Многомерные случайные величины

Пример 1. Координаты попадания в мишень *(X, Y)*. Двумерная непрерывная случайная величина.

Пример 1. Осколок, образовавшийся при разрыве снаряда характеризуется весом P, максимальным размером L, начальной скоростью $\vec{V}\left(V_x, V_y, V_z\right)$. Можно ввести случайную величину $\left(P, L, V_x, V_y, V_z\right)$.

Определение. Упорядоченный набор $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$ одномерных случайных величин $X_i\ (i = 1, \dots, n)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω называется n- мерной случайной величиной или системой случайных величин.

Матрица распределения

Y X			…	
…				

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=1$$ условие нормировки

$$P(X = x_k) = p_{xk} = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}$$ сумма элементов k-го столбца

X			...	
			...	

$$P(Y = y_l) = p_{yl} = \sum_{i=1}^{n} p_{li}$$ сумма элементов l-й строки

Y			...	
			...	

Функция распределения системы непрерывных случайных величин

Определение. Функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 <, x_2, \dots, X_n < x_n)$$

называется функцией распределения системы случайных величин $(X_1,\ X_2, \dots, X_n)$.

Для двумерной случайной величины *(X,Y)*

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Свойства $F(x, y)$

1. $0 \le F(x, y) \le 1$

2. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$

Вероятность невозможных событий

3. $F(+\infty, +\infty) = 1$

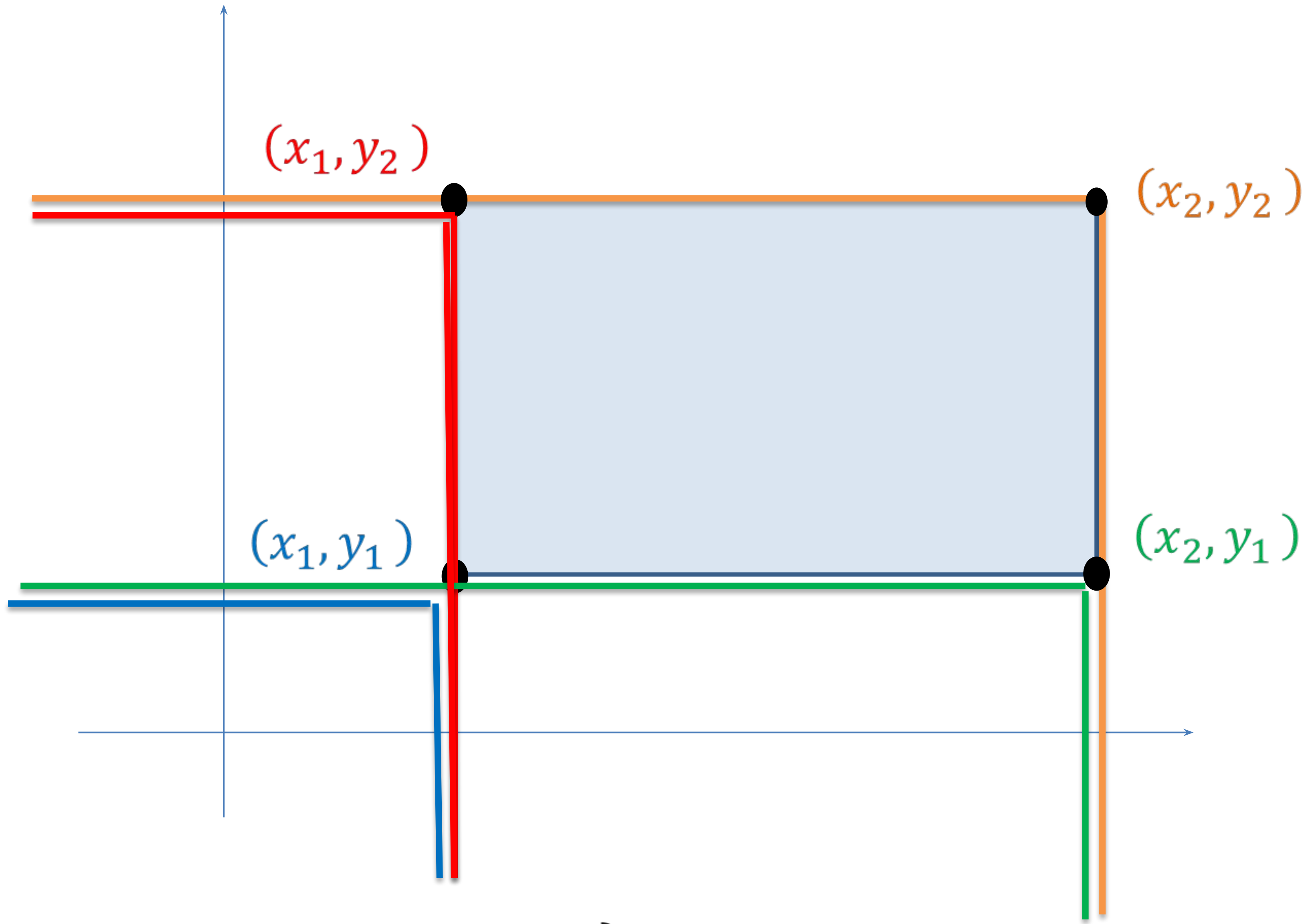
Вероятность достоверного события

4. $\lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F_1(x) = P(X < x, Y < +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F_2(y) = P(X < +\infty, Y < y)$

4. Функция $F(x, y)$ является неубывающей по каждому из аргументов при фиксированном втором

5. Из определения функция $F(x, y)$ можно найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник D со сторонами параллельными осям координат



$$P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\}$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

Пример 1. Задана функция распределения $F(x,y)$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } y<0\\ 1-5^{-x}-5^{-y}+5^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0.\end{cases}$$

Найти $F_1(x)$ и $F_2(y)$.

Пример 2. Задана функция распределения $F(x,y)$

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } y<0\\ 1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\geq 0, y\geq 0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания точки (X,Y) в квадрат, ограниченный прямыми $\mathrm{x}=1$, $\mathrm{x}=2$, $\mathrm{y}=1$, $\mathrm{y}=2$.

Плотность распределения вероятностей системы непрерывных случайных величин

Определение. Если существует неотрицательная функция $f(x,y)$ такая, что функцию распределения $F(x,y)$ при любых значениях x и y можно представить в виде

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x',y')\,dx'\,dy'$$

то $f(x,y)$ называют **плотностью распределения вероятностей**

Свойства $\boldsymbol{f(x,y)}$

1. Из определения следует, что $f(x,y) \geq 0$

2. Если $f(x, y)$ непрерывна в точке *(x, y)*, то

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

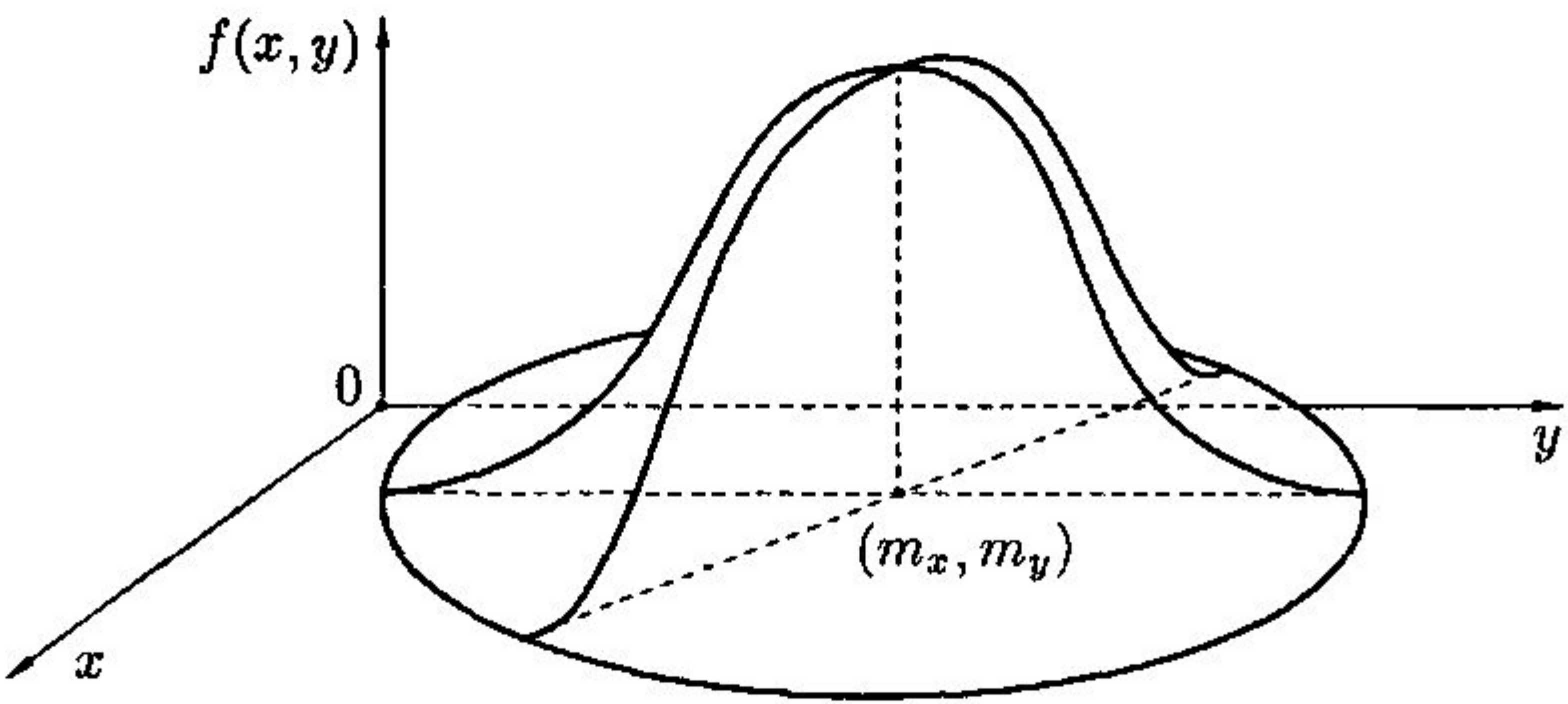
3. Вероятность попадания случайной точки *(X,Y)* в область *D* определяется выражением

$$P\{(X, Y) \epsilon D\} = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

4. Т.к. $F(+\infty, +\infty) = 1,$ то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Геометрически плотность вероятностей *f(x,y)* можно изобразить в виде некоторой поверхности



Вероятность попадания случайной точки *(X,Y)* в прямоугольник D со сторонами параллельными осям координат

$$P\{(X,Y)\epsilon D\} = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy$$

Пример 1. Двумерная случайная величина имеет плотность вероятностей

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Найти функцию распределения $F(x,y)$ и вероятность попадания в квадрат

Пример 2. Равномерное распределение имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} C, (x,y) \epsilon D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$$

Найти постоянную C из условия нормировки.

Законы распределения отдельных величин входящих в систему. Условные законы распределения.

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y')\, dx'\, dy'$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x', y')\, dx'\, dy'$$

$$f_1(x) = F'_x(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

$$f_2(y) = F'_y(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

Определение. Условным законом распределения случайной величины X входящей в систему *(X,Y)* называется ее закон распределения вычисленный при условии, что другая случайная величина Y приняла определенное значение y .

Обозначения: $F(x|y)$– условная функция распределения $f(x|y)$–условная плотность вероятностей

Пример 2. Система случайных величин L и P представляет собой длину и вес осколка снаряда .

Можно показать, что $F(x|Y=y)=\frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$

$$f(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y|X=x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Определение. Случайные величины называются независимыми, если
$F(x,y)=F_1(x)F_2(y)$, т.е. $F_2(y)=F(y|X=x)$

Теорема. Для того, чтобы случайные величины были независимыми, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

В случае независимых случайных величин

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

Пример . Система случайных величин X и Y имеет плотность вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, (x, y)\epsilon D \\ 0, (x, y) \notin D \end{cases}$$

D — треугольник, ограниченный осями координат и прямой $y = 1 - x$. Найти $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Определение. Начальным моментом порядка k, s системы непрерывных случайных величин (X,Y) называется

$$\alpha_{k,s}[X,Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy$$

В предположении, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |x^s||y^s|\, x^k f(x,y)dxdy$$

абсолютно сходится.

В случае дискретной случайной величины

$$\alpha_{k,s}[X,Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^s p_{ij}$$

в предположении, что ряд в правой части сходится абсолютно.

$$m_1[X] = \alpha_{1,0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx$$

$$m_1[Y] = \alpha_{0,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)\,dy$$

Определение. Смешанным центральным моментом порядка k, s системы непрерывных случайных величин (X,Y) называется

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X])^k (y - m_1[Y])^s f(x,y) dxdy$$

в предположении, что интеграл в правой части сходится абсолютно

$$\mu_{2,0} = D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X])^2 f_1(x) dx$$

$$\mu_{0,2} = D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_1[Y])^2 f_2(y)\, dy$$

Определение. Смешанный центральный момент второго порядка системы непрерывных случайных величин (X,Y) называется ковариацией

$$\mu_{1,1} = cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_1[X])\ \ (y - m_1[Y])\ \ f(x,y)dxdy$$

В случае дискретной случайной величины

$$\mu_{1,1} = cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_1[X])\ \ (y_j - m_1[Y])p_{ij}$$

Отношение $r_{XY} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

называется коэффициентом корреляции

Теорема. Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю

Эквивалентно ли понятие некоррелированности случайных величин их независимости ???

Пример 1. Плотность распределения случайных величин *(X,Y)* выражается формулой

[illegible]

Найти ковариацию.

Можно доказать, что $|r_{XY}| \le 1$ или $-1 \le r_{XY} \le 1$

Пример 2 Вес и рост человека связаны положительной корреляцией.

Пример 3. Производится два выстрела по цели; точка попадания первого выстрела регистрируется, и в прицел вводится поправка, пропорциональная ошибке первого выстрела с обратным знаком. Координаты точек попадания первого и второго выстрелов будут связаны отрицательной корреляцией.

Определение. Условным математическим ожиданием случайной величины X называется

$$m_1[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|Y=y)\,dx$$

Аналогично можно определить условное математическое ожидание случайной величины Y

$$m_1[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|X = x)dy$$

Функции регрессии

$$\varphi(x) = m_1[Y|X = x]$$

$$\psi(y) = m_1[X|Y = y]$$

Графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ называются линиями регрессии

Определение. Условной дисперсией случайной величины X называется

$$D[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X|Y=y])^2 f(x|Y=y)dx$$

Аналогично

$$D[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_1[Y|X=x])^2 f(y|X=x)dy$$

Функции двух случайных величин

Математическое ожидание функции нескольких случайных величин

Задана плотность вероятностей $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Нужно найти математическое ожидание случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Можно доказать, что

$$m_1[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной c $m_1[c]$=c

2. Математическое ожидание $Y = aX + b$

Ранее мы нашли, что $m_1[aX + b\ ] = am_1[X] + b$

3. Среднее суммы двух случайных величин $Z = aX_1 + bX_2$

$$m_1[aX_1 + bX_2] = am_1[X_1] + bm_1[X_2]$$

В общем случае, если $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$

$$m_1[Y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_1\,[X_i]$$

4. Среднее произведения двух случайных величин $Z = XY$!!!

$$m_1[XY] = m_1[X_1]m_1[Y] + cov(X,Y)$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной c $D(c)=0$

2. Дисперсия $Y = aX + b$

Ранее мы нашли, что $D(Y) = a^2 D(X)$

3. Для любых случайных величин, имеющих конечную дисперсию, справедливо соотношение

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X,Y)$$

В общем случае, если $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 D(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j)$$

4. Для любых случайных величин X и Y, имеющих конечную дисперсию, справедливо соотношение

$$D(XY) = D(X)D(Y) + {m_1}^2(X^2)D(Y) + {m_1}^2(Y^2)D(X)$$

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X распределенной по биномиальному закону.

Пусть X в рассматриваемой схеме обозначает число появлений события A в серии из n опытов при постоянной вероятности $p = P(A)$.

Введем случайные величины X_i число наступлений события А в i-ом опыте, $i=1,2, \ldots, n$

Тогда X=$\sum_{i=1}^{n} X_i$

Ряд распределения X_i

	0	1
	1-p	*p*

$m_1[X_i]$=*p* $\qquad$ *D*$[X_i]$=*p(1-p)*

$$m_1[X] = m_1\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = np$$

$$D[X]=D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=np(1-p)$$

Свойства коэффициента корреляции

$$r_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

1. $|r_{XY}| \leq 1$

2. Если $r_{XY} = \pm 1$ то $Y = aX + b$

Замечания к разделу свойства дисперсии

1. $\sigma_{X+Y} = \sqrt{D(X) + D(Y)}$

2. $\sigma_{aX} = |a|\sigma_X$

3. $D(X + a) = D(X)$

4. $D(X - Y) = D\big(X + (-Y)\big) = D(X) + D(Y)$

Характеристическая функция

Фунуцинальное преобразование $Y = e^{ivX}$
v- вещественный параметр
i –мнимая единица

Определение. Характеристической функцией непрерывной случайной величины называется

$$g(v) = m_1[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} g(v) dv$$

Для дискретной случайной величины

$$g(v) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{ivx_k}$$

Кумулянтная функция $\varphi(v) = lng(v)$

Пример 1. Характеристическая функция пуассоновской случайной величины.

$$P(m, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^m e^{-\lambda \Delta t}}{m!}$$

$$g(v) = e^{\lambda \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

Пример 2. Характеристическая функция гауссовской случайной величины.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad g(v) = e^{iva-\frac{\sigma^2 v^2}{2}}$$

Пример 3. Характеристическая функция случайной величины с равномерным распределением.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}\ x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases} \qquad g(v) = -i\,\frac{e^{iba} - e^{iav}}{v(b-a)}$$

Свойства характеристической функции

1. $g(0) = 1$ $\qquad\qquad |g(v)| \leq 1$

2. Если $Y = cX + b$, c и b постоянные, то

$$g_Y(v) = g_X(cv)e^{ibv}$$

Пример 1. X гауссовская случайная величина. Найти $g_Y(v)$

$$g_X(v) = e^{iva-\frac{\sigma^2 v^2}{2}}$$

$$g_Y(v) = e^{ibv}\left\{e^{ivca-\frac{\sigma^2 c^2 v^2}{2}}\right\} \qquad g_Y(v) = e^{iv(ca+b)-\frac{(\sigma c)^2 v^2}{2}}$$

2. Характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин $Z=X+Y$

$$g_Z(v) = g_X(v) g_Y(v)$$

Пример 1. M и N независимые пуассоновские случайные величины

$$L = M + N$$

$$g_M(v) = e^{\lambda_1 \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

$$g_N(v) = e^{\lambda_2 \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

$$g_L(v) = g_M(v) g_N(v) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

Пример 2. X и Y независимые гауссовские случайные величины

$$\mathrm{Z} = X + Y$$

$$g_X(v) = e^{iva_X - \frac{{\sigma_X}^2 v^2}{2}} \qquad g_Y(v) = e^{iva_Y - \frac{{\sigma_Y}^2 v^2}{2}}$$

$$g_Z(v) = e^{iv(a_X + a_Y) - \frac{({\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2) v^2}{2}}$$

4. Если существует $m_k[X]$, то характеристическая функция $g(v)$дифференцируема k раз и

$$m_k[X] = (-i)^k g^k(0)$$

Для нахождения дисперсии удобно использовать кумулянтную функцию $\varphi(v) = lng(v)$

$$m_1[X] = -i\varphi'(0)$$

$$D(X) = -\varphi''(0)$$

Пример . Пуассоновская случайная величина

$$g(v) = e^{\lambda\Delta t(e^{iv}-1)}$$

$$\varphi(v) = lng(v) = \lambda\Delta t(e^{iv}\text{-}1)$$

$$m_1[M] = \lambda\Delta t \qquad D(M) = \lambda\Delta t$$