

18.05.20

Основные понятия комбинаторики.  
Факториал. Вычисление факториала.  
Формула числа перестановок,  
размещений и сочетаний.  
Табличное представление данных.

*Учащиеся должны прислать ответы на  
вопросы и решение задач, содержащиеся в  
практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1401>

<https://infourok.ru/videouroki/1402>

<https://infourok.ru/videouroki/1403>

## Теоретическая часть:

Прочитать.

Определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

### КОМБИНАТОРИКА.

В курсе алгебры основной школы решались элементарные комбинаторные задачи, связанные с составлением различных соединений (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано *правило произведения*, упрощающее в ряде случаев подсчёт числа соединений определённого вида. Напомним его.

Если существует  $n$  вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется  $m$  вариантов выбора второго элемента, то всего существует  $n \cdot m$  различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

### Перестановки.

Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

- На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Ответ**

Книги можно поставить 24 способами. ◀

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

**Определение.** *Перестановками из  $n$  элементов* называются соединения, которые состоят из одних и тех же  $n$  элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначают  $P_n$  ( $P$  — первая буква французского слова *permutation* — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче 1 было найдено  $P_4 = 24$ .

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок  $P_n$  из  $n$  различных элементов:

$$P_n = n (n - 1) (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2) (n - 1) n.$$

Произведение первых  $n$  натуральных чисел обозначают  $n!$  (читается «эн факториал»), т. е.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$ , причём по определению  $1! = 1$ . Таким образом,

$$P_n = n! \quad (1)$$

## Размещения.

Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

- Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,

21, 23, 24,

31, 32, 34,

41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел  $4 \cdot 3 = 12$ .

Ответ

12. ◁

**Определение.** *Размещениями из  $t$  элементов по  $n$  элементов ( $n \leq t$ ) называются такие соединения, каждое из которых содержит  $n$  элементов, взятых из данных  $t$  разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.*

Число всевозможных размещений из  $m$  элементов по  $n$  элементов обозначают  $A_m^n$  и читают «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что  $A_4^2 = 12$ .

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \quad \circ \quad (3)$$

## Сочетания.

Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

- Пусть  $x$  — число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа  $x$ , т. е.  $2x$ . Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 10 имеющихся различных элементов, равно  $A_{10}^2$ . Таким образом,  $2x = A_{10}^2$ , т. е.  $2x = 90$ , откуда  $x = 45$ .

**Ответ**

45 способами. ◀

**Определение.** Сочетаниями из  $m$  элементов по  $n$  в каждом ( $n \leq m$ ) называются соединения, каждое из которых содержит  $n$  элементов, взятых из данных  $m$  разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из  $m$  различных элементов по  $n$  элементов обозначают  $C_m^n$  ( $C$  — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что  $C_{10}^2 = 45$ .

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \quad \circ$$

Например,  $C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ .

## Практическая часть.

### Задачи:

**1047** Путешественник может попасть из пункта  $A$  в пункт  $C$ , проехав через пункт  $B$ . Между пунктами  $A$  и  $B$  имеются три различные дороги, а между пунктами  $B$  и  $C$  — четыре различные дороги. Сколько существует различных маршрутов между пунктами  $A$  и  $C$ ?

**1063** Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:

- 1) последней была цифра 3;
- 2) первой была цифра 4;
- 3) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;
- 4) первой была цифра 2, а последней — цифра 4;

**1075** В классе 20 человек. Сколькими способами из их числа можно сделать назначение: 1) физорга и культорга; 2) физорга, культорга и казначея?

**1081** Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать:

- 1) троих студентов; 2) четверых студентов?