

# Многомерные случайные величины

**Пример 1.** Координаты попадания в мишень  $(X, Y)$ .  
Двумерная непрерывная случайная величина.

**Пример 1.** Осколок, образовавшийся при разрыве снаряда характеризуется весом  $P$ , максимальным размером  $L$ , начальной скоростью  $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ . Можно ввести случайную величину  $(P, L, V_x, V_y, V_z)$ .

**Определение.** Упорядоченный набор  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  одномерных случайных величин  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), заданных на одном и том же пространстве элементарных событий  $\Omega$  называется  $n$ - мерной случайной величиной или системой случайных величин.

# Матрица распределения

Y	X			...	
...					

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad \text{условие нормировки}$$

$$P(X = x_k) = p_{xk} = \sum_{i=1}^m p_{ik} \quad \text{сумма элементов } k\text{-го столбца}$$

$X$			...	
			...	

$$P(Y = y_l) = p_{yl} = \sum_{i=1}^n p_{li} \quad \text{сумма элементов } l\text{-й строки}$$

$Y$			...	
			...	

# Функция распределения системы непрерывных случайных величин

**Определение.** Функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

называется функцией распределения системы случайных величин  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Для двумерной случайной величины  $(X, Y)$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

## Свойства $F(x, y)$

1.  $0 \leq F(x, y) \leq 1$

2.  $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$

Вероятность невозможных событий

3.  $F(+\infty, +\infty) = 1$

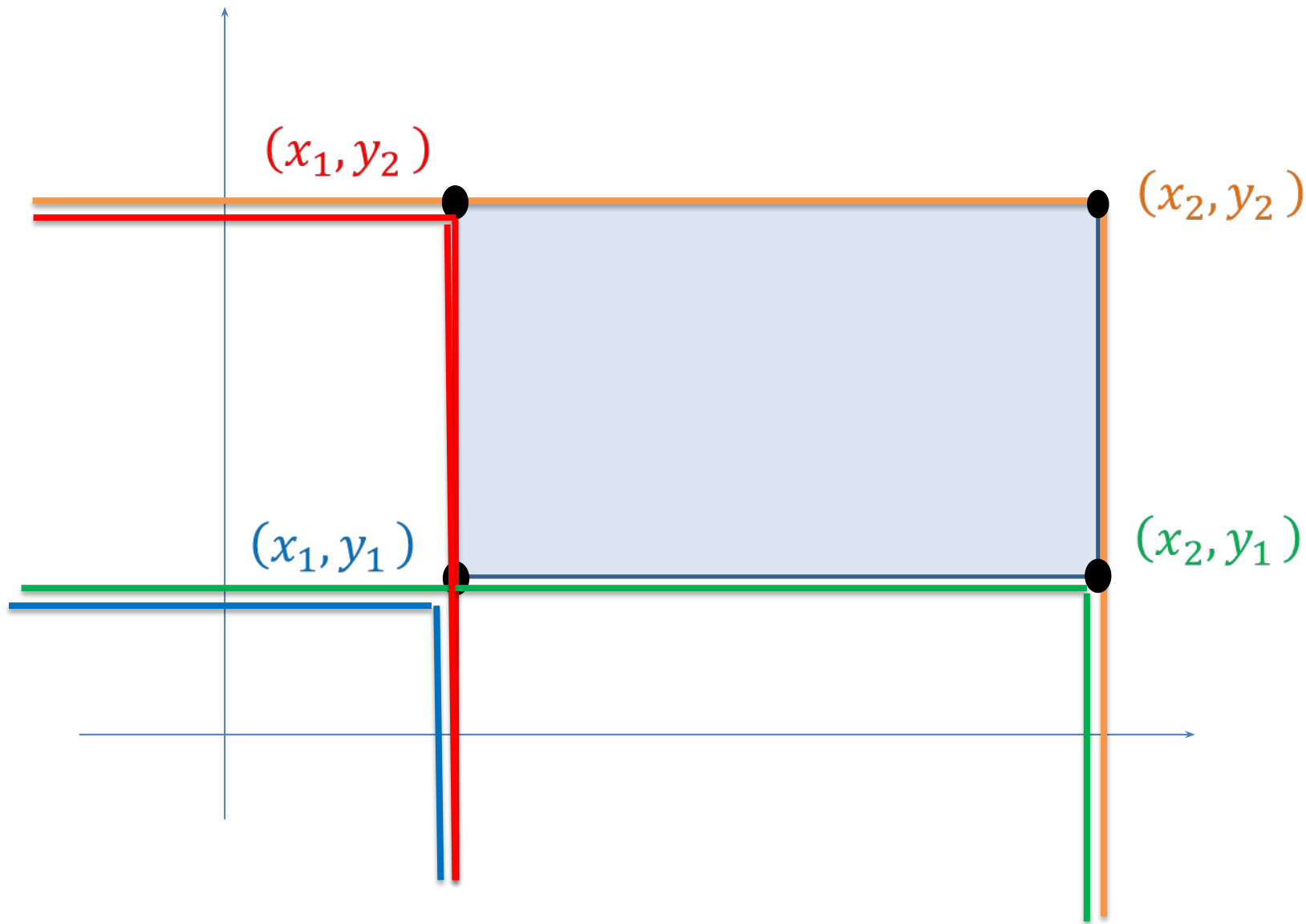
Вероятность достоверного события

4.  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_1(x) = P(X < x, Y < +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_2(y) = P(X < +\infty, Y < y)$

4. Функция  $F(x, y)$  является неубывающей по каждому из аргументов при фиксированном втором

5. Из определения функция  $F(x, y)$  можно найти вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в прямоугольник  $D$  со сторонами параллельными осям координат



$$\begin{aligned} P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\} \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \end{aligned}$$

**Пример 1.** Задана функция распределения  $F(x, y)$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } y < 0 \\ 1 - 5^{-x} - 5^{-y} + 5^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Найти  $F_1(x)$  и  $F_2(y)$ .

**Пример 2.** Задана функция распределения  $F(x, y)$

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } y < 0 \\ 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания точки  $(X, Y)$  в квадрат, ограниченный прямыми  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ .



# Плотность распределения вероятностей системы непрерывных случайных величин

**Определение.** Если существует неотрицательная функция  $f(x, y)$  такая, что функцию распределения  $F(x, y)$  при любых значениях  $x$  и  $y$  можно представить в виде

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x', y') dx' dy'$$

то  $f(x, y)$  называют **плотностью распределения вероятностей**

## Свойства $f(x, y)$

1. Из определения следует, что  $f(x, y) \geq 0$

2. Если  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $(x, y)$ , то

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

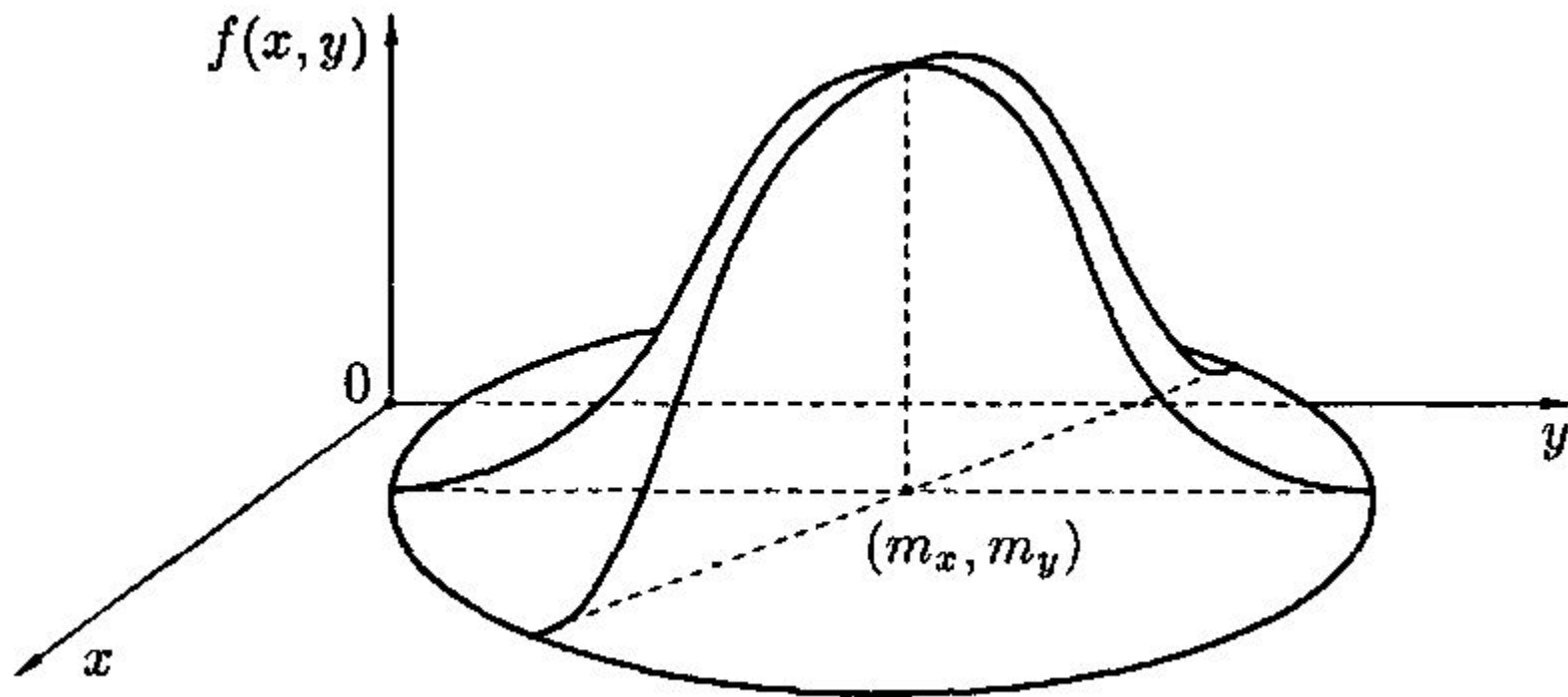
3. Вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в область  $D$  определяется выражением

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

4. Т.к.  $F(+\infty, +\infty) = 1$ , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Геометрически плотность вероятностей  $f(x,y)$  можно изобразить в виде некоторой поверхности



Вероятность попадания случайной точки  $(X, Y)$  в прямоугольник  $D$  со сторонами параллельными осям координат

$$P\{(X, Y) \in D\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy$$

**Пример 1.** Двумерная случайная величина имеет плотность вероятностей

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$$

Найти функцию распределения  $F(x, y)$  и вероятность попадания в квадрат

**Пример 2.** Равномерное распределение имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Найти постоянную  $C$  из условия нормировки.

**Законы распределения отдельных величин входящих в систему. Условные законы распределения.**

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') dx' dy'$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x', y') dx' dy'$$

$$f_1(x) = F'_x(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_2(y) = F'_y(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

**Определение.** Условным законом распределения случайной величины  $X$  входящей в систему  $(X, Y)$  называется ее закон распределения вычисленный при условии, что другая случайная величина  $Y$  приняла определенное значение  $y$ .

**Обозначения:**  $F(x|y)$ — условная функция распределения  
 $f(x|y)$ —условная плотность вероятностей

**Пример 2.** Система случайных величин  $L$  и  $P$  представляет собой длину и вес осколка снаряда .

Можно показать, что  $F(x|Y = y) = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$

$$f(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y|X = x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

**Определение.** Случайные величины называются независимыми, если

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \text{ , т.е. } F_2(y) = F(y|X = x)$$

**Теорема.** Для того, чтобы случайные величины были независимыми, необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

В случае независимых случайных величин

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

**Пример .** Система случайных величин  $X$  и  $Y$  имеет плотность вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

$D$  — треугольник, ограниченный осями координат и прямой  $y = 1 - x$ . Найти  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ .



# Числовые характеристики системы двух случайных величин

**Определение.** Начальным моментом порядка  $k, s$  системы непрерывных случайных величин  $(X, Y)$  называется

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy$$

В предположении, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x^s| |y^s| x^k f(x, y) dx dy$$

абсолютно сходится.

В случае дискретной случайной величины

$$\alpha_{k,s}[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k y_j^s p_{ij}$$

в предположении, что ряд в правой части сходится абсолютно.

$$\begin{aligned} m_1[X] &= \alpha_{1,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx \end{aligned}$$

$$m_1[Y] = \alpha_{0,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy$$

**Определение.** Смешанным центральным моментом порядка  $k, s$  системы непрерывных случайных величин  $(X, Y)$  называется

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X])^k (y - m_1[Y])^s f(x, y) dx dy$$

в предположении, что интеграл в правой части сходится абсолютно

$$\mu_{2,0} = D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X])^2 f_1(x) dx$$

$$\mu_{0,2} = D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_1[Y])^2 f_2(y) dy$$

**Определение.** Смешанный центральный момент второго порядка системы непрерывных случайных величин  $(X, Y)$  называется ковариацией

$$\mu_{1,1} = cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X]) (y - m_1[Y]) f(x, y) dx dy$$

В случае дискретной случайной величины

$$\mu_{1,1} = cov(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_1[X]) (y_j - m_1[Y]) p_{ij}$$

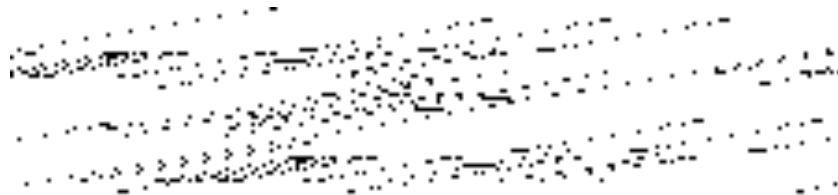
Отношение  $r_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

называется коэффициентом корреляции

**Теорема.** Если случайные величины независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю

Эквивалентно ли понятие некоррелированности случайных величин их независимости ???

**Пример 1.** Плотность распределения случайных величин  $(X, Y)$  выражается формулой



Найти ковариацию.

Можно доказать, что  $|r_{XY}| \leq 1$  или  $-1 \leq r_{XY} \leq 1$

**Пример 2** Вес и рост человека связаны положительной корреляцией.

**Пример 3.** Производится два выстрела по цели; точка попадания первого выстрела регистрируется, и в прицел вводится поправка, пропорциональная ошибке первого выстрела с обратным знаком. Координаты точек попадания первого и второго выстрелов будут связаны отрицательной корреляцией.

**Определение.** Условным математическим ожиданием случайной величины  $X$  называется

$$m_1[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|Y = y) dx$$

Аналогично можно определить условное математическое ожидание случайной величины  $Y$

$$m_1[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|X = x)dy$$

Функции регрессии

$$\varphi(x) = m_1[Y|X = x]$$

$$\psi(y) = m_1[X|Y = y]$$

Графики функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$  называются линиями регрессии

**Определение.** Условной дисперсией случайной величины  $X$  называется

$$D[X|Y = y] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1[X|Y = y])^2 f(x|Y = y) dx$$

Аналогично

$$D[Y|X = x] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_1[Y|X = x])^2 f(y|X = x) dy$$



# Функции двух случайных величин

## Математическое ожидание функции нескольких случайных величин

Задана плотность вероятностей  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  системы случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Нужно найти математическое ожидание случайной величины  $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Можно доказать, что

$$m_1[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

## Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной  $c$   $m_1[c]=c$

2. Математическое ожидание  $Y = aX + b$

Ранее мы нашли, что  $m_1[aX + b] = am_1[X] + b$

3. Среднее суммы двух случайных величин  $Z = aX_1 + bX_2$

$$m_1[aX_1 + bX_2] = am_1[X_1] + bm_1[X_2]$$

В общем случае, если  $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$

$$m_1[Y] = \sum_{i=1}^n \alpha_i m_1[X_i]$$

4. Среднее произведения двух случайных величин  $Z = XY$  !!!

$$m_1[XY] = m_1[X]m_1[Y] + cov(X, Y)$$

## Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной  $c$   $D(c)=0$

2. Дисперсия  $Y = aX + b$

Ранее мы нашли, что  $D(Y) = a^2 D(X)$

3. Для любых случайных величин, имеющих конечную дисперсию, справедливо соотношение

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$$

В общем случае, если  $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \alpha_i \alpha_j cov(X_i, X_j)$$

4. Для любых случайных величин  $X$  и  $Y$ , имеющих конечную дисперсию, справедливо соотношение

$$D(XY) = D(X)D(Y) + m_1^2(X^2)D(Y) + m_1^2(Y^2)D(X)$$

**Пример.** Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$  распределенной по биномиальному закону.

Пусть  $X$  в рассматриваемой схеме обозначает число появлений события  $A$  в серии из  $n$  опытов при постоянной вероятности  $p = P(A)$ .

Введем случайные величины  $X_i$  число наступлений события  $A$  в  $i$ -ом опыте,  $i=1, 2, \dots, n$

Тогда  $X = \sum_{i=1}^n X_i$

Ряд распределения  $X_i$

	0	1
	$1-p$	$p$

$$m_1[X_i] = p$$

$$D[X_i] = p(1-p)$$

$$m_1[X] = m_1 \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = np$$

$$D[X] = D \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right] = np(1-p)$$

## Свойства коэффициента корреляции

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

1.  $|r_{XY}| \leq 1$

2. Если  $r_{XY} = \pm 1$  то  $Y = aX + b$

## Замечания к разделу свойства дисперсии

1.  $\sigma_{X+Y} = \sqrt{D(X) + D(Y)}$

2.  $\sigma_{aX} = |a|\sigma_X$

3.  $D(X + a) = D(X)$

4.  $D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(Y)$

# Характеристическая функция

Фунуциональное преобразование  $Y = e^{ivX}$

$v$ - вещественный параметр

$i$  –мнимая единица

**Определение.** Характеристической функцией непрерывной случайной величины называется

$$g(v) = m_1[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} g(v) dv$$



Для дискретной случайной величины

$$g(v) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{ivx_k}$$

Кумулянтная функция  $\varphi(v) = \ln g(v)$

**Пример 1.** Характеристическая функция пуассоновской случайной величины.

$$P(m, \Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^m e^{-\lambda \Delta t}}{m!}$$

$$g(v) = e^{\lambda \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

**Пример 2.** Характеристическая функция гауссовской случайной величины.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad g(v) = e^{iva - \frac{\sigma^2 v^2}{2}}$$

**Пример 3.** Характеристическая функция случайной величины с равномерным распределением.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases} \quad g(v) = -i \frac{e^{iba} - e^{iav}}{v(b-a)}$$

## Свойства характеристической функции

$$1. g(0) = 1 \quad |g(v)| \leq 1$$

2. Если  $Y = cX + b$ ,  $c$  и  $b$  постоянные, то

$$g_Y(v) = g_X(cv)e^{ibv}$$

**Пример 1.**  $X$  гауссовская случайная величина. Найти  $g_Y(v)$

$$g_X(v) = e^{iva - \frac{\sigma^2 v^2}{2}}$$

$$g_Y(v) = e^{ibv} \left\{ e^{ivca - \frac{\sigma^2 c^2 v^2}{2}} \right\} \quad g_Y(v) = e^{iv(ca+b) - \frac{(\sigma c)^2 v^2}{2}}$$

2. Характеристическая функция суммы двух независимых случайных величин  $Z=X+Y$

$$g_Z(v) = g_X(v)g_Y(v)$$

**Пример 1.** M и N независимые пуассоновские случайные величины

$$L = M + N$$

$$g_M(v) = e^{\lambda_1 \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

$$g_N(v) = e^{\lambda_2 \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

$$g_L(v) = g_M(v)g_N(v) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t (e^{iv} - 1)}$$

**Пример 2.**  $X$  и  $Y$  независимые гауссовские случайные величины

$$Z = X + Y$$

$$g_X(v) = e^{iva_X - \frac{\sigma_X^2 v^2}{2}} \quad g_Y(v) = e^{iva_Y - \frac{\sigma_Y^2 v^2}{2}}$$

$$g_Z(v) = e^{iv(a_X + a_Y) - \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)v^2}{2}}$$

4. Если существует  $m_k[X]$ , то характеристическая функция  $g(v)$  дифференцируема  $k$  раз и

$$m_k[X] = (-i)^k g^k(0)$$

Для нахождения дисперсии удобно использовать кумулянтную функцию  $\varphi(v) = \ln g(v)$

$$m_1[X] = -i\varphi'(0)$$

$$D(X) = -\varphi''(0)$$

**Пример .** Пуассоновская случайная величина

$$g(v) = e^{\lambda\Delta t(e^{iv}-1)}$$

$$\varphi(v) = \ln g(v) = \lambda\Delta t(e^{iv}-1)$$

$$m_1[M] = \lambda\Delta t \quad D(M) = \lambda\Delta t$$



