

Волжский государственный университет водного транспорта

*Курс лекций  
по теоретической механике  
доцент каф. ПМ и ПТМ  
Гордлеева И.Ю.*

# Содержание

- **Лекция 1.** Введение. Основные понятия. Аксиомы статики. Связи и реакции связей.
- **Лекция 2.** Система сходящихся сил. Теорема о трех силах. Аналитическое определение равнодействующей сходящихся сил. Уравнения равновесия.
- **Лекция 3.** Произвольная плоская система сил. Момент силы относительно точки. Пара сил. Теоремы о парах. Метод Пуансо. Главный вектор и главный момент. Уравнения равновесия. Три формы уравнений равновесия. Теорема Вариньона.
- **Лекция 4.** Плоские фермы. Методы расчета. Метод вырезания узлов. Метод Риттера. Понятие о линиях влияния опорных реакций и усилий. Равновесие сочлененных тел. Условие равновесия рычага. Условие устойчивости тела на опрокидывание. Кинематический способ определения реакций (принцип возможных перемещений).
- **Лекция 5.** Трение скольжения. Основные законы. Способы определения коэффициента трения. Угол трения. Конус трения. Учет сил трения при решении задач на равновесие. Сопротивление при качении.
- **Лекция 6.** Произвольная пространственная система сил. Моменты силы относительно центра и оси. Связь момента силы относительно точки и момента силы относительно оси. Теоремы о парах. Сложение произвольно расположенных сил в пространстве. Главный вектор и главный момент.
- **Лекция 7.** Аналитическое определение главного вектора и главного момента. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил. Возможные случаи приведения системы. Зависимость главного момента от выбора центра приведения. Инварианты системы. Теоремы Вариньона.
- **Лекция 8.** Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил. Центр тяжести. Определение положения центра тяжести однородных тел. Центры тяжести простейших фигур. Способы определения положения центров тяжести.

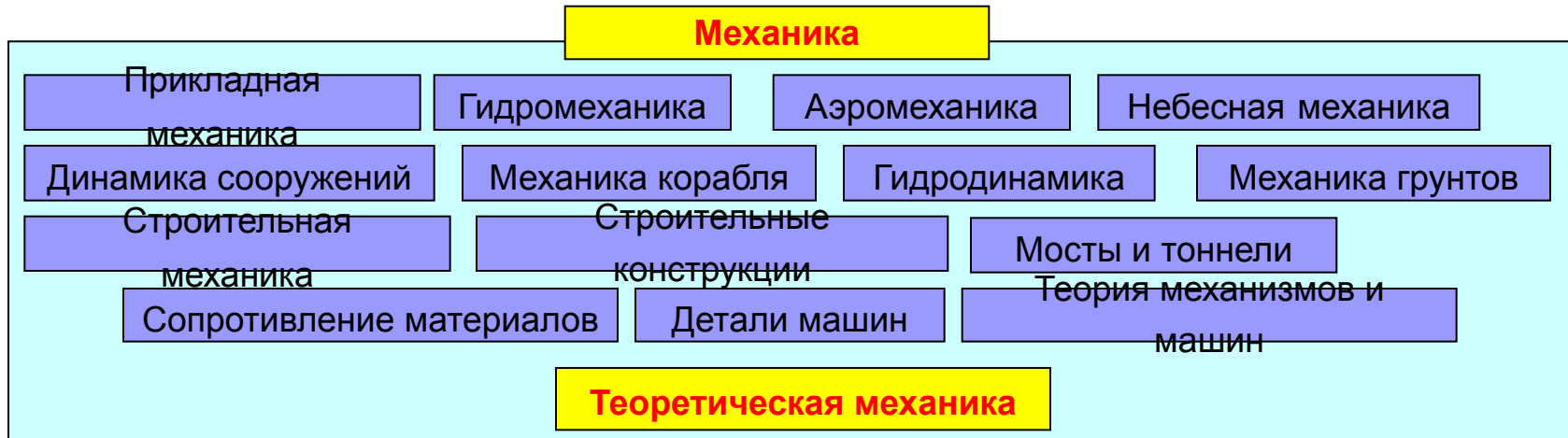
## Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.

# Лекция 1

## Введение

Под названием “механика” объединяется ряд наук, изучающих механическое движение и механическое взаимодействие твердых и деформируемых тел, а также жидких и газообразных сред.



**Механическое движение** – один из видов движения материи, выражающееся в *изменении* с течением времени *взаимных положений* тел или их частей.

**Механическое взаимодействие** – один из видов взаимодействия материи, вызывающий *изменение механического движения* тел или их частей, а также *препятствующий изменению* их взаимных положений.

**Теоретическая механика** – изучает *законы механического движения и механического взаимодействия*, общие для любых тел.

**Общность законов**, пригодность для любых тел и систем, достигается *абстрагированием* (отвлечением) от несущественных особенностей рассматриваемого тела и *выделением наиболее важных особенностей*. Именно по этому теоретическая механика является базовой наукой, на основе которой изучаются другие прикладные технические дисциплины.

**Основные абстрактные образы (модели) материальных тел и систем:**

**Материальная точка (МТ)** – не имеет размеров, но в отличие от геометрической точки обладает массой, равной массе того тела, которое изображается данной материальной точкой.

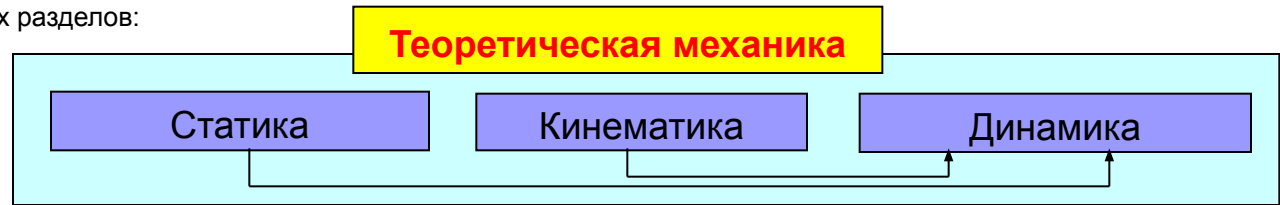
**Абсолютно твердое тело (АТТ)** – система МТ, в которой расстояние между ними не изменяются ни при каких воздействиях.

**Механическая система (МС)** – совокупность МТ или АТТ, связанных между собой общими законами движения или взаимодействия.

В зависимости от условия задачи и выбора объекта изучения одно и то же физическое тело может быть принято за МТ, АТТ или МС. Например, Земля при изучении ее движения вокруг Солнца принимается за МТ, а при изучении ее вращения вокруг собственной оси – за АТТ. При изучении явлений, происходящих на Земле (приливы и отливы, перемещения коры и т.п.), Земля рассматривается как МС.

# Лекция 1 (продолжение – 1.2)

Теоретическая механика состоит из трех разделов:



**Статика** – изучает условия относительного равновесия механических систем. Для осуществления равновесия необходимо определенное соотношение сил, поэтому в статике изучаются общие свойства сил, правила замены сил другими силами, эквивалентными с точки зрения равновесия.

**Кинематика** – изучает механическое движение без учета сил, вызывающих это движение или влияющих на него. Таким образом, устанавливаются некоторые количественные меры движения с чисто геометрической точки зрения.

**Динамика** – изучает механическое движение в связи с действующими силами на объект движения. Таким образом, изучается связь между движением и действующими силами.

## Основные понятия теоретической механики

**Сила** – мера механического взаимодействия. Сила моделируется вектором, характеризуемым направлением и величиной (модулем).

**Кинематическое состояние тела** – состояние покоя или движения с неизменными параметрами.

**Система сил** – совокупность сил, приложенных к рассматриваемому объекту.

**Равнодействующая** – сила, эквивалентная системе сил, т.е. не изменяющая кинематическое состояние.

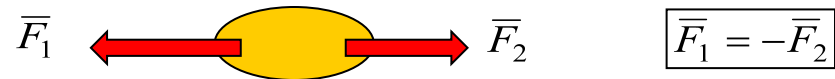
**Эквивалентная система сил** – заменяет данную систему сил без изменения кинематического состояния объекта.

**Взаимно уравновешенная система сил** – под ее действием объект находится в равновесии.

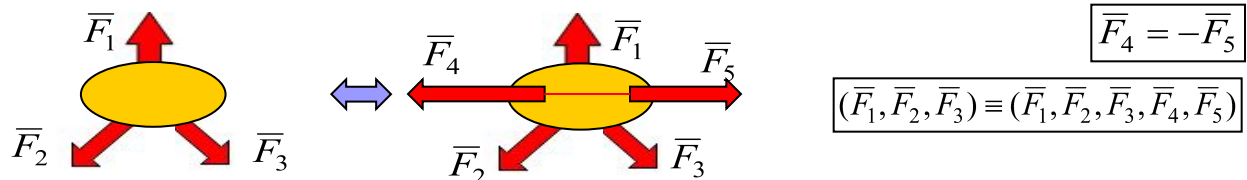
## Аксиомы статики

1. **Аксиома инерции** – Под действием взаимно уравновешенной системы сил тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

2. **Аксиома двух сил** – Если тело под действием двух сил находится в равновесии, то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Такие две силы представляют собой простейшую взаимно уравновешенную систему сил.



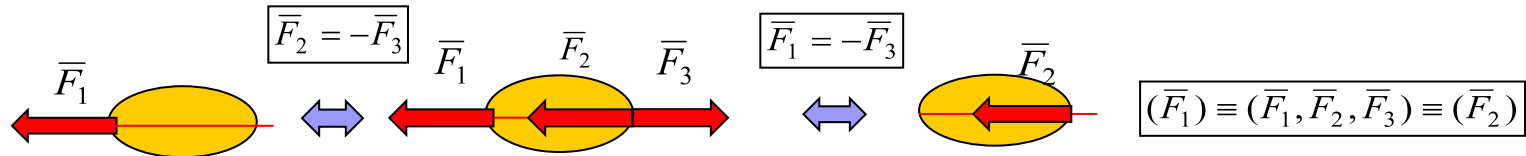
3. **Аксиома присоединения** – Если к заданной системе сил присоединить (или изъять) взаимно уравновешенную систему сил, то кинематическое состояние тела не изменится.



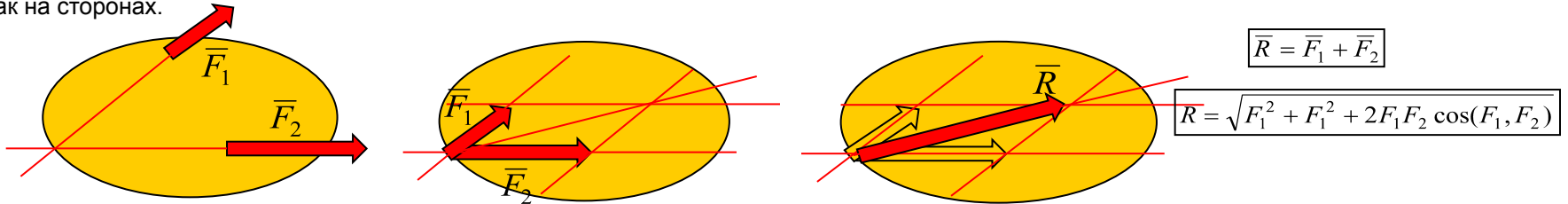
# Лекция 1 (продолжение – 1.3)

## Аксиомы статики (продолжение)

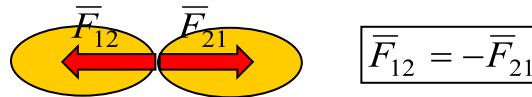
**Следствие из аксиомы присоединения** – Кинематическое состояние тела не изменится, если силу перенести по линии ее действия.



4. **Аксиома параллелограмма** – Равнодействующая двух пересекающихся сил равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.



5. **Аксиома действия и противодействия** – Всякому действию соответствует равное и противоположное противодействие (III закон Ньютона).



6. **Аксиома отвердевания** – Равновесие деформируемого тела сохраняется при его затвердевании (обратное справедливо не всегда).

## Связи и реакции связей

**Свободное тело** – свобода перемещений тела не ограничивается никакими другими телами.

**Несвободное тело** – его движение ограничено другими телами.

**Связь** – тело, ограничивающее свободу перемещений объекта.

**Реакция связи** – сила, действующая на объект со стороны связи.

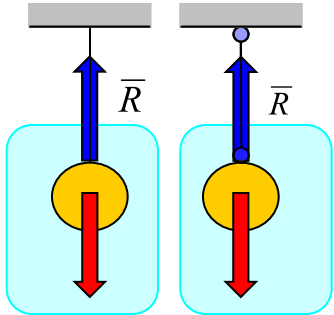
**Принцип освобожденности от связи** – несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие соответствующими реакциями.

# Лекция 1 (продолжение – 1.4)

## Связи и реакции связей (продолжение)

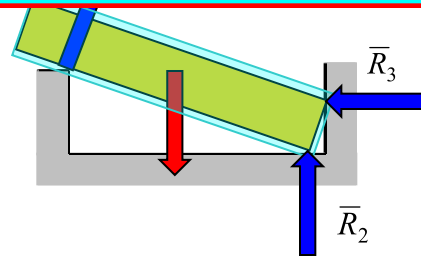
Виды связей и их реакции:

1. Нить, шарнирный стержень:



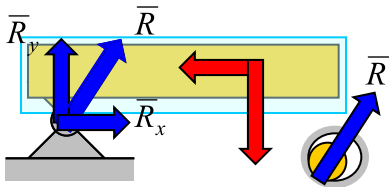
Реакция нити (стержня) направлена по нити (по стержню).

**Общее правило для связей любого вида:**  
Если связь препятствует одному или нескольким перемещениям (максимальное число перемещений – три поступательных и три вращательных), то по направлению именно этих и только этих перемещений возникают соответствующие реакции (силы и моменты).



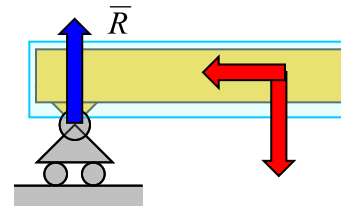
Реакция гладкой поверхности направлена перпендикулярно общей касательной плоскости, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи.

3. Неподвижный цилиндрический шарнир:



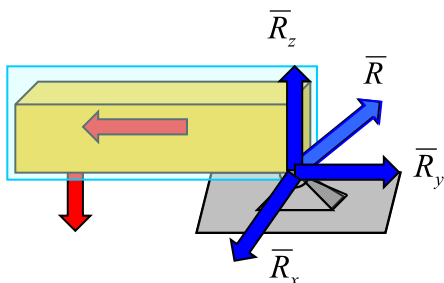
Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира  
Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие, например,  $R_x$  и  $R_y$ , параллельные координатным осям.

4. Подвижный цилиндрический шарнир:



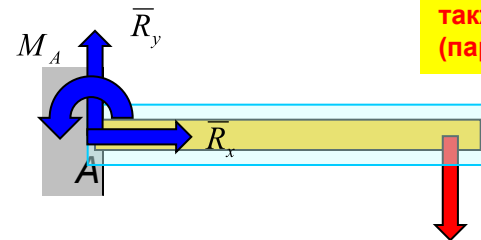
Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

5. Неподвижный сферический шарнир:



Реакция неподвижного сферического шарнира  
Реакцию неподвижного сферического шарнира можно разложить на три составляющие, например,  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ , параллельные координатным осям.

6. Жесткая плоская заделка:



В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы  $R_x$  и  $R_y$ , а также реактивный момент (пара сил)  $M_A$ .

## Лекция 2

- Система сходящихся сил – линии действия сил пересекаются в одной точке.  
План исследования любой системы сил соответствует последовательному решению трех вопросов :

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?

1. Перенесем все силы по линии их действия в точку пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

Сложим первые две силы  $F_1$  и  $F_2$  (аксиома параллелограмма).  
Количество сил уменьшилось на единицу.

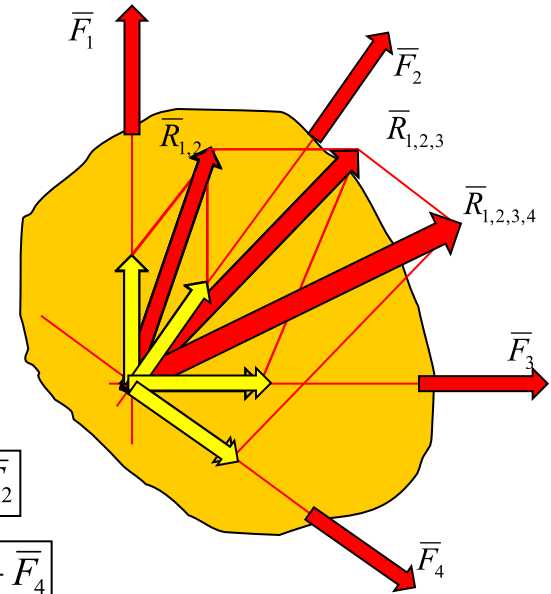
Сложим полученную равнодействующую  $R_{12}$  со следующей силой  $F_3$ .  
Количество сил вновь уменьшилось на единицу.

Повторим эту же операцию со следующей силой  $F_4$ .  
Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил.

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

$$\bar{R}_{1,2,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{F}_3$$

$$\bar{R}_{1,2,3,4} = \bar{R}_{1,2,3} + \bar{F}_4$$



Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением **силового треугольника** – выбирается одна из сил или изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, **совпадающим с концом предыдущей силы**.

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил.

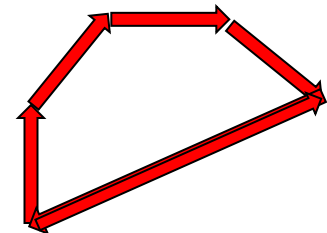
2. **Простейший вид системы** – сила, приложенная в точке пересечения исходных сил. Таким образом, сходящаяся система сил приводится к одной силе – **равнодействующей** (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил системы.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 + \dots = \sum \bar{F}_i$$

3. Если равнодействующая системы оказывается не равной нулю, тело под действием такой системы силы будет двигаться в направлении равнодействующей (система сил не уравновешена). Для того, чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). Таким образом, **условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль**.

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0$$

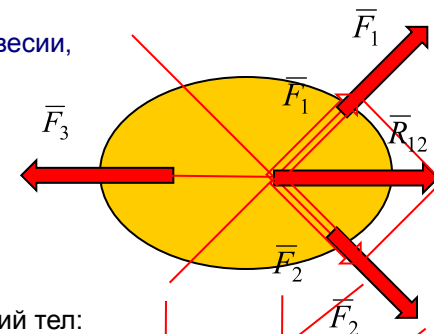
Это условие эквивалентно замкнутости силового треугольника определенным образом, а именно, **направление всех сил при обходе по контуру не изменяется по направлению**:



## Лекция 2 (продолжение – 2.2)

- **Теорема о трех силах** – Если тело, под действием трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

1. Перенесем две силы по линии их действия в точку их пересечения (кинематическое состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).
2. Сложим эти силы (аксиома параллелограмма). Теперь система состоит всего из двух сил. А такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и направлены по одной линии в противоположные стороны. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

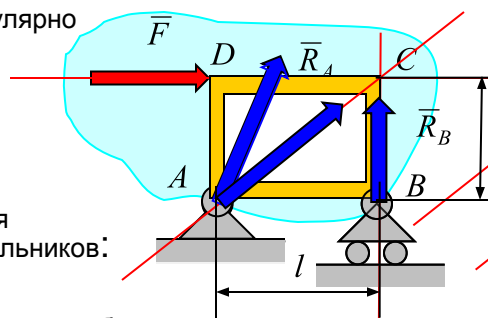


Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел:

Реакция подвижного шарнира  $R_B$  направлена вертикально (перпендикулярно опорной плоскости). Направление (угол наклона к горизонту) реакции неподвижного шарнира  $R_A$  пока не определено.

Если тело под действием трех сил  $F$ ,  $R_A$  и  $R_B$  находится в равновесии, то все три силы должны пересекаться в одной точке ( в точке C ) :

Действительные направления и величины реакций легко определяются построением силового треугольника и использованием подобия треугольников:



$$\frac{R_B}{F} = \frac{h}{l}$$

$$R_A = \sqrt{F^2 + R_B^2}$$

- **Аналитическое определение равнодействующей** –

Каждая из сил, геометрическая сумма которых дает **равнодействующую**, может быть представлена через ее проекции на координатные оси и единичные векторы (орты):

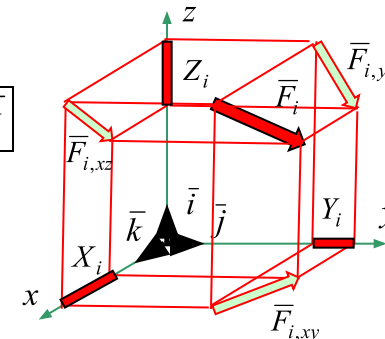
$$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}$$

Тогда равнодействующая выражается через проекции сил в виде:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} + X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} + \dots$$

Группировка по ортам дает выражения для проекций равнодействующей:

$$\vec{R} = (X_1 + X_2 + \dots) \vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \dots) \vec{j} + (Z_1 + Z_2 + \dots) \vec{k} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$



Отсюда проекции равнодействующей :

$$R_x = \sum X_i;$$

$$R_y = \sum Y_i;$$

$$R_z = \sum Z_i;$$

Направляющие косинусы равнодействующей :

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R};$$

$$\cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R}.$$

Модуль равнодействующей :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

- **Уравнения равновесия сходящейся системы сил**

**Условие равновесия:**  
Равнодействующая должна обращаться в ноль:

$$\vec{R} = 0$$

Отсюда **уравнения равновесия** :

$$\sum X_i = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$\sum Z_i = 0.$$