Упругие волны

Упругой волной называют процесс распространения возмущения в упругой среде

Различают волны продольные и поперечные, в зависимости от того, движутся ли частицы около своих положений равновесия вдоль или поперек направления распространения волны.

Уравнение волны

Уравнение волны, распространяющейся в положительном направлении оси *X*.

$$\xi(x,t) = f(t - x/v). \qquad (1)$$

Волна , распространяющаяся в отрицательном направлении *X*, описывается уравнением

$$\xi(x,t) = f(t + x/v). \qquad (2)$$

Уравнение гармонической волны имеет вид

$$\xi(x,t) = a\cos\omega(t - x/v),$$

a — амплитуда волны , ω— циклическая (круговая) частота колебаний частиц среды ($с^{-1}$).

$T = 2\pi/\omega.$ – период колебаний

Расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний - длина волны

$$\lambda = vT.$$

Уравнение гармонической волны принято записывать в симметричном более удобном и простом виде.

$$\xi = a\cos(\omega t - kx).$$

k - волновое число , $k = 2\pi/\lambda.$

С учетом поглощения уравнение волны имеет вид:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx).$$

Уравнение плоской волны

В плоской волне волновые поверхности(где точки среды колеблются в одинаковой фазе) имеют вид плоскостей. Если плоская волна распространяется вдоль оси X, то ее волновые поверхности (плоскости) перпендикулярные этой оси.

Если же плоская волна распространяется в произвольном направлении, характеризуемом единичным вектором ***n*** , то

$$\xi = f(t - l/v) = f(t - \mathbf{rn}/v),$$

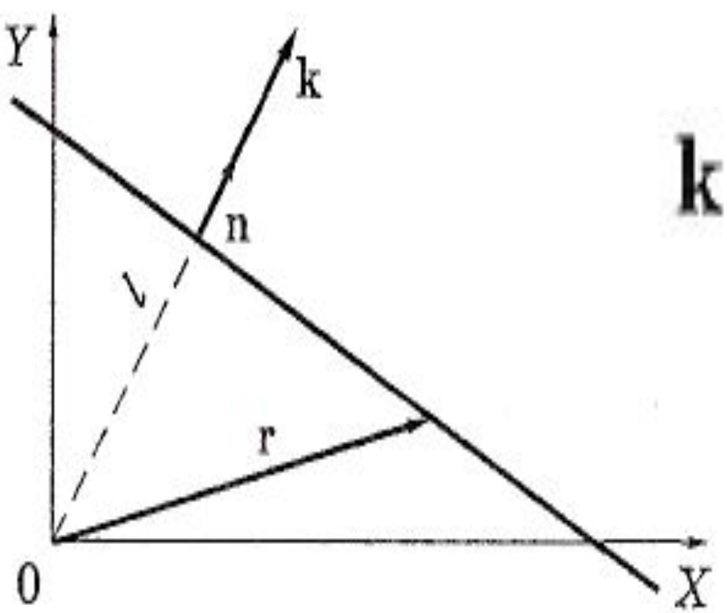
$$\mathbf{rn} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

α,β,γ — углы между вектором ***n*** и осями координат.

Для плоской гармонической волны

$$\cos\omega(t - \mathbf{nr}/v) = \cos(\omega t - \mathbf{rn}\omega/v)$$

и $$\xi = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}),$$



$$\mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{n} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n}.$$

Сферическая волна.

В однородной изотропной среде продольная волна от точечного источника представляет собой сферически расходящееся возмущение вида

$$\xi = \frac{1}{r} f(t - r/v),$$

Волновые поверхности являются сферическими.

Если источник возбуждает продольные монохроматические колебания, то это уравнение принимает вид

$$\xi = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr),$$

r— расстояние от точечного источника.

Цилиндрическая волна

Цилиндрическая волна расходится от источников, равномерно распределенных вдоль оси в однородной среде.

Структура цилиндрической волны значительно сложнее сферической, и ее форма не повторяет временного поведения функции источника, как в случае сферической, — волна тянет за собой длинный «шлейф».

Монохроматическая расходящаяся волна на расстояниях R, значительно превышающих ее длину волны, имеет вид

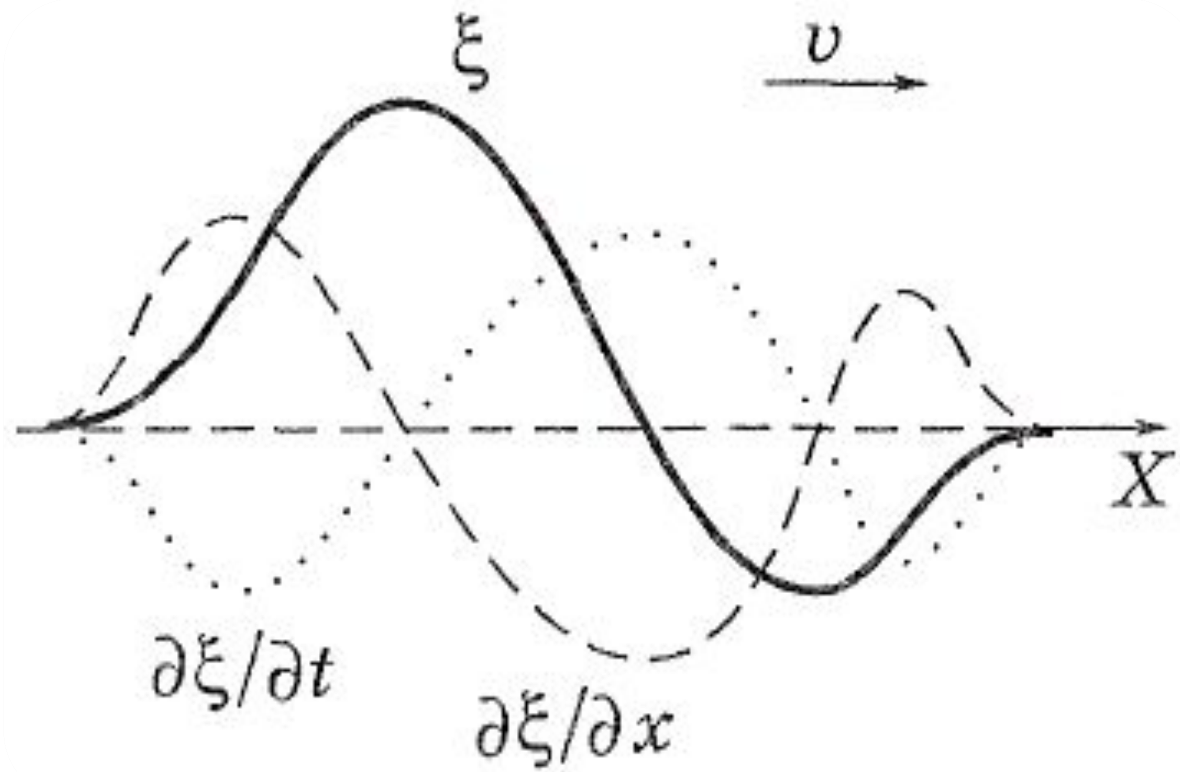
$$\xi = \frac{a}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR),$$

Волновые уравнения

Для волновых процессов, существуют уравнения, являющиеся обобщенным выражением волн, независимо от их конкретного вида.

Для волн типа $\xi = f(t - x/v)$.

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t},}$$



$\partial\xi/\partial t = u_x$ —проекция скорости частицы среды, движущейся около своего положения равновесия

$\partial\xi/\partial x = \varepsilon$ — относительная деформация среды.

Общее волновое уравнение

Это уравнение справедливо для волны любого направления, а также и для суперпозиции таких волн.

После дифференцирования выражения

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{\partial \xi}{\partial t},}$$

по t и по x, получим

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.}$$

Это одномерное волновое уравнение 2-го порядка в частных производных. Ему удовлетворяют как возмущения вида

$$\xi(x,t) = f(t - x/v) \quad \text{и} \quad \xi(x,t) = f(t + x/v).\,,$$

так и более общее решение

$$\xi = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v),$$

f_1 и f_2 — произвольные функции, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположных направлениях оси X.

Для трехмерного случая волновое уравнение имеет вид

$$\boxed{\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},}$$

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Одномерное волновое уравнение при наличии затухания

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} + \gamma^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

γ - коэффициент затухания волны.

Скорость упругих волн

1.Скорость волны в тонком стержне

При малых продольных деформациях стержня в стержне будет распространяться продольная волна , описываемая волновым уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Сопоставляя полученное выражение с $\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$,

определяем скорость распространения волны v

$$v = \sqrt{E/\rho}.$$

Скорость поперечных упругих волн в неограниченной изотропной твердой среде

$$v = \sqrt{G/\rho},$$

G — модуль сдвига среды, ρ -плотность среды

2.Скорость звука в жидкостях и газах

$$v = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

скорость звуковой волны в газе – $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$

или $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ $\gamma = C_p/C_V$

Энергия упругой волны

Плотность потенциальной энергии упругой волны

$$w_{\text{п}} = E\varepsilon^2/2.$$

Плотность полной энергии

$$w = w_{\text{к}} + w_{\text{п}} = \rho\,\dot{\xi}^2/2 + E\varepsilon^2/2.$$

Для тонкого стержня $E = \rho v^2,$

и выражение для полной энергии

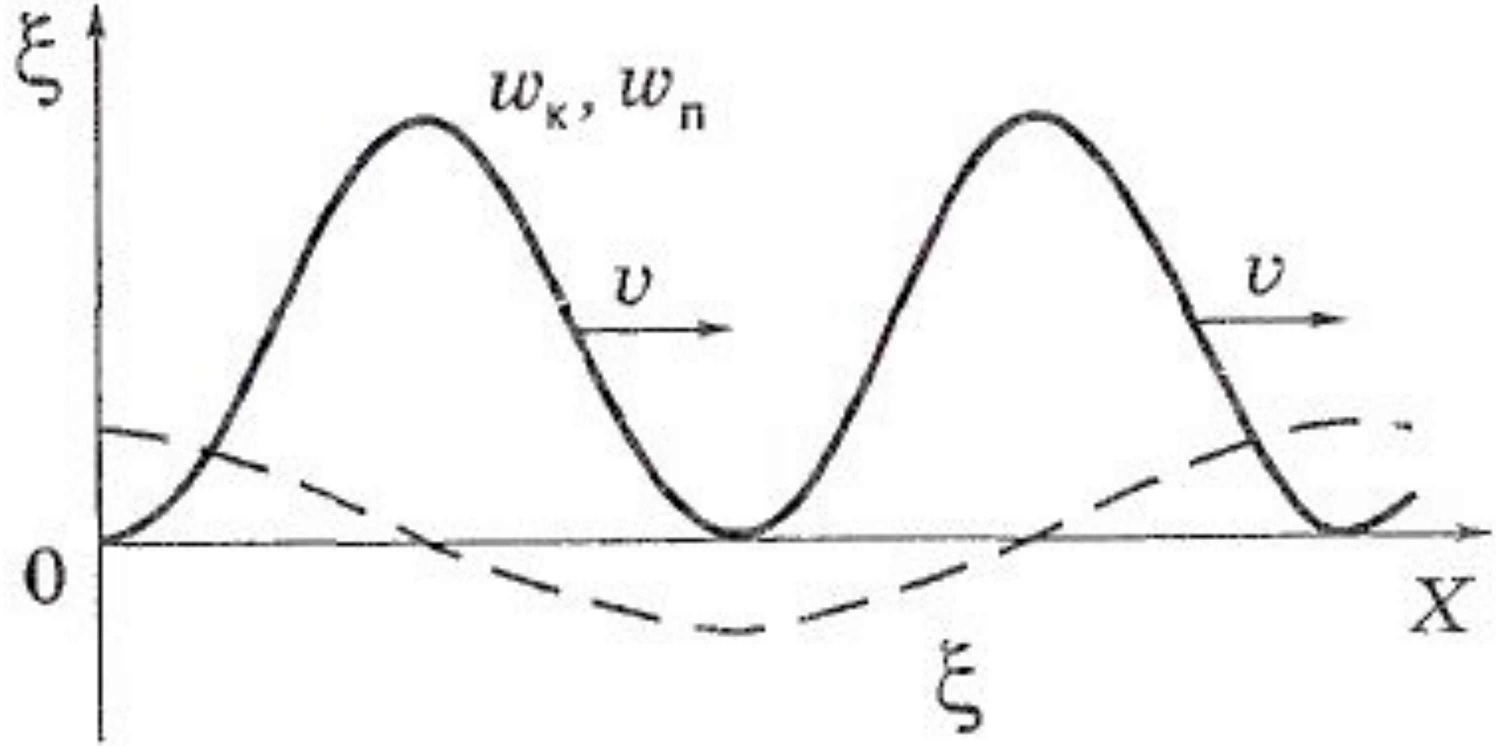
$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right].$$

или

$$w = \rho\,\dot{\xi}^2.$$

Для гармонической волны $\xi = a\cos(\omega t - kx)$

$$w = \rho a^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$



Поток энергии − количество энергии, переносимое волной через поверхность S в единицу времени:

$$\Phi = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t,$$

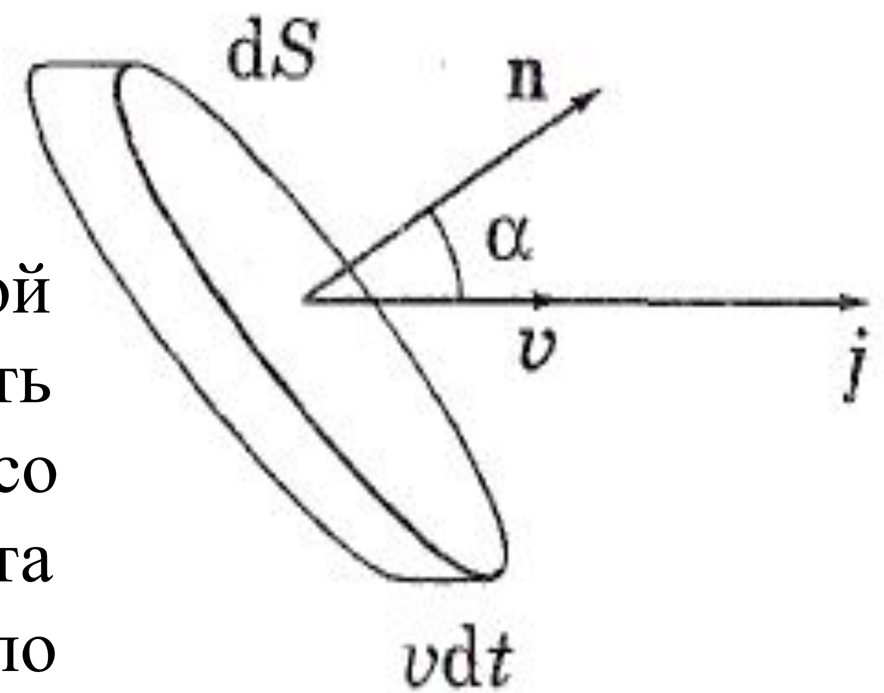
Плотность потока энергии - это поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную к направлению переноса энергии: $j = d\Phi/dS_{\perp},$

dW — энергия, заключенная внутри косого цилиндра с основанием площадью dS и образующей длиной $\upsilon\, dt$,
υ — скорость переноса энергии (возмущения).

$$\mathrm{d}W = w\upsilon\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S\cos\alpha = w\upsilon\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S_{\perp}.$$

Для определения плотности потока энергии волны и его направления вводят вектор Умова $\vec{j}$.

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v},$$



В случае монохроматической волны вектор $\boldsymbol{j}$, как и плотность энергии, изменяется со временем по закону квадрата синуса. Поэтому среднее по времени значение вектора Умова

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}.$$

формула $\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}.$

справедлива для волн любого вида — плоской, сферической, цилиндрической, затухающих и др.

Среднее по времени значение плотности потока энергии называется интенсивностью волны:

$$I = \langle j \rangle.$$

Зная вектор Умова, во всех точках поверхности *S* можно найти поток энергии сквозь эту поверхность.

$\Phi = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \int_S j_n\, dS,$ – поток энергии равен потоку вектора ***j*** сквозь эту поверхность S.

Для суперпозиции нескольких продольных волн вектор Умова имеет вид:

$$\mathbf{j} = -\sigma \mathbf{u},$$

σ — напряжение (или избыточное давление),

u — скорость частиц среды (не скорость волны!).

Стоячие волны

При распространении в упругой среде одновременно нескольких волн возникает их наложение.
Колебания частиц среды оказываются векторной суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.
Это называют *принципом суперпозиции (наложения) волн*.

Волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющиеся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами, называются ***стоячими***.

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx); \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Суперпозиция этих волн дает уравнение стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos kx \cdot \cos \omega t,$$

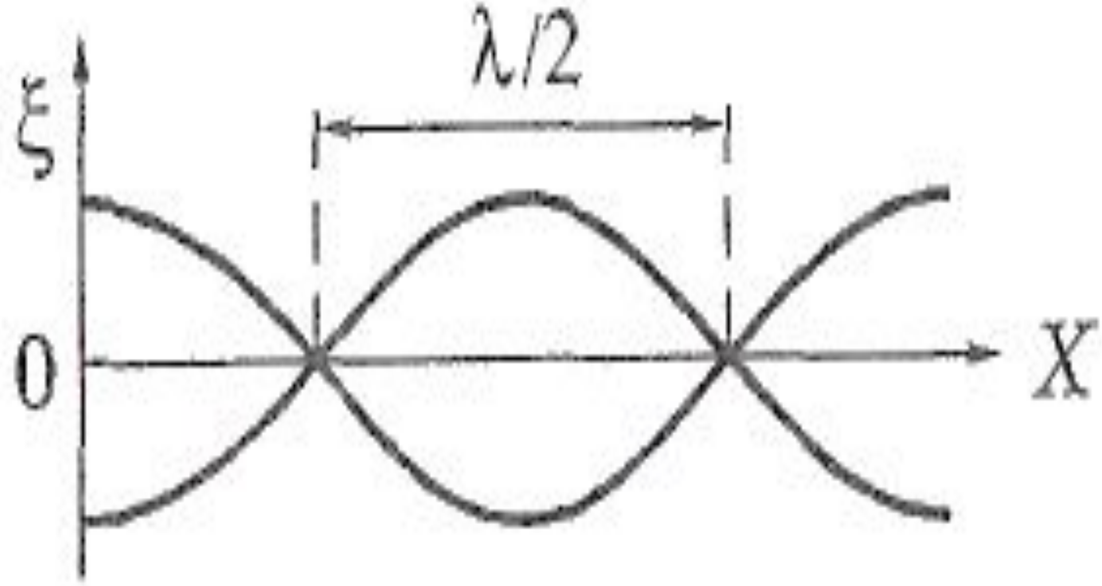
$$A = 2a.$$

Амплитуда равна $|A \cos kx|$ и зависит от x.

В точках, для которых $|\cos kx| = 1,$
это максимумы амплитуды — *пучности*,
а где $\cos kx = 0,$ — минимумы —*узлы*.

Интервалы между соседними пучностями или узлами равны половине длины волны

$$\Delta x = \pi/k = \lambda/2.$$



Энергия стоячей волны

Передачи движения из одной области к другой, а значит и *перетекания энергии через узлы в стоячей волне не происходит*.

Нет распространения возмущения среды вдоль оси *X*.

Поэтому возмущения, описываемые формулой,

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos kx \cdot \cos \omega t,$$

называют *стоячей волной*.

$\dot{\xi} = -A\omega \cos kx \cdot \sin \omega t,$ – скорости частиц $\dot{\xi}$

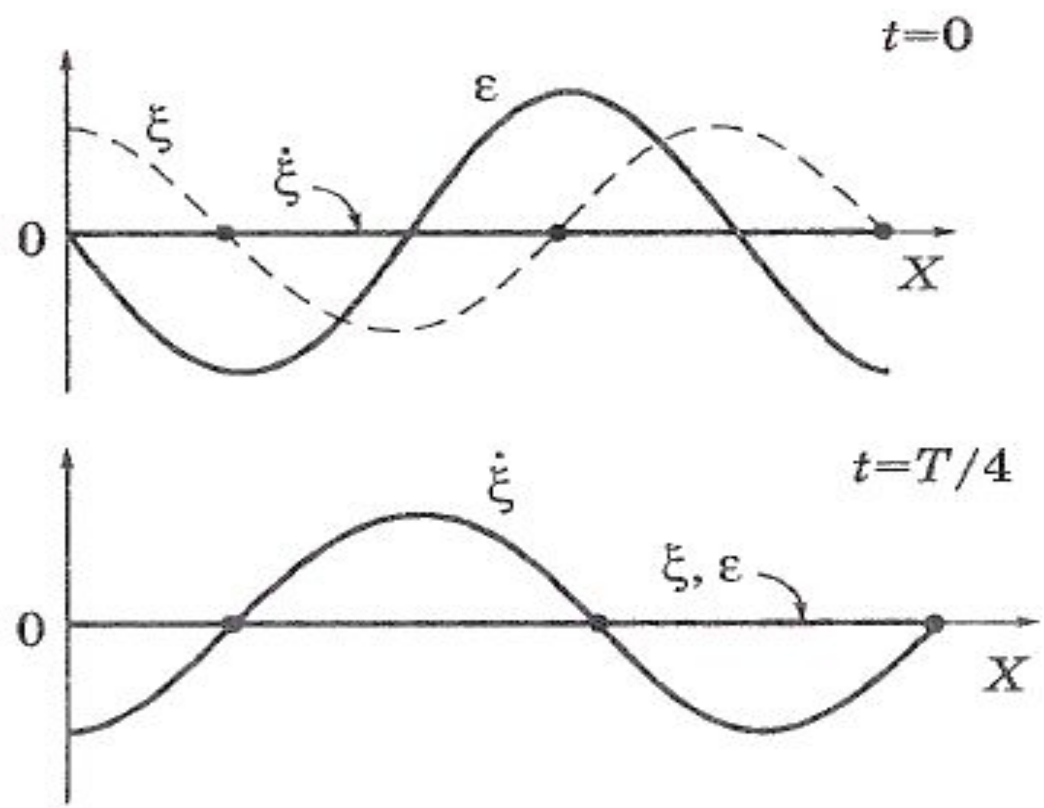
$\varepsilon = -Ak \sin kx \cdot \cos \omega t.$ - относительные деформации

$$\varepsilon = \partial\xi / \partial x;$$

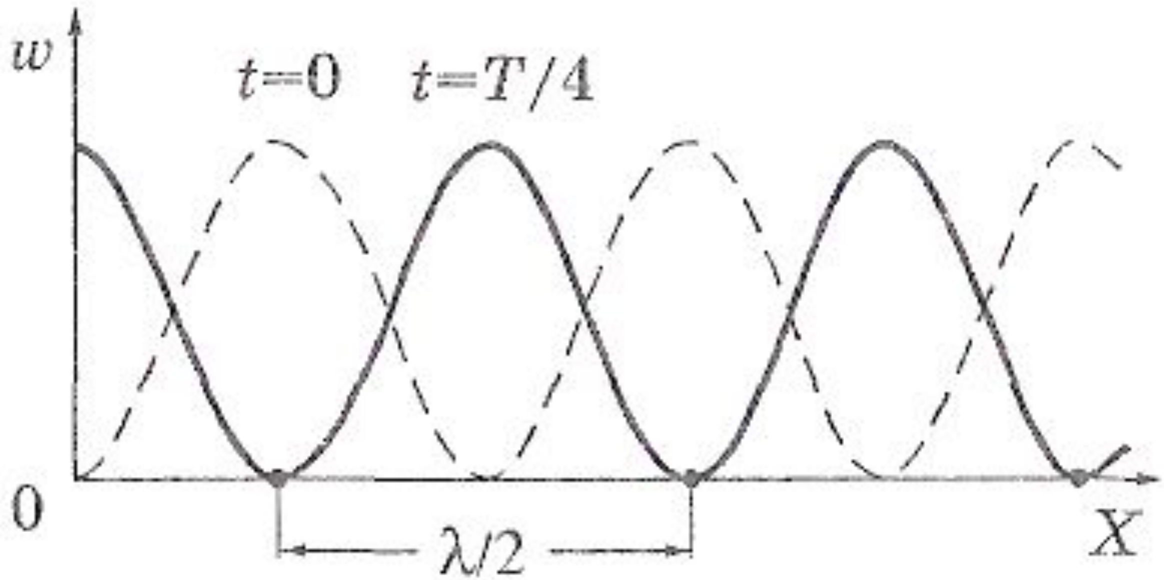
$\dot{\xi}$ и ε, - стоячие волны, причем они сдвинуты относительно друга друга по фазе на $\pi/2$

Узлы и пучности скорости $\dot{\xi}$ частиц среды совпадают с узлами и пучностями их смещения ξ.

Узлы и пучности ε деформации совпадают соответственно с пучностями и узлами смещения



В стоячей волне происходят превращения энергии: то полностью в потенциальную (упругую), то полностью в кинетическую (аналогичное происходит при колебаниях маятника).



В процессе колебаний происходит перетекание энергии от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии в любом сечении стоячей волны равен нулю.