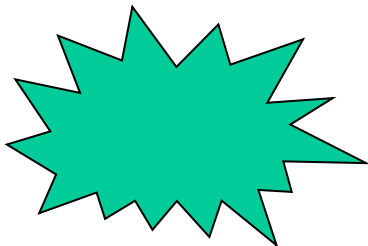


Ответ к примеру 2

$$\angle C = 80^\circ$$

$$a \approx 12,3 \text{ см}$$

$$b \approx 9,1 \text{ см}$$

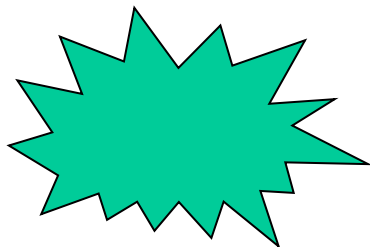


Ответ к примеру 3

$$\angle A = 54^{\circ}52'$$

$$\angle B = 84^{\circ}16'$$

$$\angle C = 40^{\circ}52'$$



Найди ошибку

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2R = \frac{\sin A}{a}$$

$$a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \alpha$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2r$$