

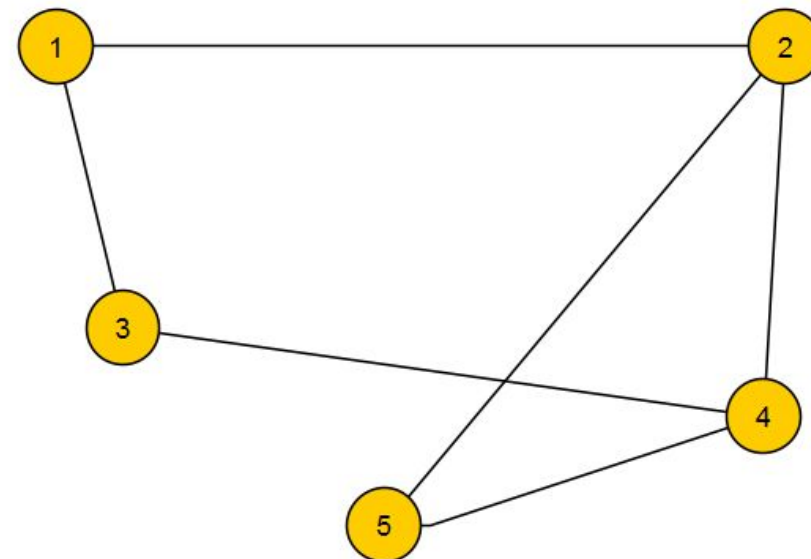
Графы

Что такое граф?

- **Граф** — это структура, представляющая собой набор объектов, в котором некоторые пары объектов в некотором смысле «связаны».
- Объекты, называемые **вершинами** (также называемыми *узлами* или *точками*).
- Каждая из связанных пар вершин называется **ребром**.

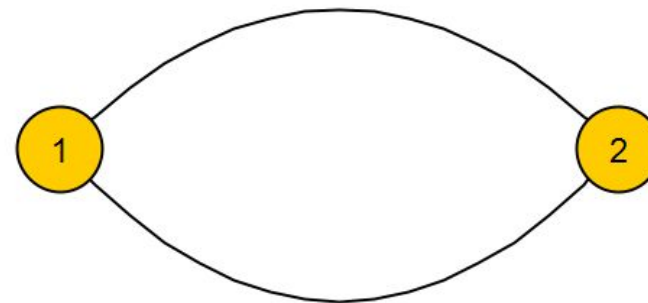
Что такое граф?

- Например:
 - Вершины (желтые кружки) is $V = \{1,2,3,4,5\}$
 - Ребра (черные линии) это пары вершин, которые связаны. В этом случае ребра :
 $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$
- Мы также определяем граф как пару V и E . Если коротко, то $G = (V, E)$.
Мы будем использовать это обозначение.

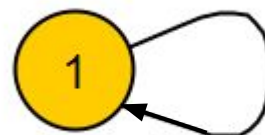
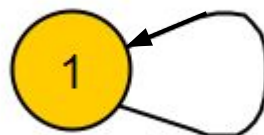
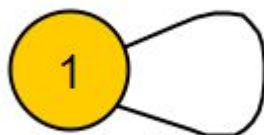
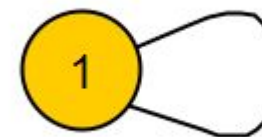


Что такое граф?

- Параллельные вершины :
 - Два или более ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин.
 - В примере вершины 1 и 2 соединены с 2 ребрами.



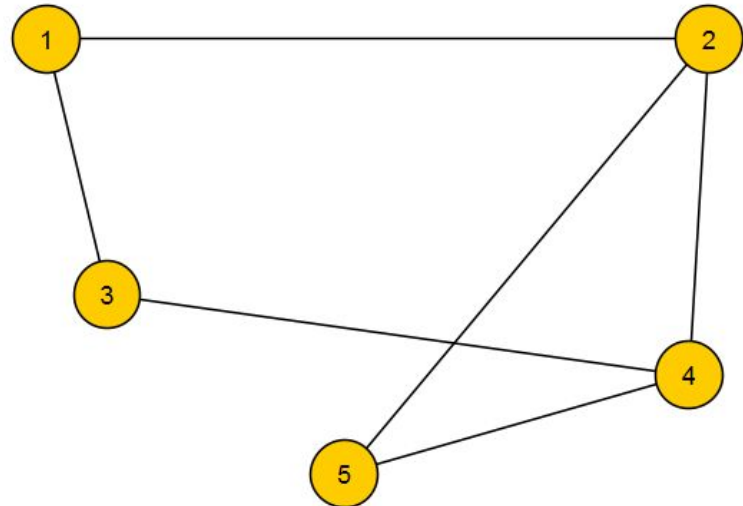
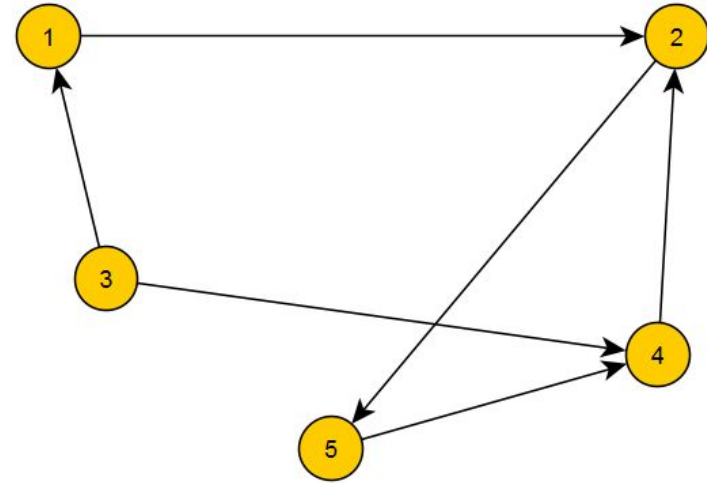
- Петля
 - Ребро, которое начинается и заканчивается в одной вершине.



Что такое граф?

Типы графов

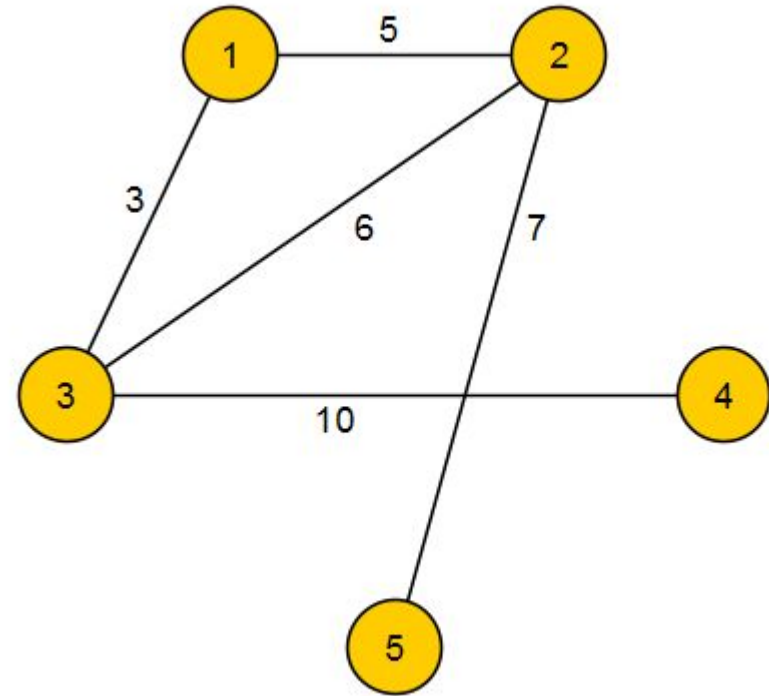
- Если ребра в графе ориентированы, т. е. указывают только в одном направлении, граф называется **ориентированным графом** или **орграфом**.
- Если ребра в графе не имеют направления, граф называется *неориентированным графом*.



Что такое граф?

Типы графов

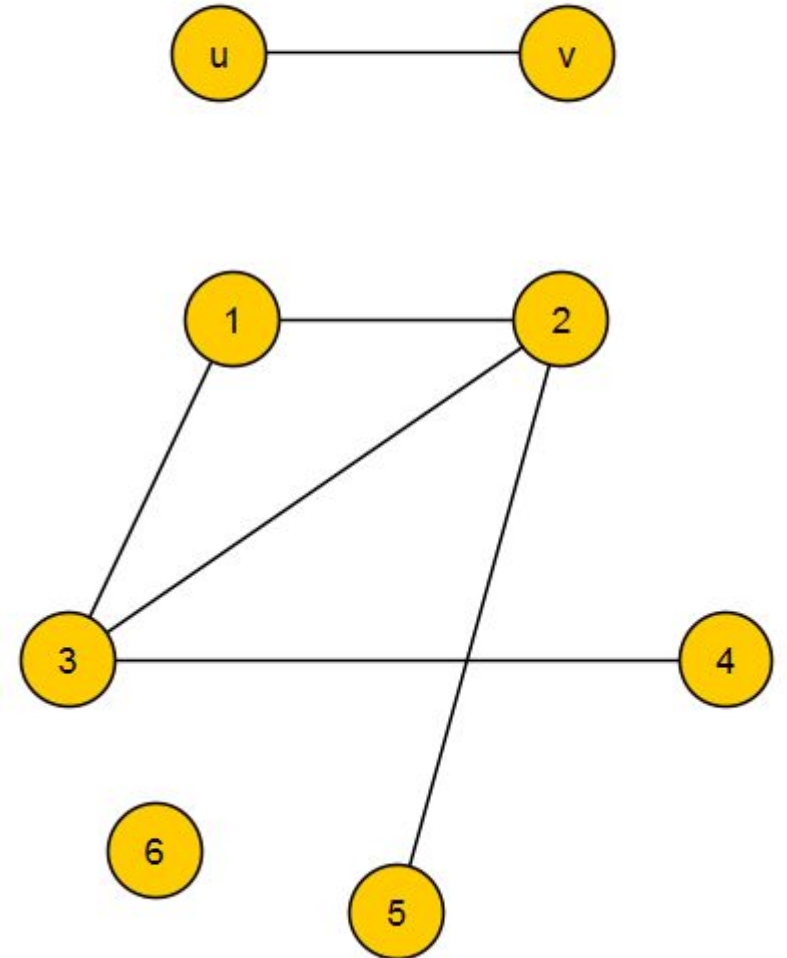
- Граф, в котором каждое ребро имеет числовой «вес», называется *взвешенным графом*.



Что такое граф?

Терминология

- Вершины u и v называются *смежными*, если u и v соединены некоторым ребром.
- Количество ребер, инцидентных вершине, называется *степенью вершины* или $deg(v)$. Вершина инцидентна ребру, если эта вершина является одной из двух вершин, которые соединяет ребро. Например, $град(3) = 3$
- *Листовая вершина* — это вершина с $deg(v) = 1$, например, 5 — листовая вершина.
- *Изолированная вершина* — это вершина с $deg(v) = 0$, например, 6 — изолированная вершина.



Что такое граф?

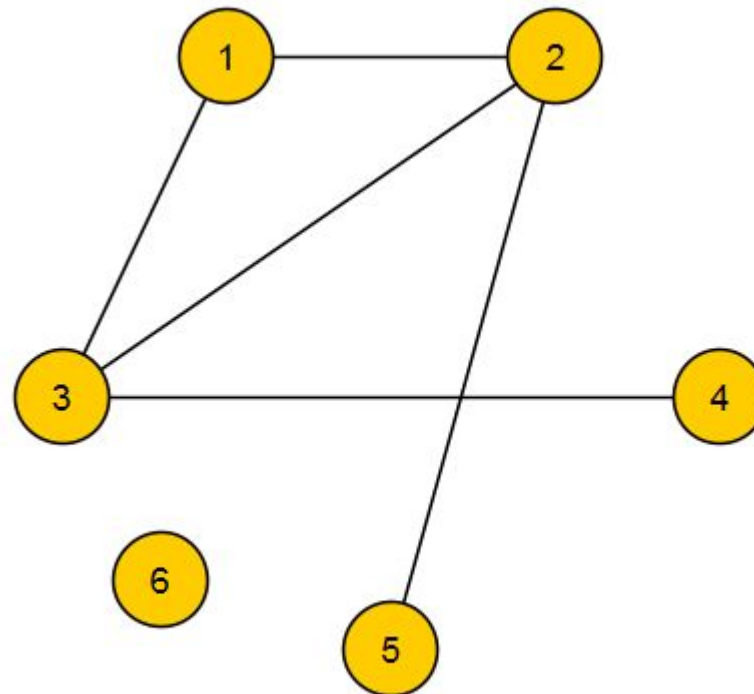
Лемма о рукопожатии

• Лемма:

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

где $|E|$ количество ребер.

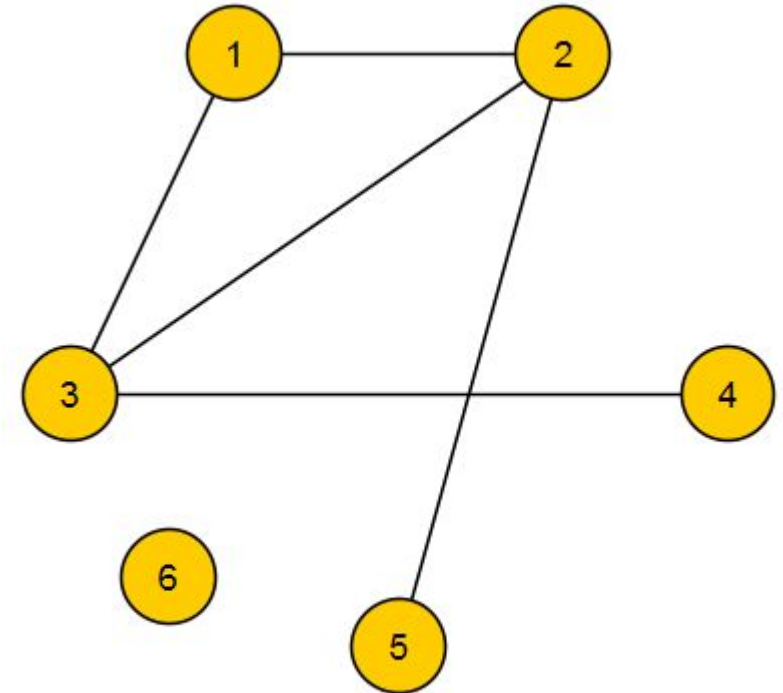
Другими словами, сумма степени всех вершин равна количеству ребер, умноженному на 2.



Что такое граф?

Терминология

- Граф называется *связным*, если в нем нет вершины с $\text{deg} = 0$.
- Каждый связный подграф называется компонентом.
- **Путь** в графе — это последовательность ребер, соединяющая последовательность вершин.
 - Например, $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$
- **Цикл** — это **путь**, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.
 - Например, $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$



Графическое представление

Что такое граф?

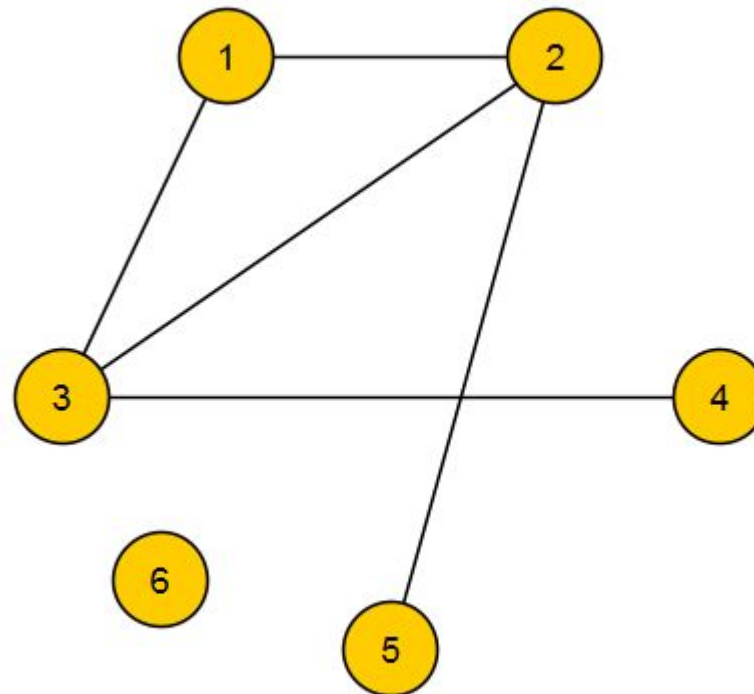
Представление

- Нужно представить график в компьютере.
- 3 обычных вида представления:
 - Список ребер
 - Матрица смежности
 - Список смежности

Что такое граф?

Представление. Список ребер

- Простое перечисление ребер :
 - Для этого примера список узлов
 $\{1, 2\}, \{2, 1\}$
 $\{1, 3\}, \{3, 1\}$
 $\{2, 3\}, \{3, 2\}$
 $\{2, 5\}, \{5, 2\}$
 $\{3, 4\}, \{4, 3\}$
- Можно использовать 2 массива **от** и **до**.
- Может использоваться массив пар.



Что такое граф?

Представление: Список смежности

- Хранить для каждой вершины все ее соседние вершины :

- Для этого примера список смежности

1 → {2, 3}

2 → {1, 3, 5}

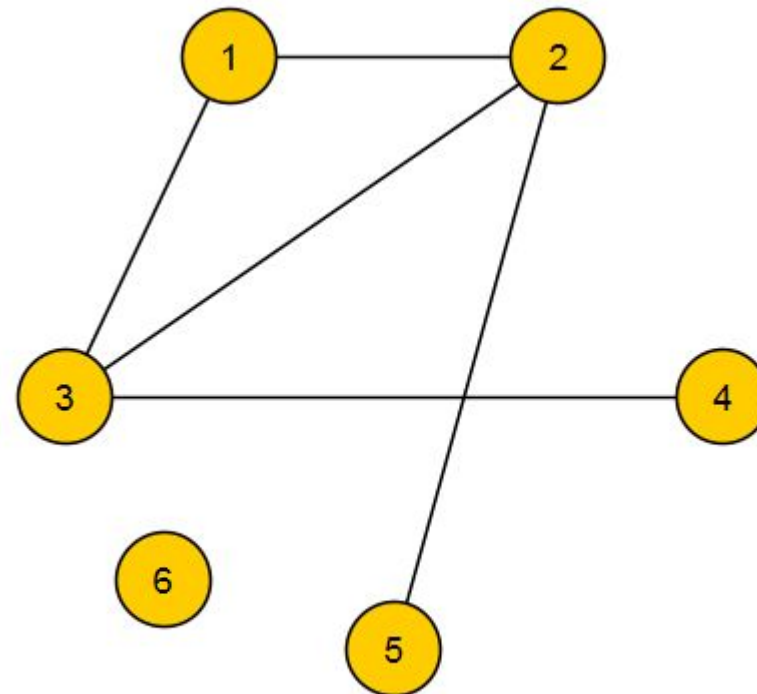
3 → {1, 2, 4}

4 → {3}

5 → {2}

6 → {}

- Можно использовать массив массивов.
- Карту можно использовать.

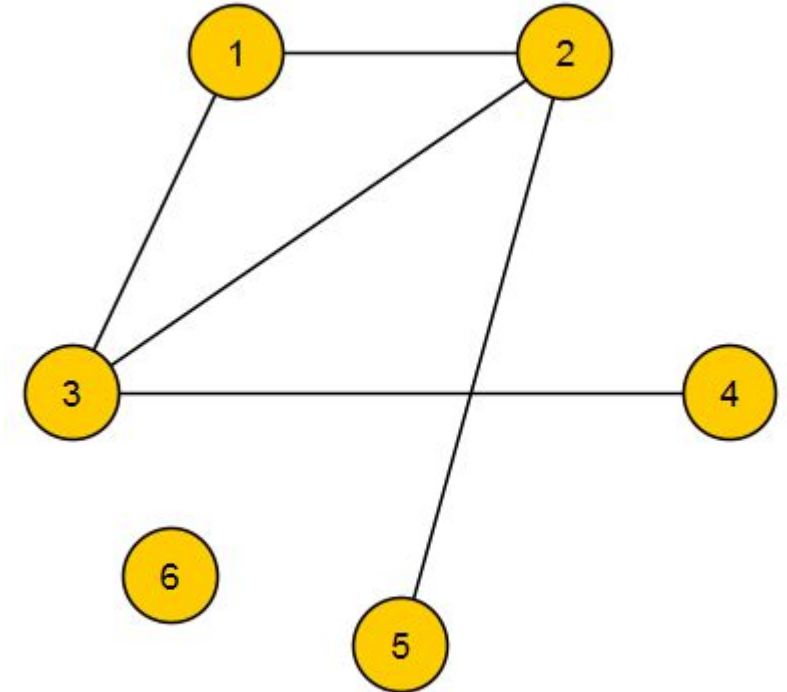


Что такое граф?

Представление: Матрица смежности

- Если между вершинами i и j есть ребро, то (i, j) -я матрица устанавливается в true, а в противном случае - в false:
 - Для этого примера матрица смежности

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0



- Можно использовать массив массивов.

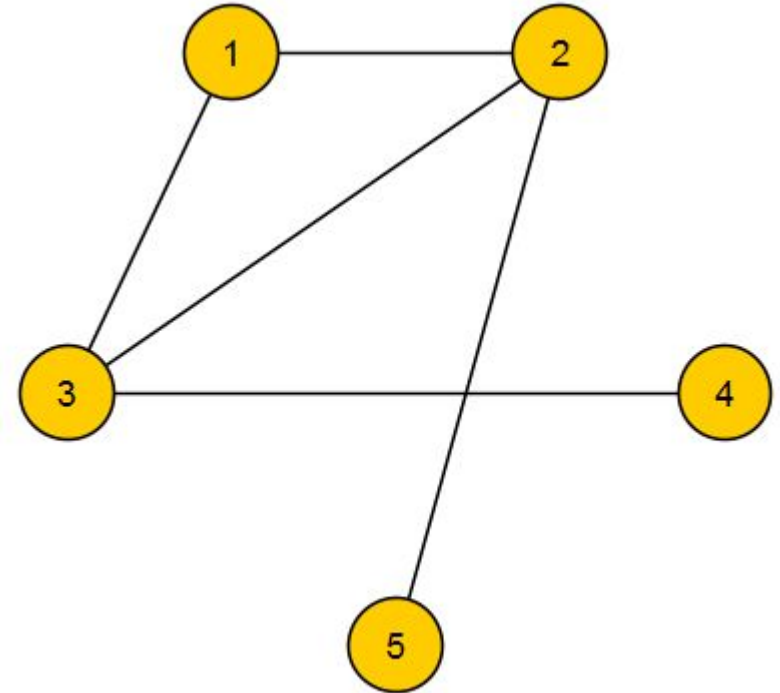
Что такое граф?

Представление. Ориентированный граф

- В случае ориентированного графа представление остается прежним, но ребра добавляются только в одном направлении.
 - Например, матрица соединений для ориентированного графа будет :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

- Обратите внимание, что для неориентированного графа (i, j) всегда равно (j, i) . В случае направленного такого правила нет.



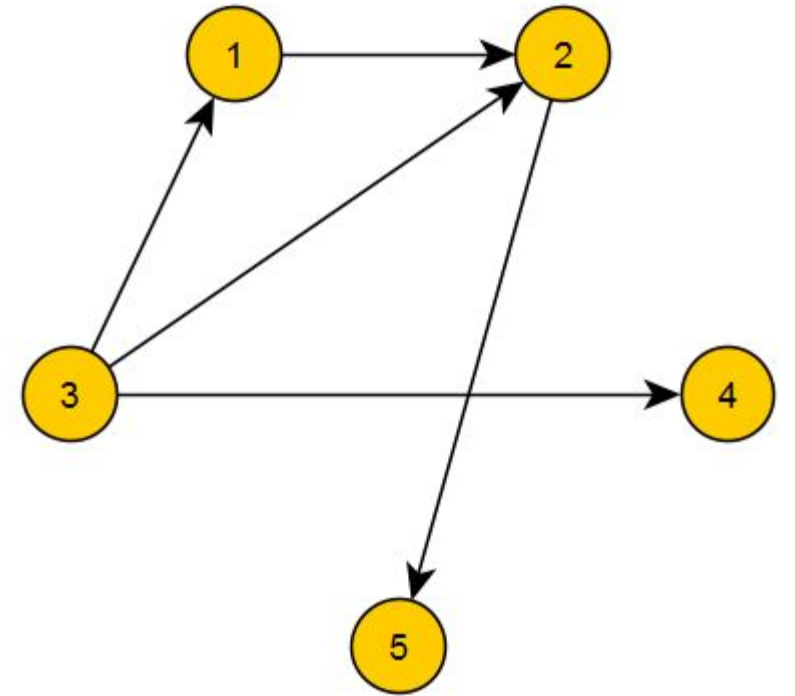
Breadth First Search (BFS)

Поиск в ширину

Breadth First Search (BFS)

- BFS также является методом обхода графа.
- Алгоритм:

```
BFS( $v$ )
{
    добавить  $v$  в очередь  $q$ 
    пока  $q$  не пусто
        взять первую вершину  $u$  из  $q$ 
        удалить первую вершину из  $q$ 
        пометить  $u$  как посетившую
        для всех непосещенных смежных вершин  $w$ 
            из  $u$ 
                добавить  $w$  в  $q$ 
    }
```

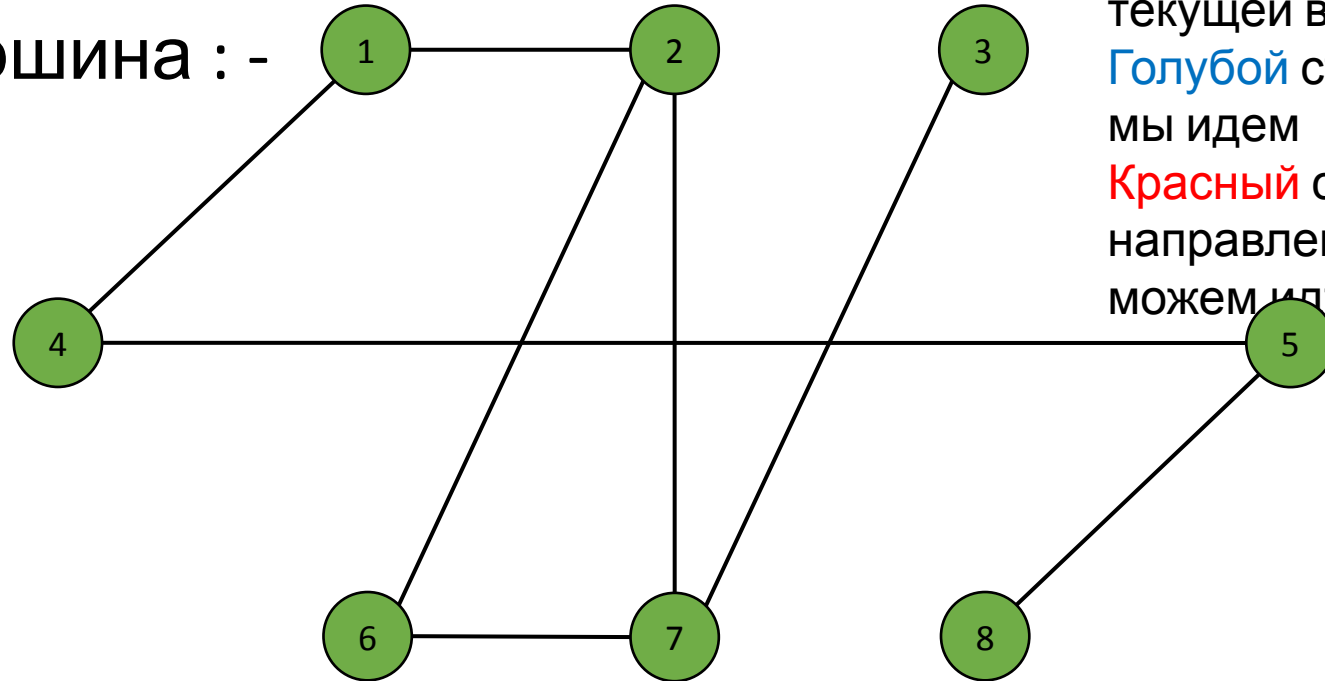


Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : { }

Очередь: { }

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

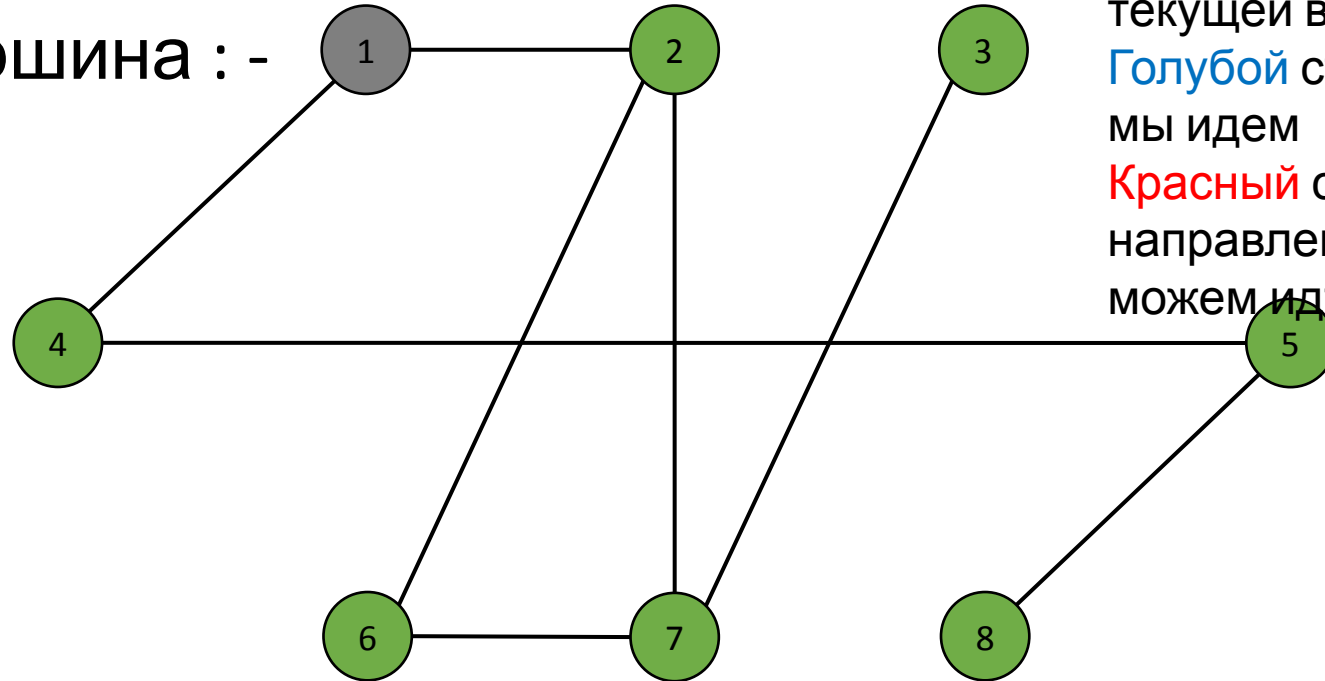
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : { }

Очередь : {1}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

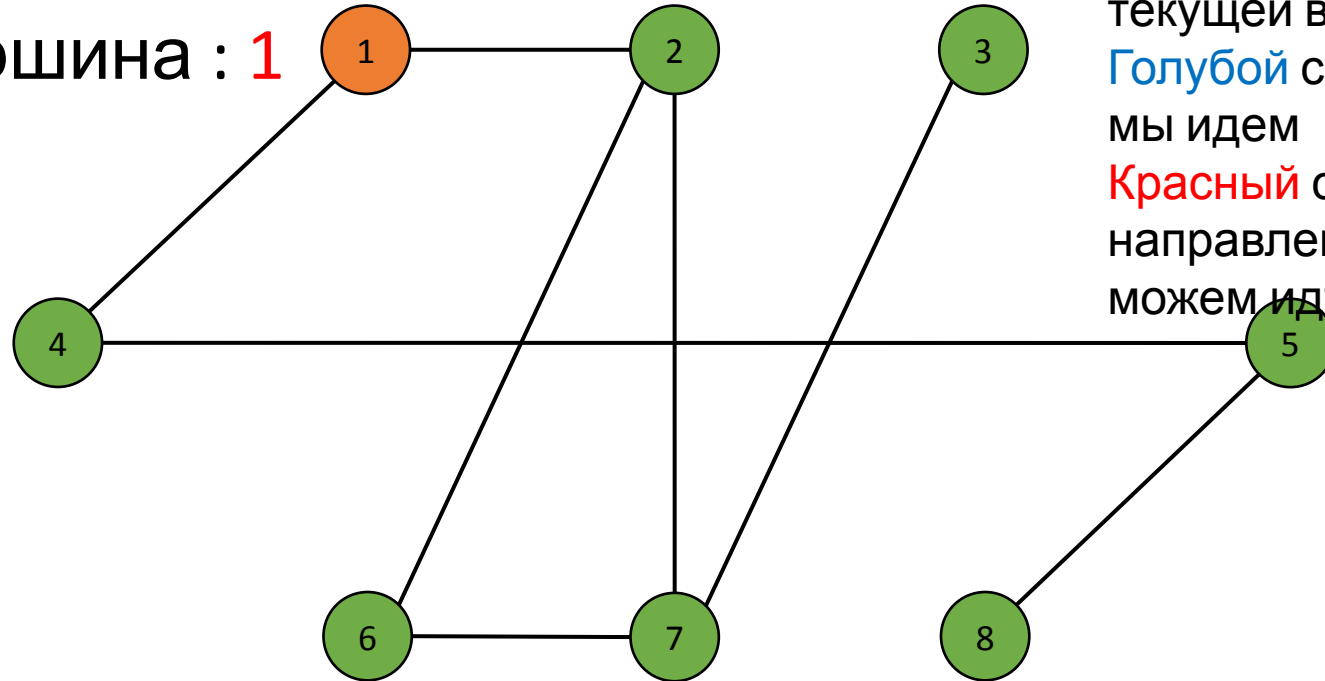
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {}

Текущая вершина : 1



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

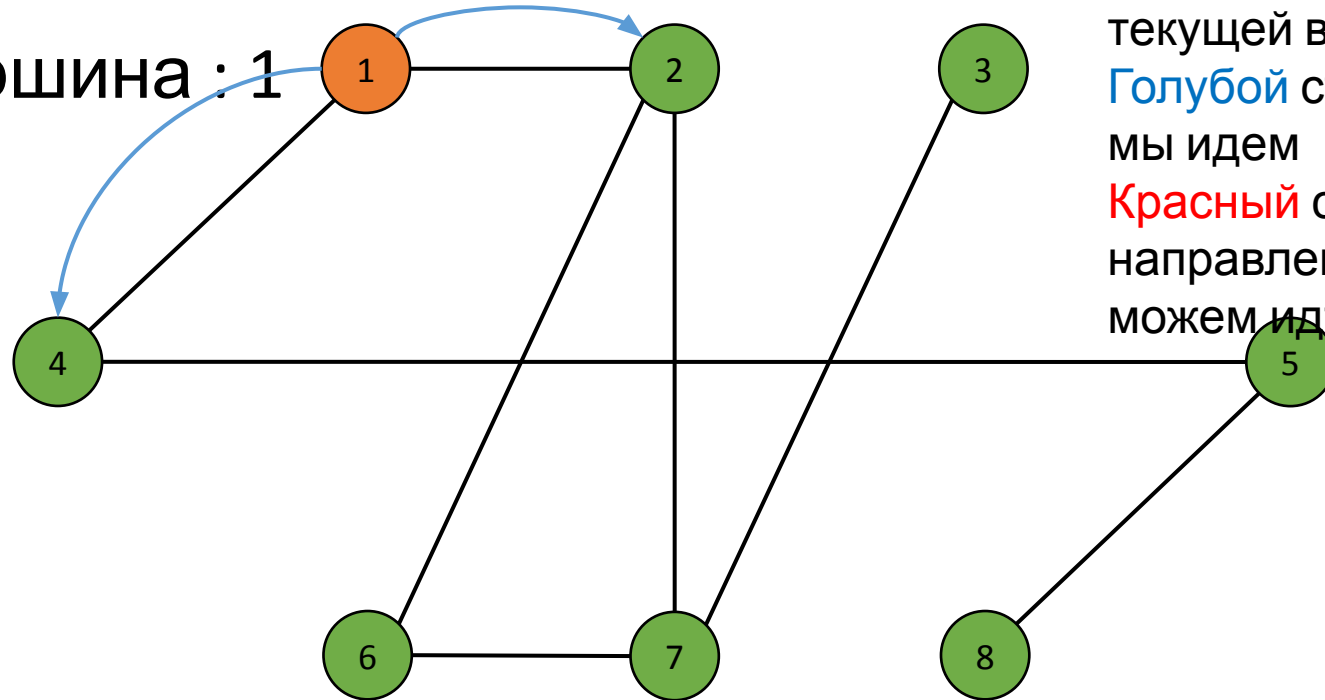
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {}

Текущая вершина : 1



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

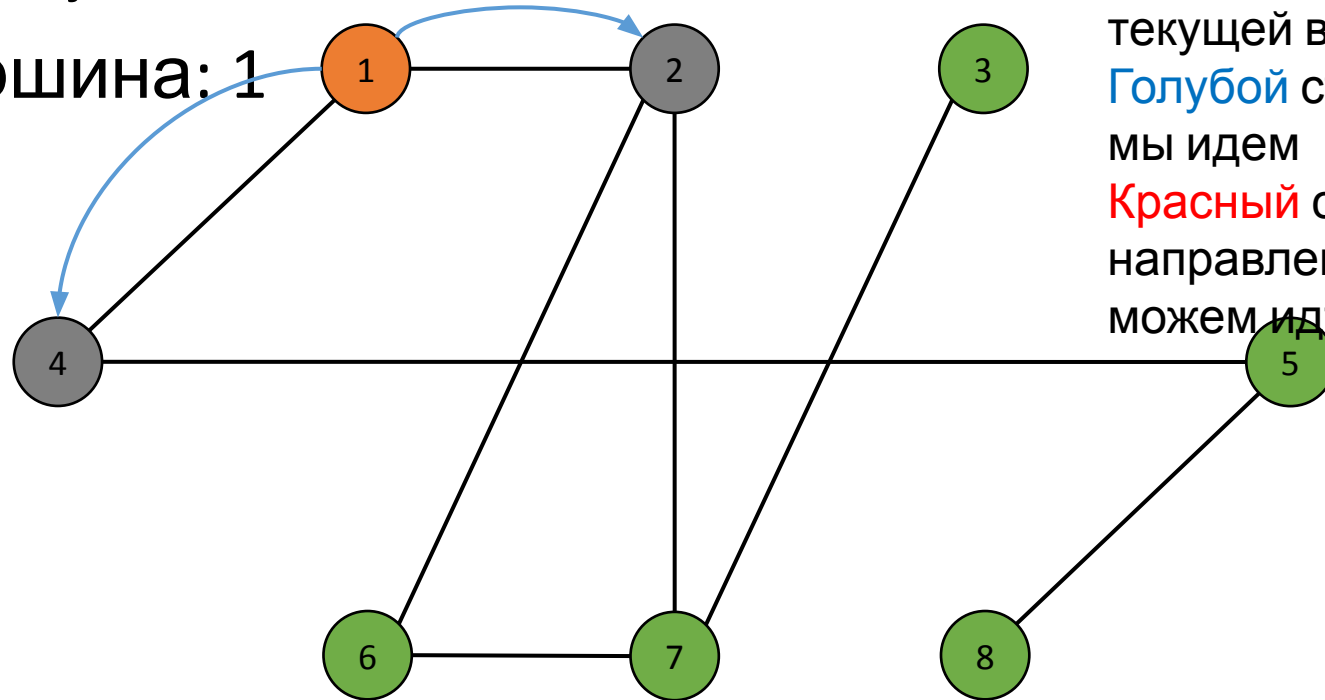
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {2, 4}

Текущая вершина: 1



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

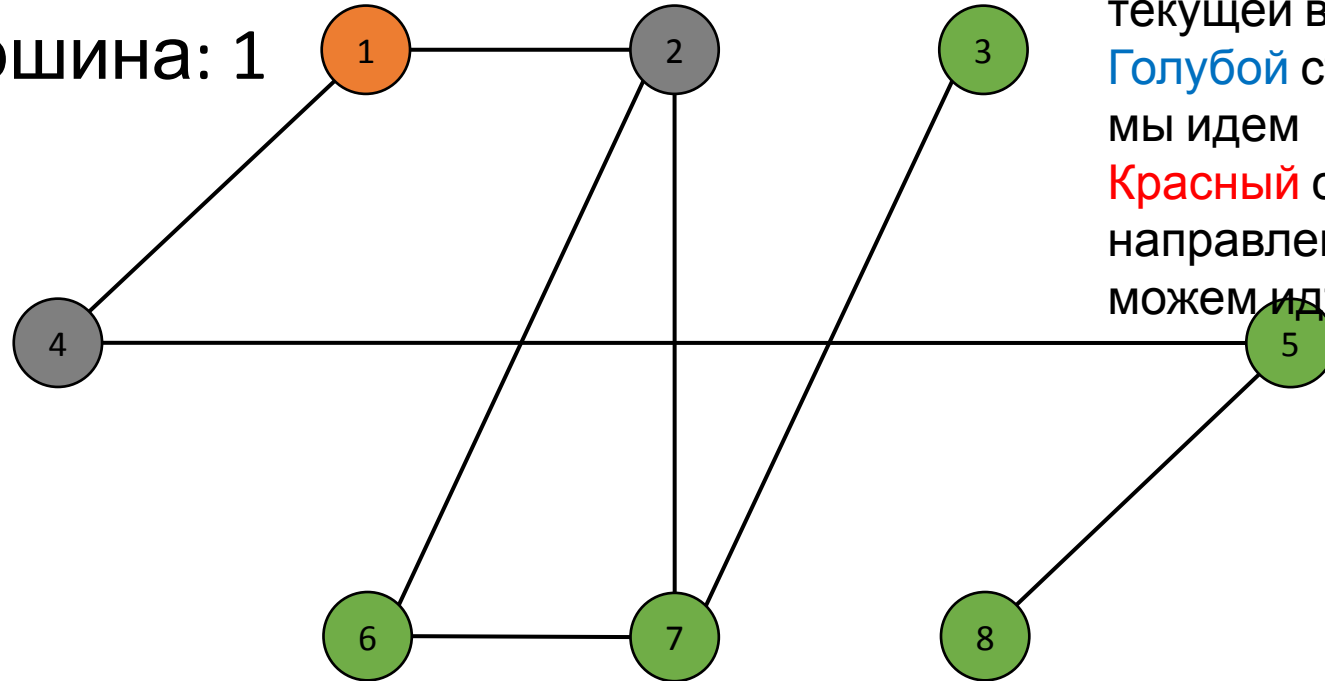
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {2, 4}

Текущая вершина: 1



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

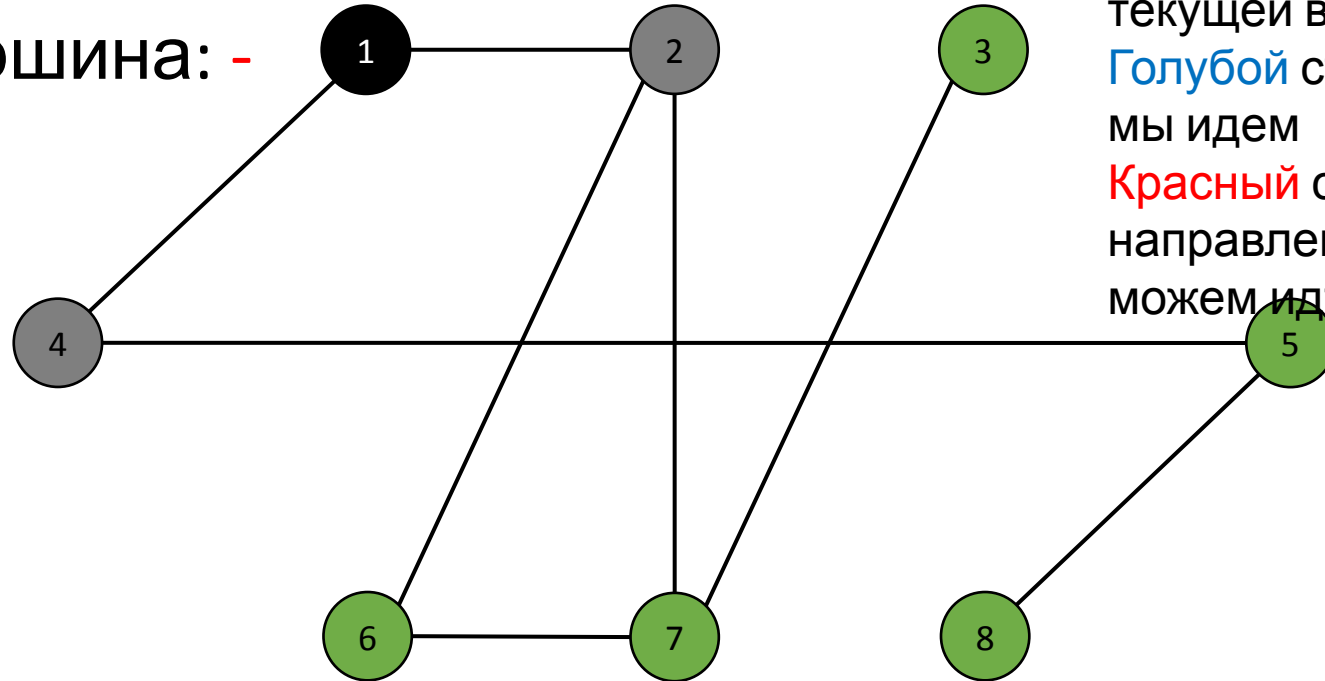
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1}

Очередь : {2, 4}

Текущая вершина: -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

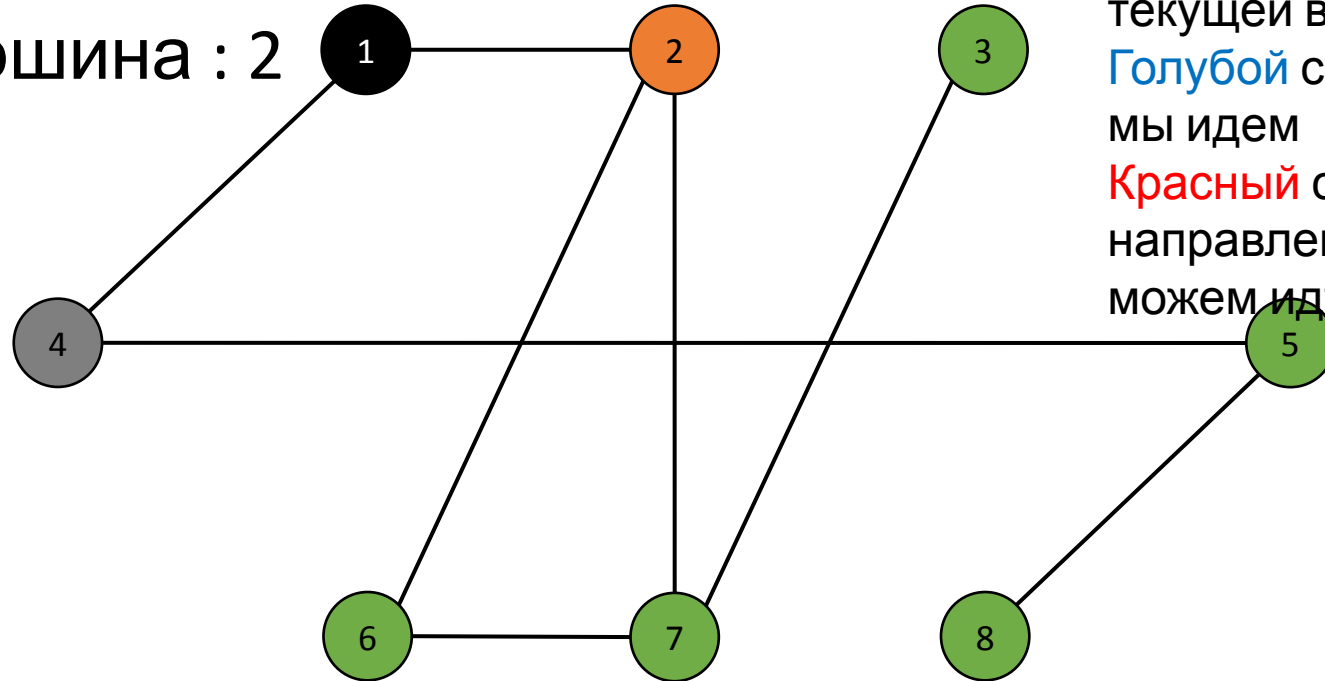
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

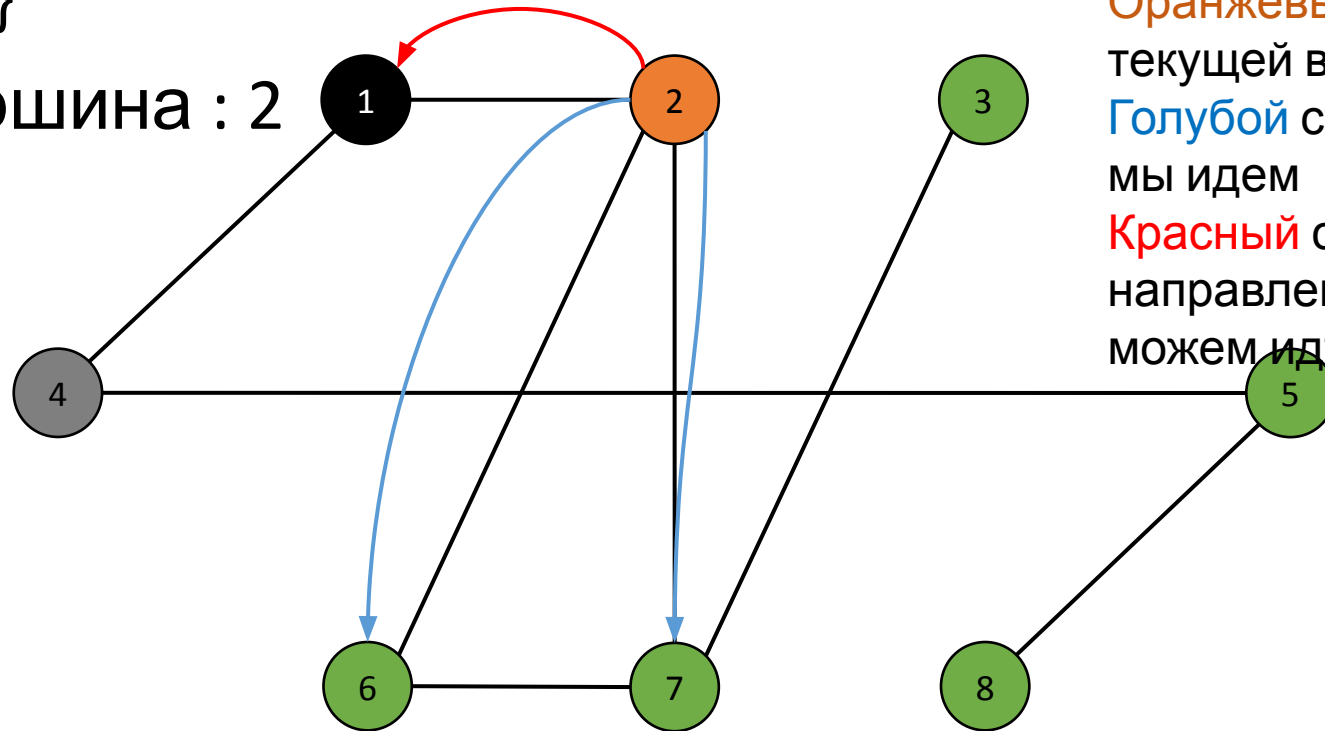
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4}

Текущая вершина : 2



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

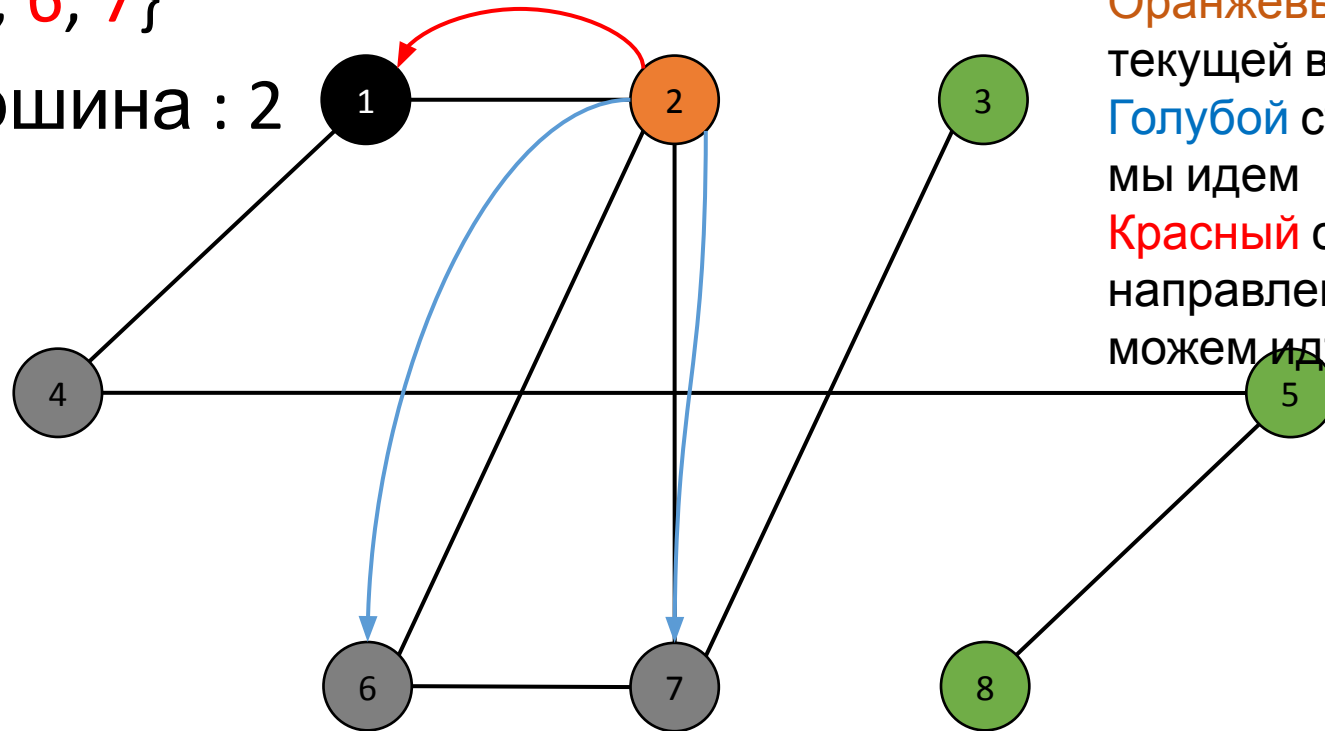
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4, 6, 7}

Текущая вершина : 2



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

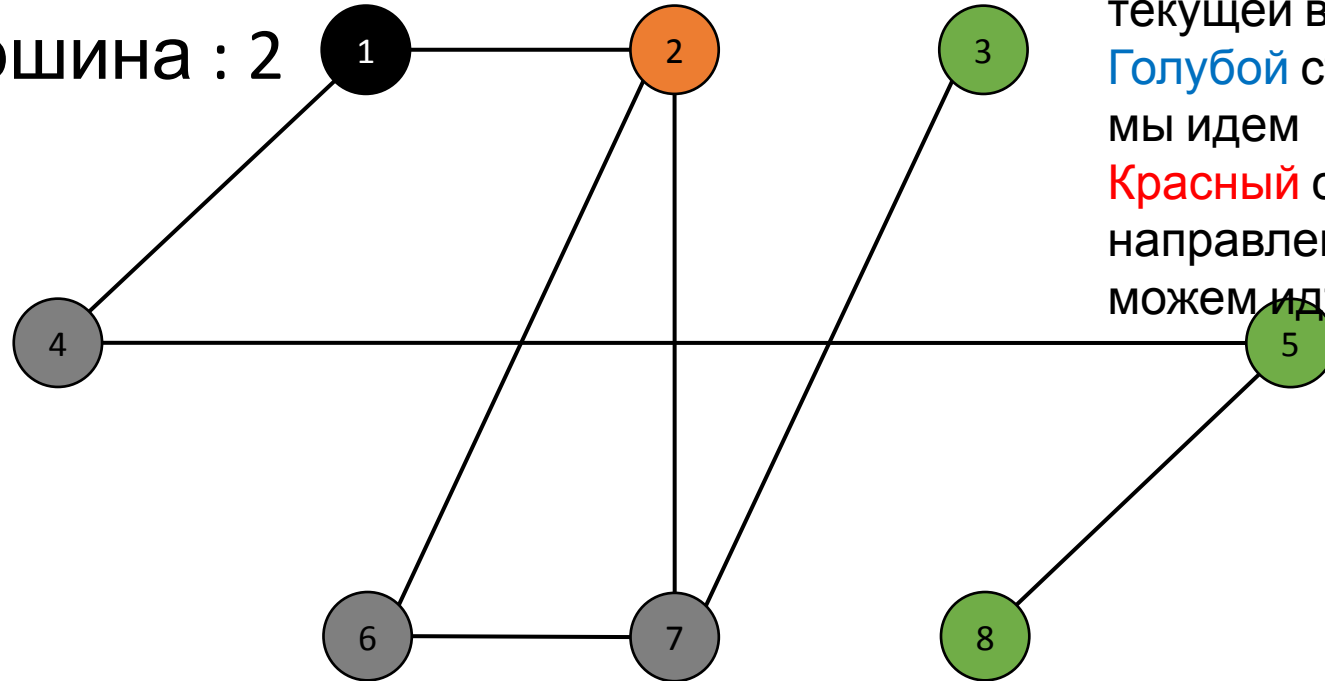
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4, 6, 7}

Текущая вершина : 2



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

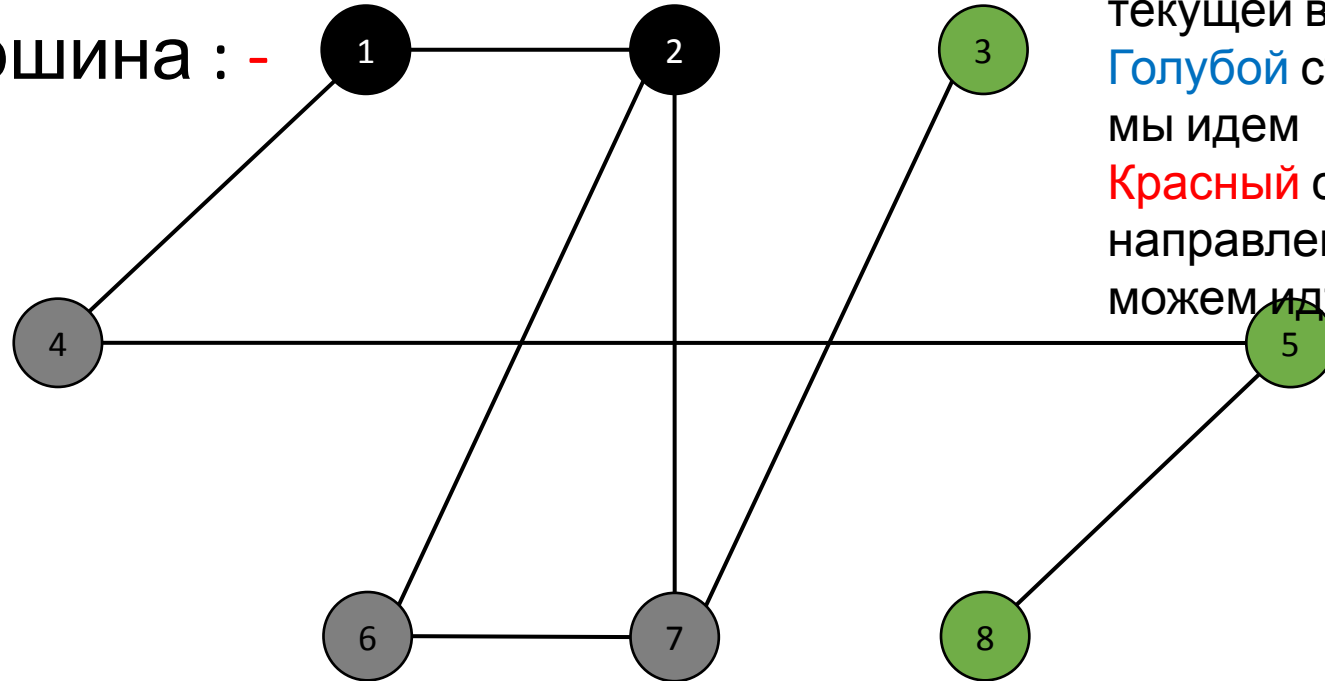
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2}

Очередь : {4, 6, 7}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

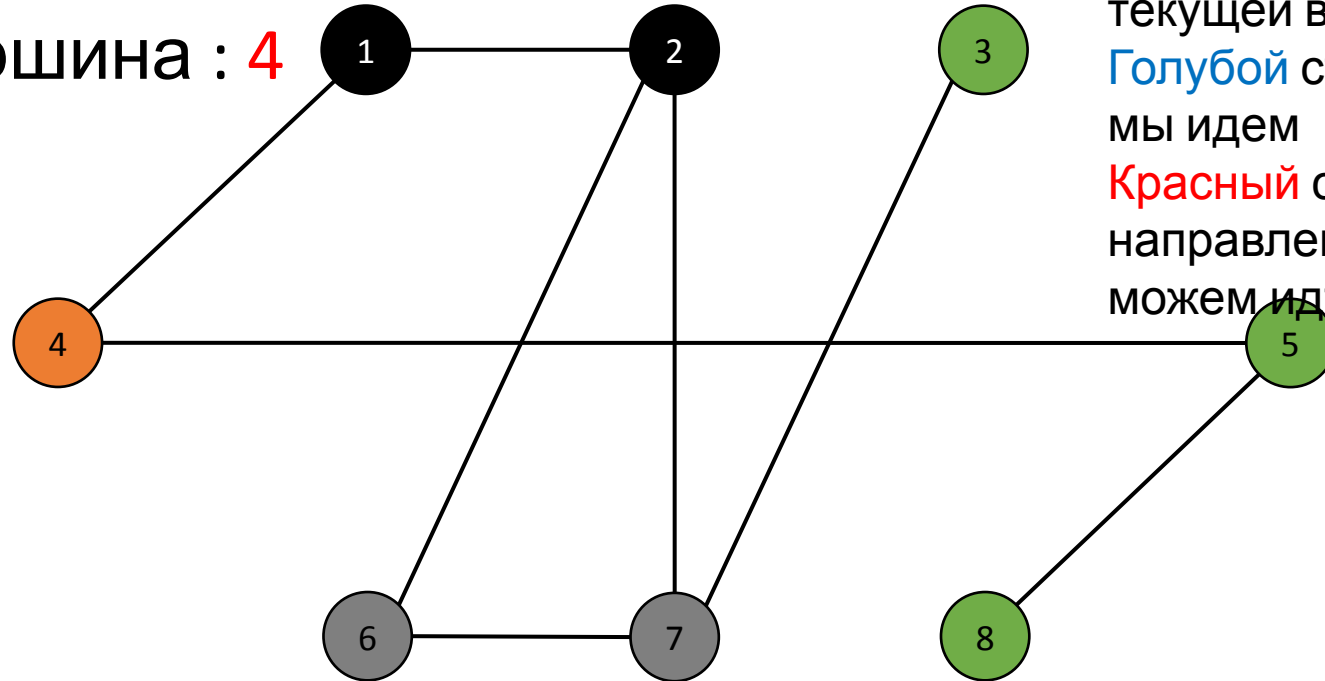
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7}

Текущая вершина : 4



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

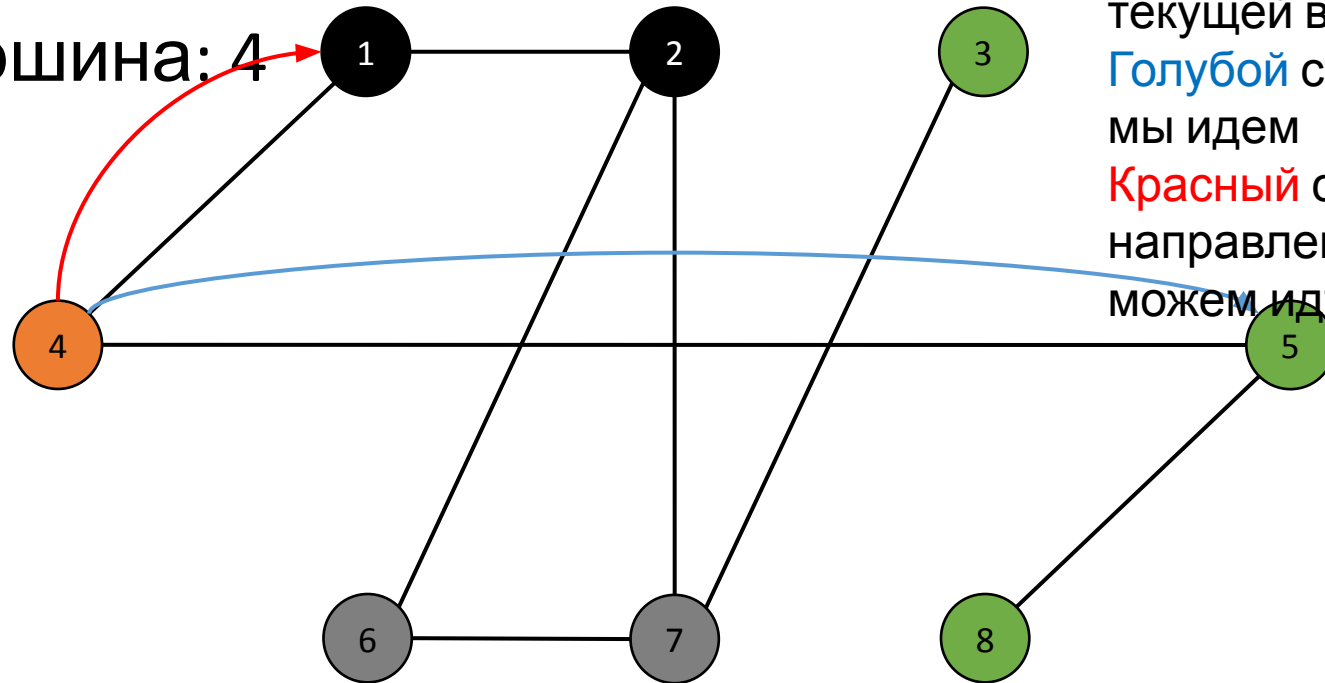
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7}

Текущая вершина: 4



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

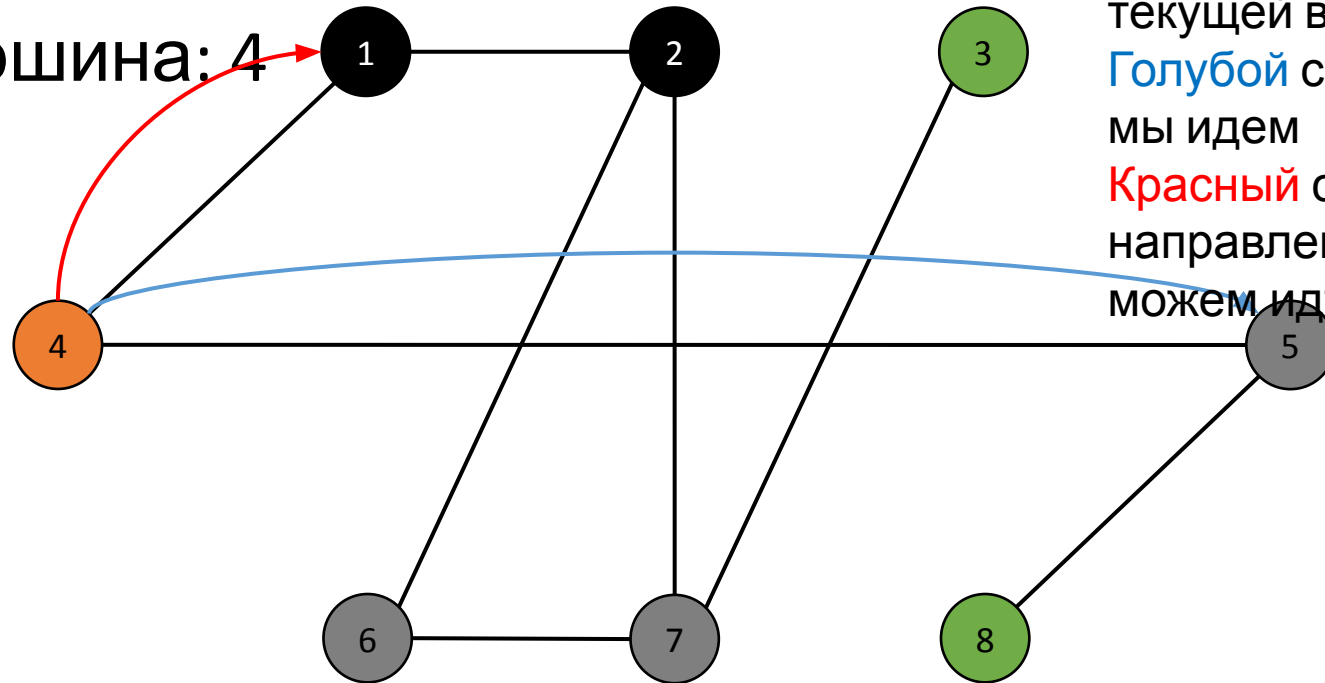
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7, 5}

Текущая вершина: 4



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

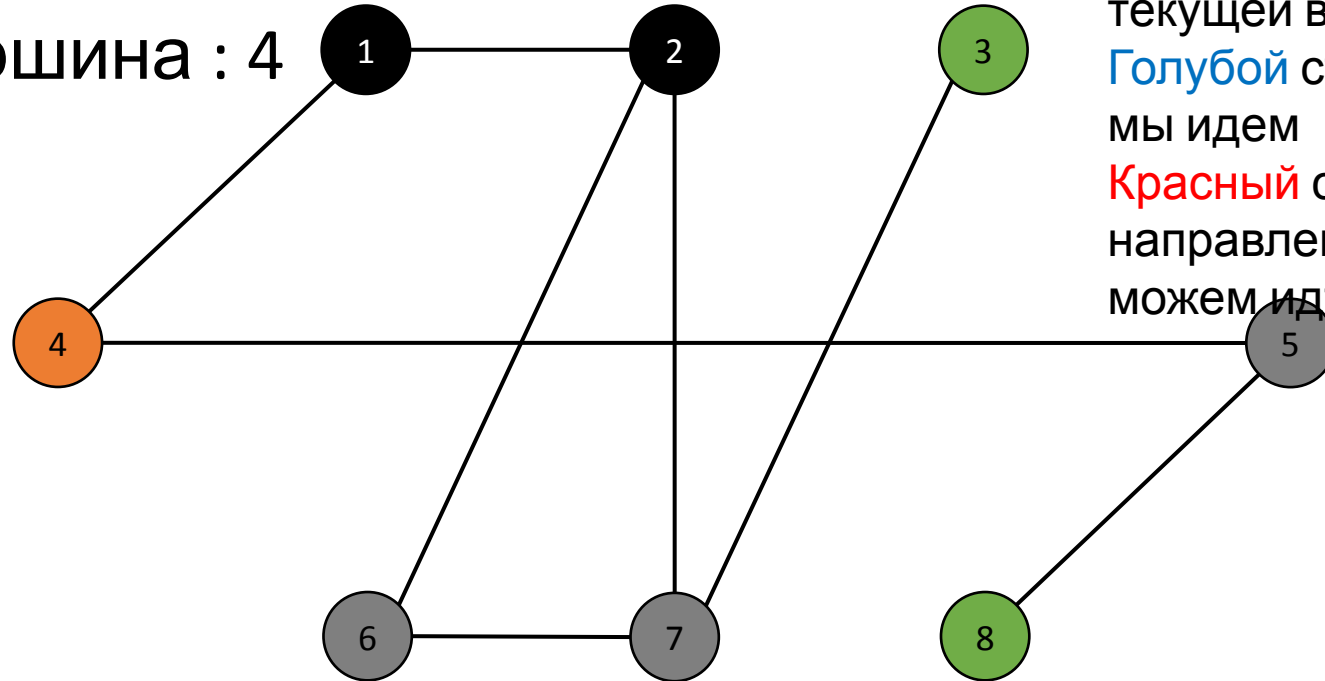
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7, 5}

Текущая вершина : 4



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

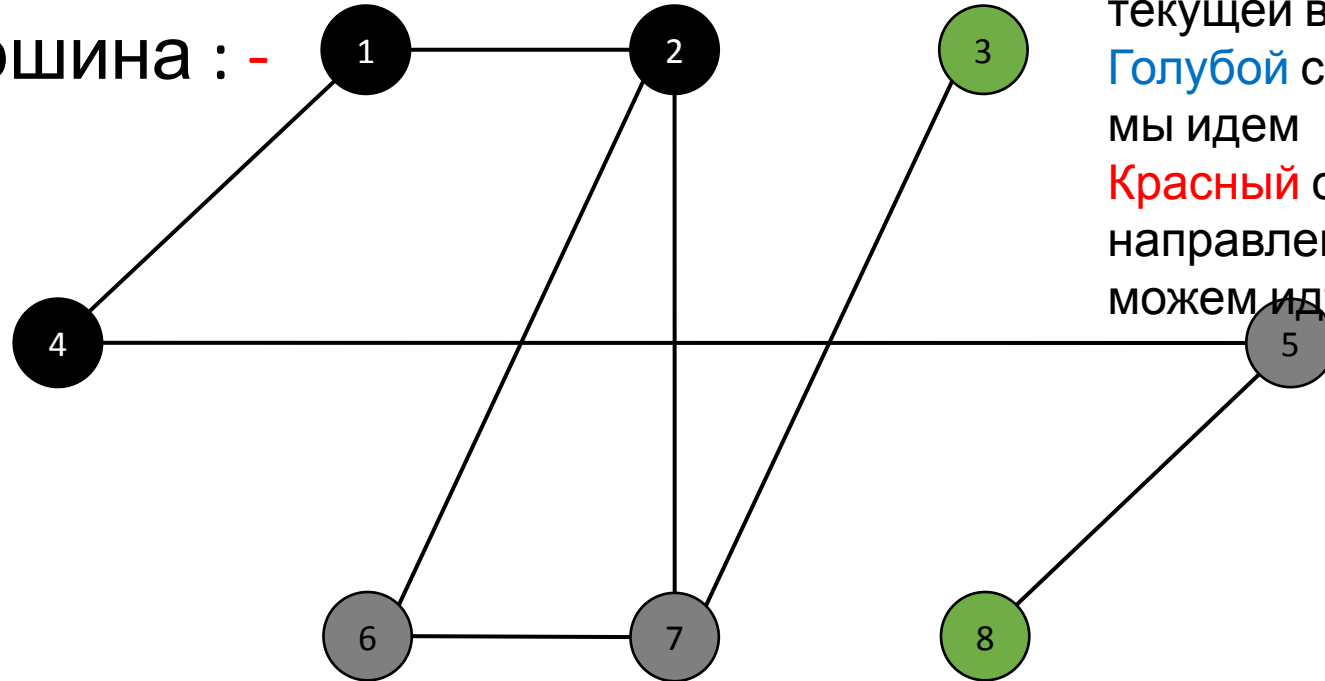
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4}

Очередь : {6, 7, 5}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

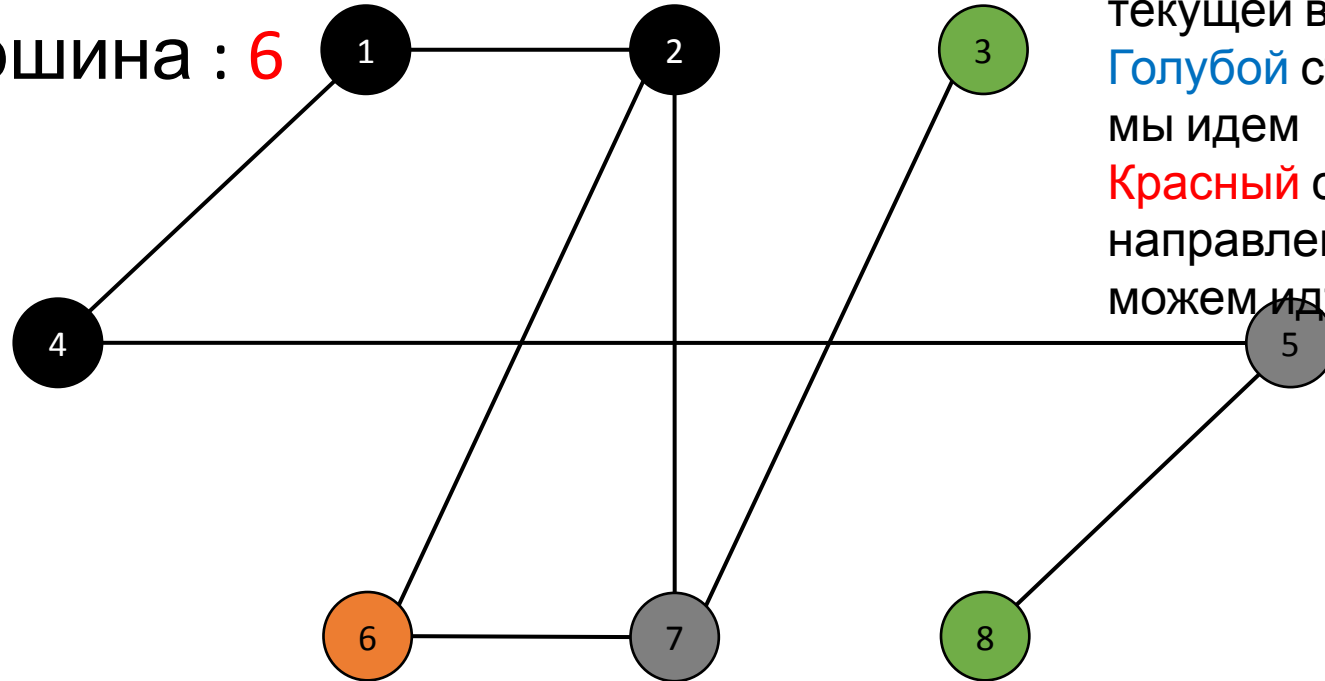
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : 6



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

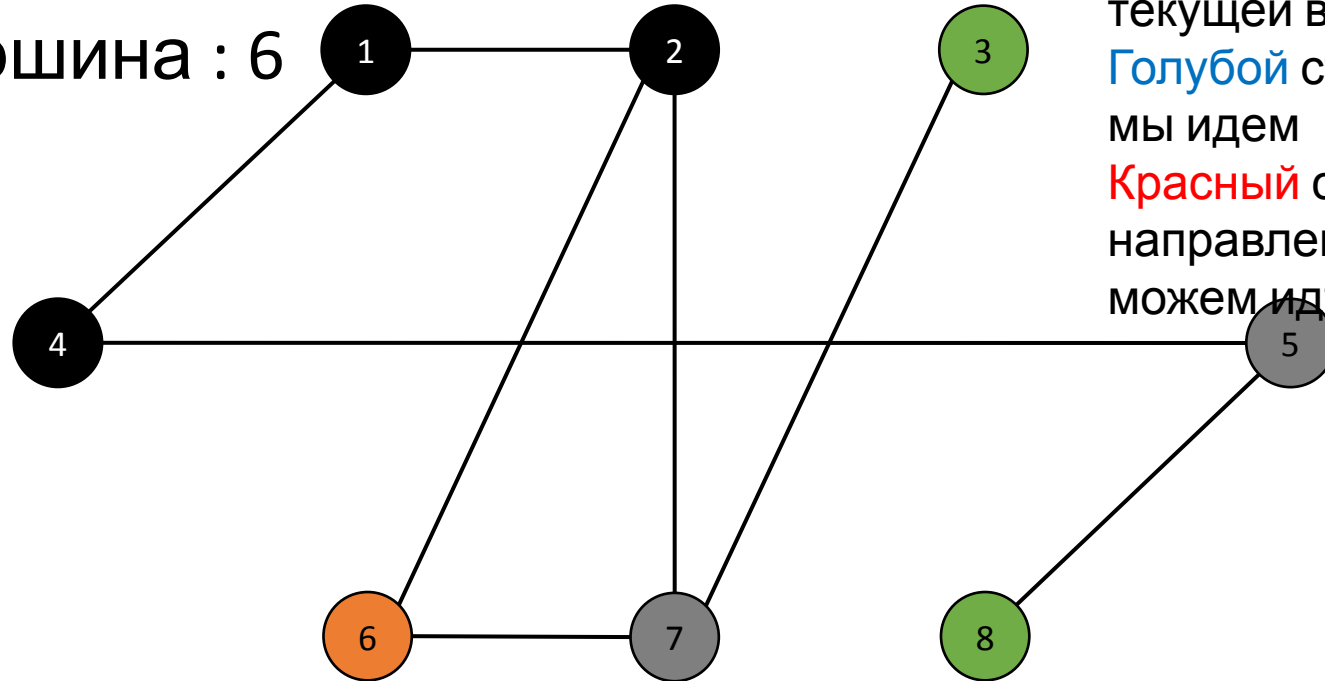
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : 6



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

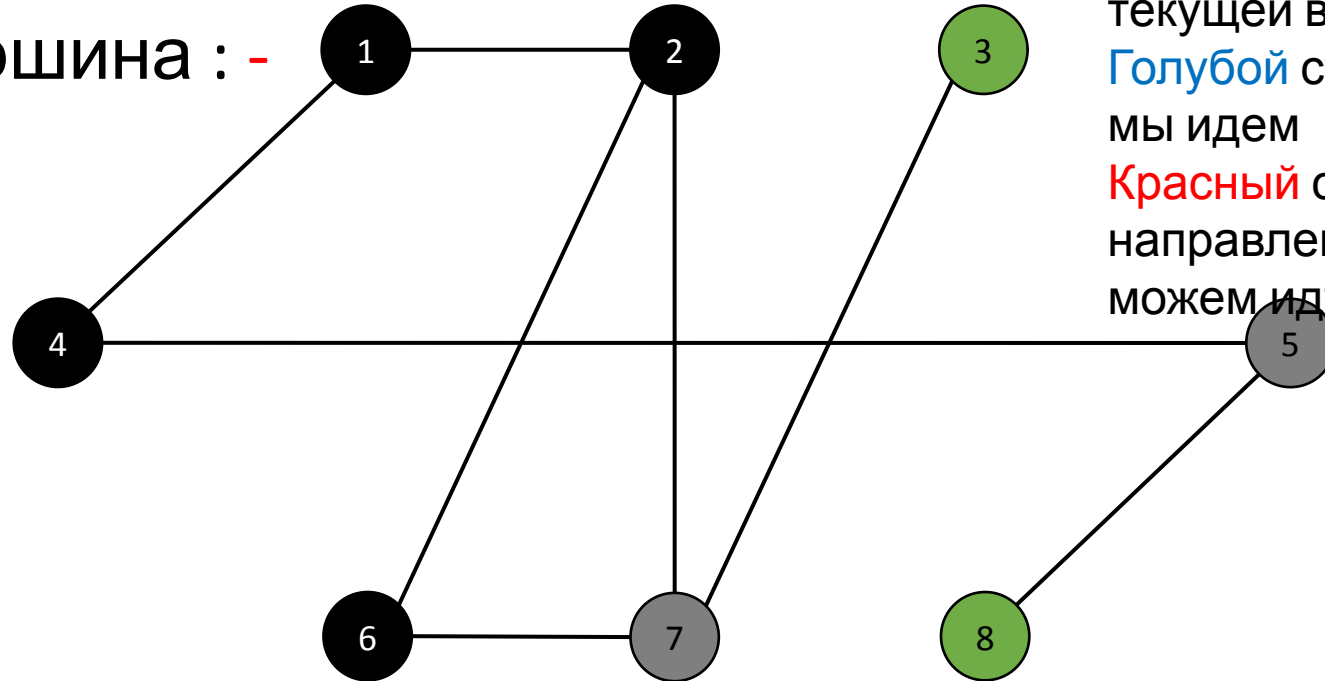
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6}

Очередь : {7, 5}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

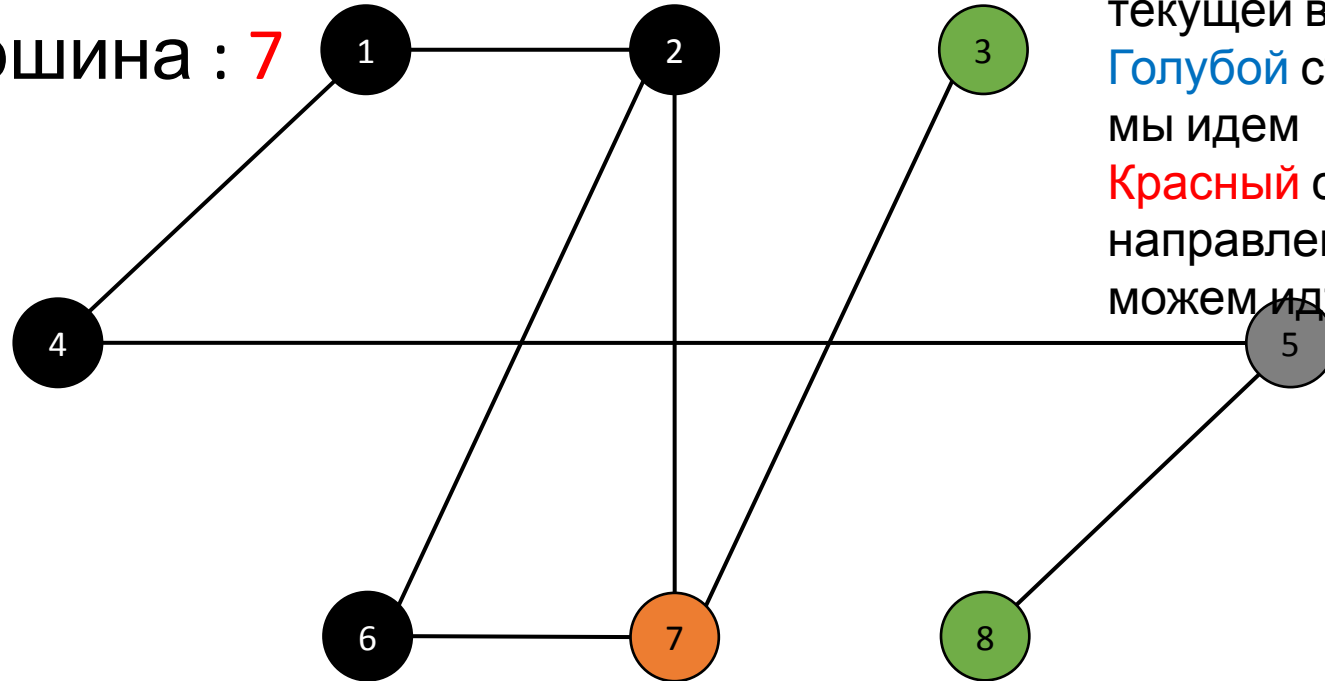
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5}

Текущая вершина : 7



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

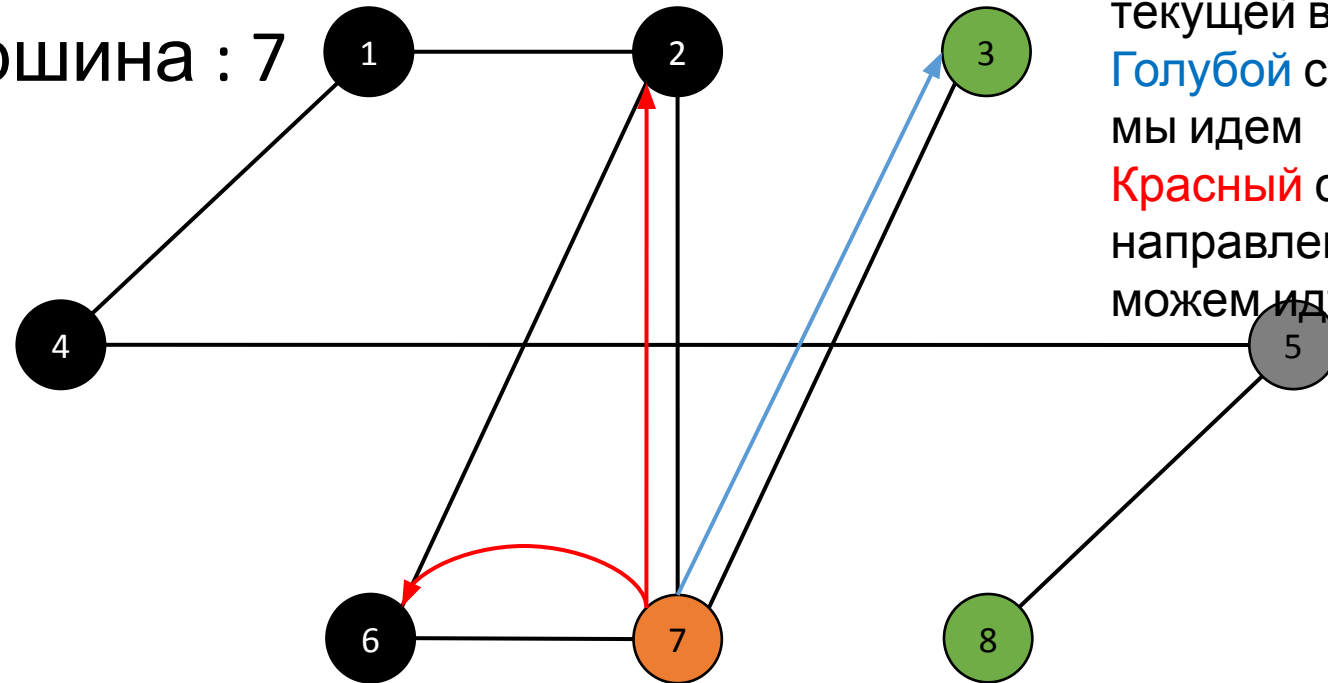
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5}

Текущая вершина : 7



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

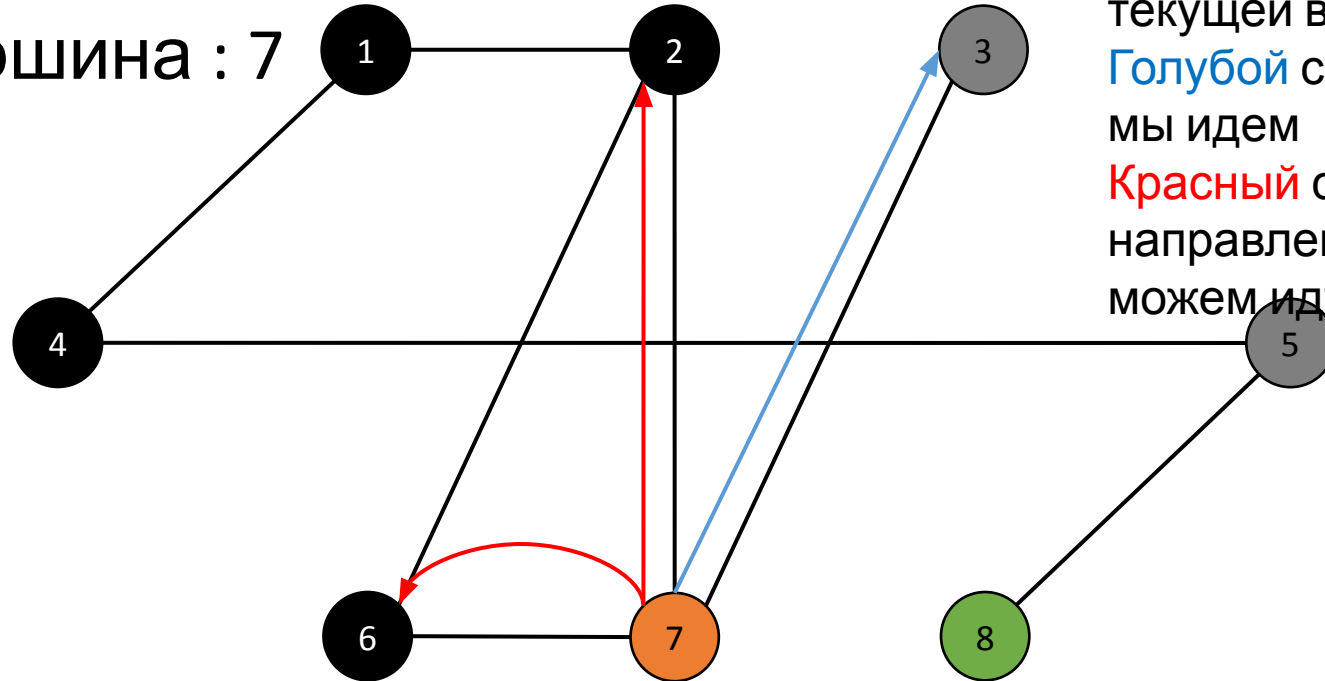
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5, 3}

Текущая вершина : 7



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

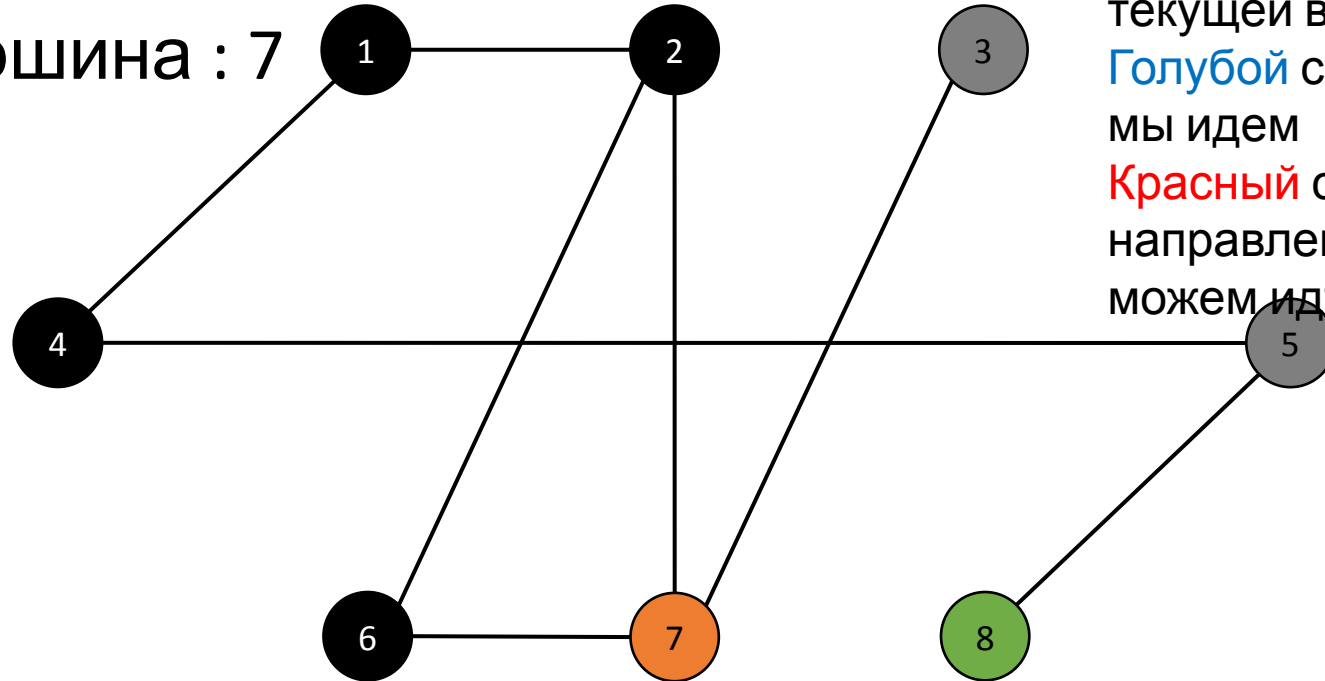
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5, 3}

Текущая вершина : 7



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

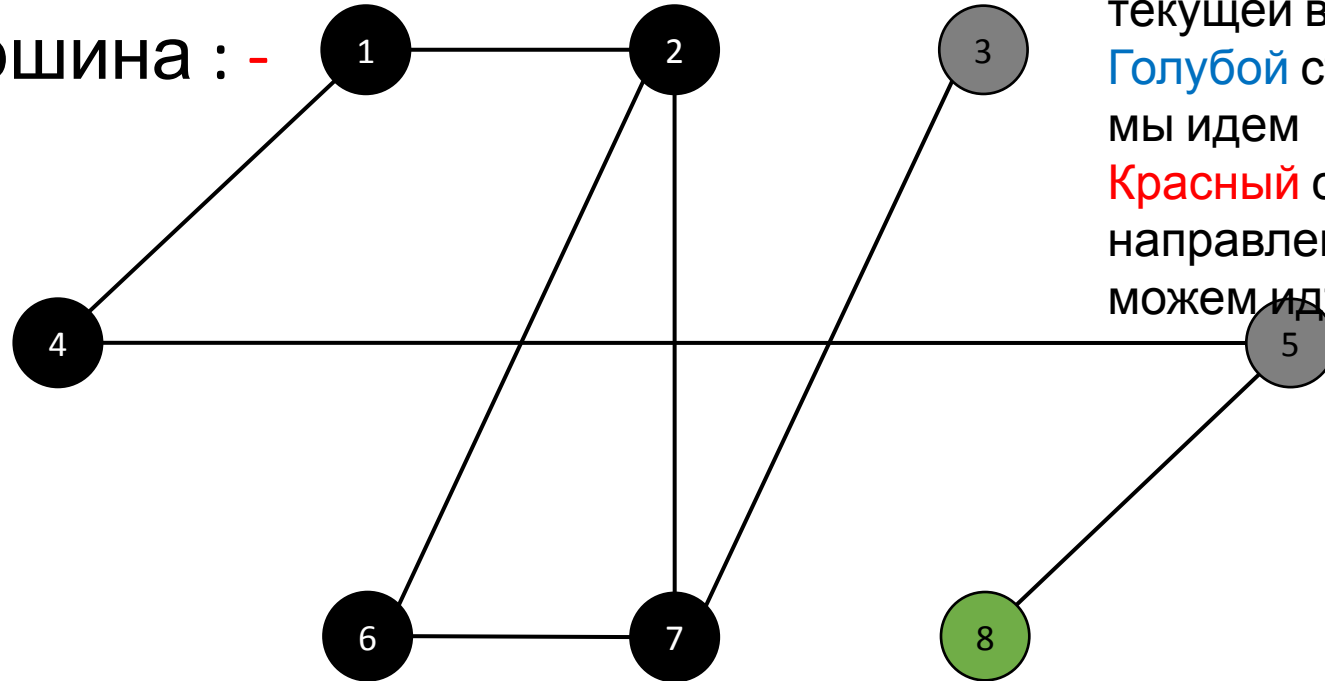
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7}

Очередь : {5, 3}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

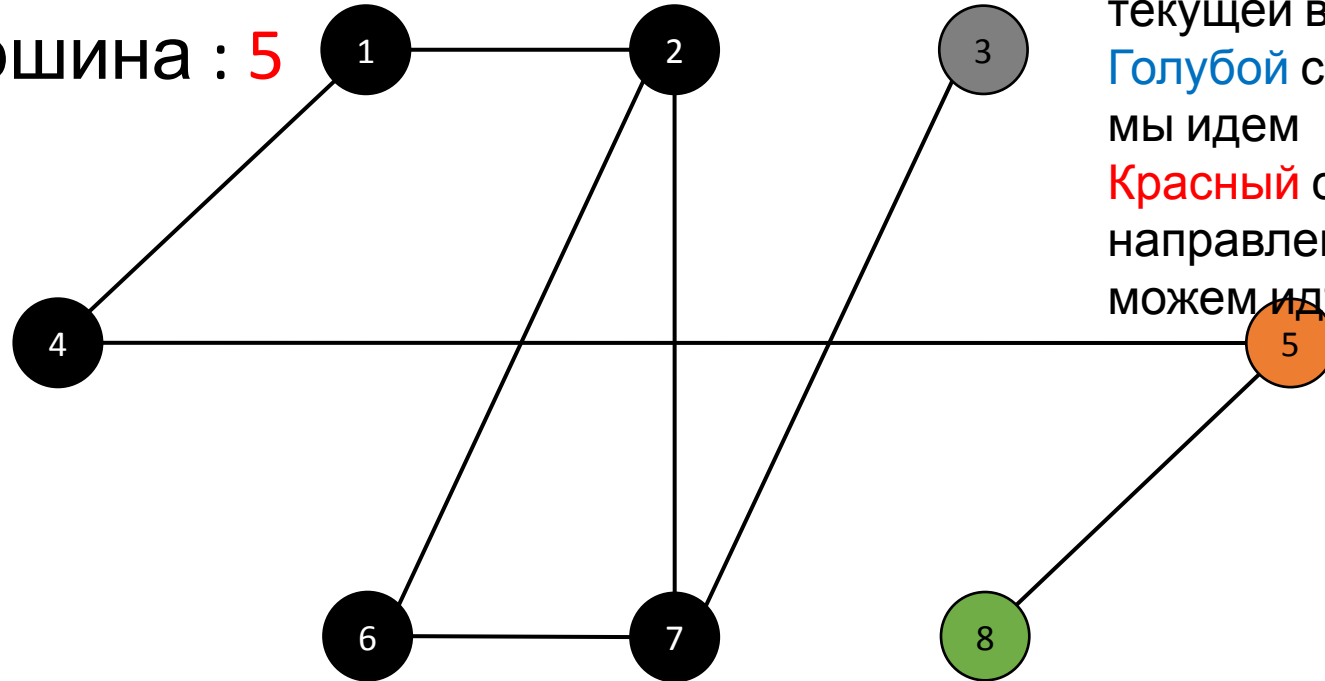
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3}

Текущая вершина : 5



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

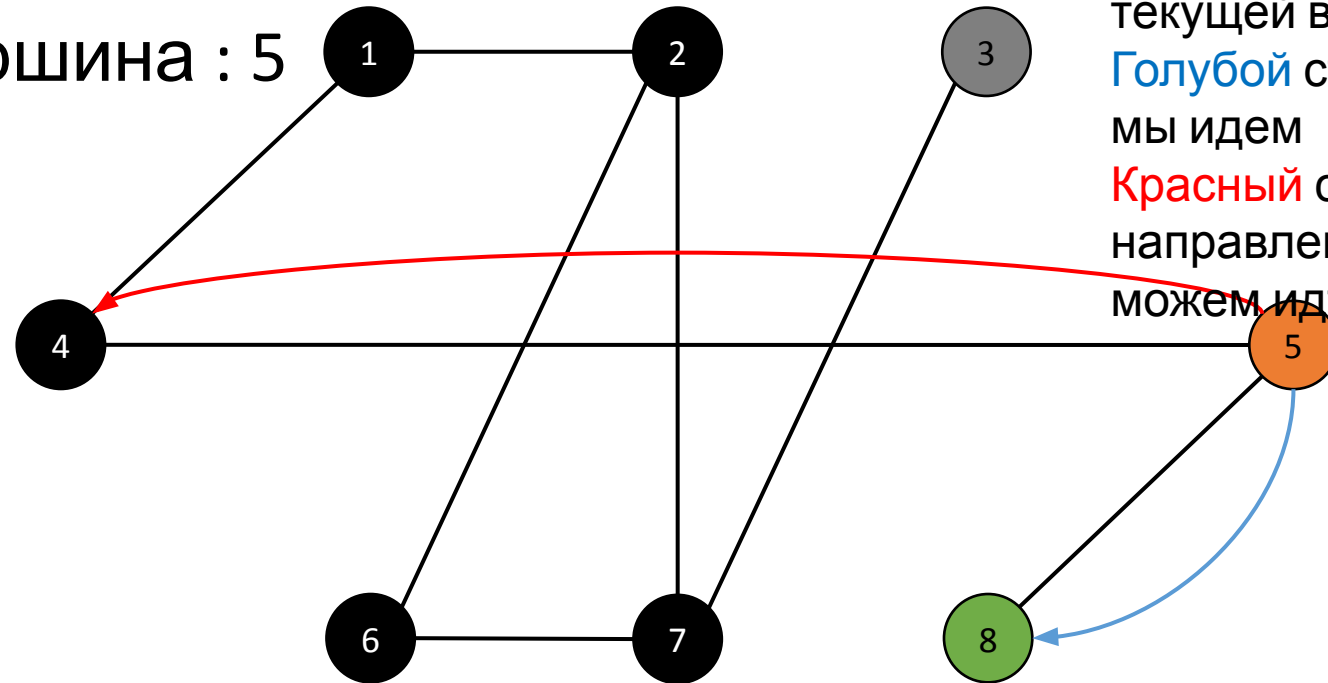
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3}

Текущая вершина : 5



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

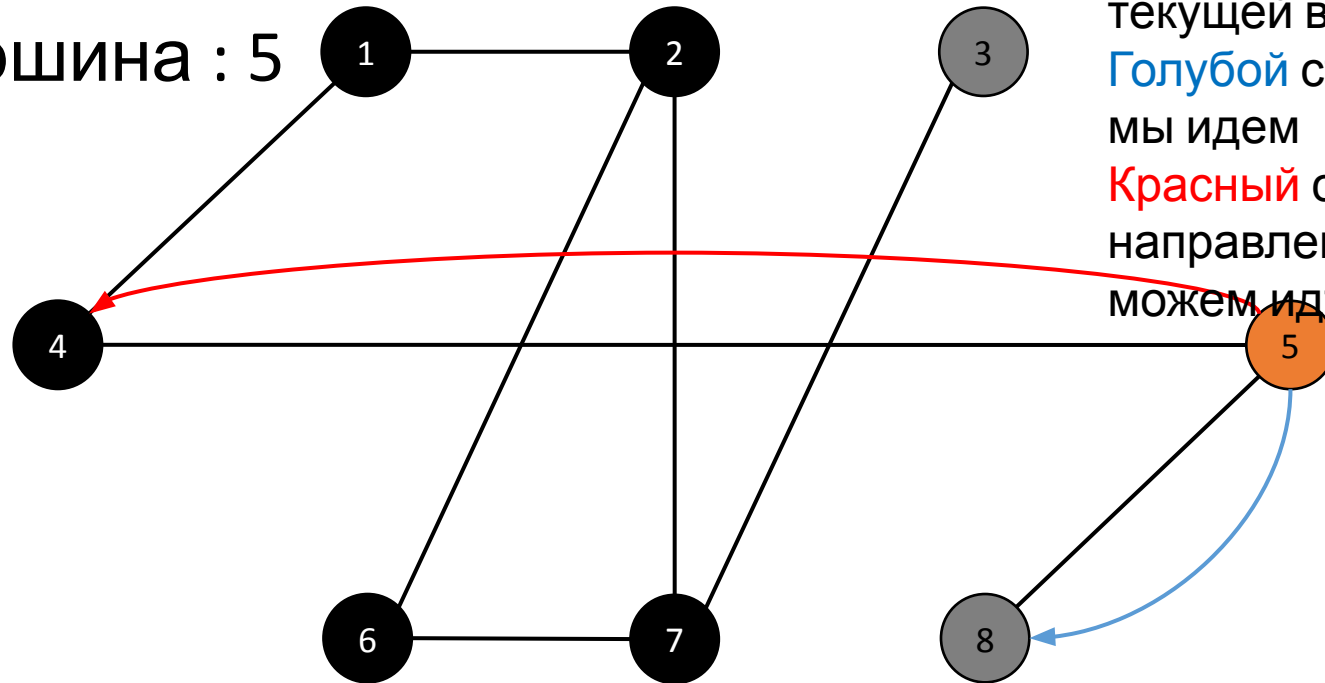
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3, 8}

Текущая вершина : 5



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

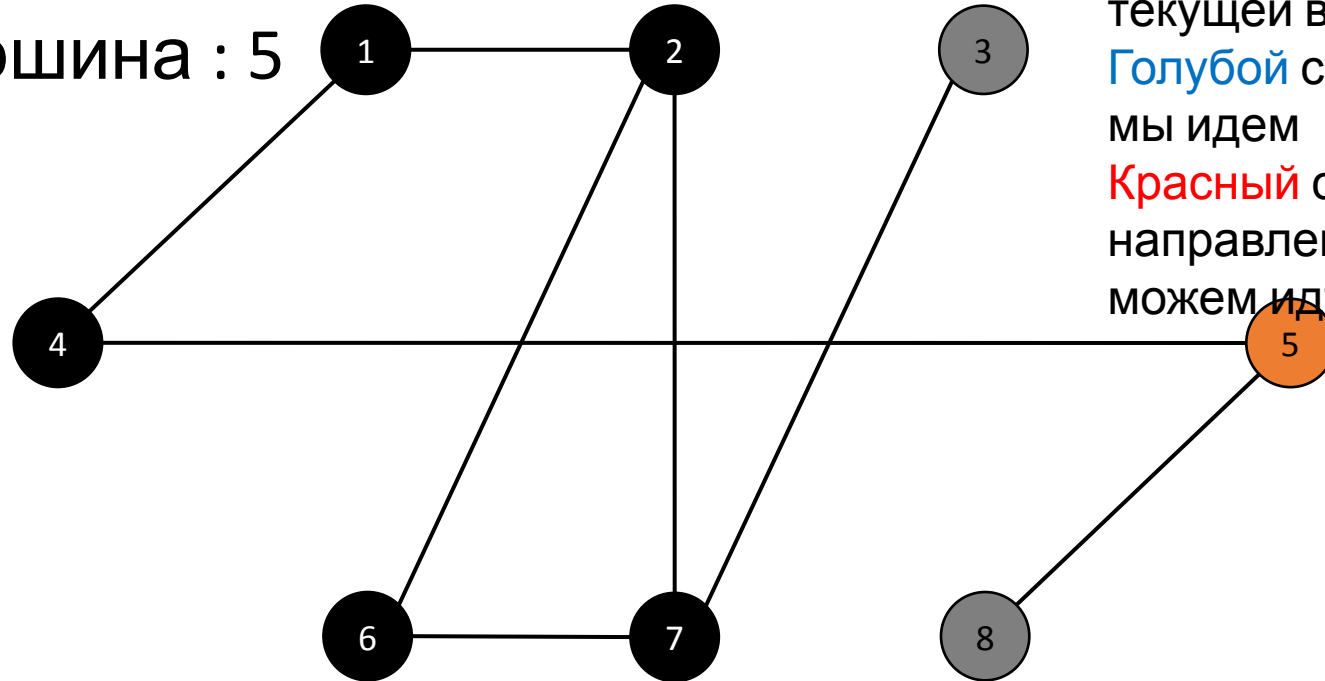
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3, 8}

Текущая вершина : 5



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

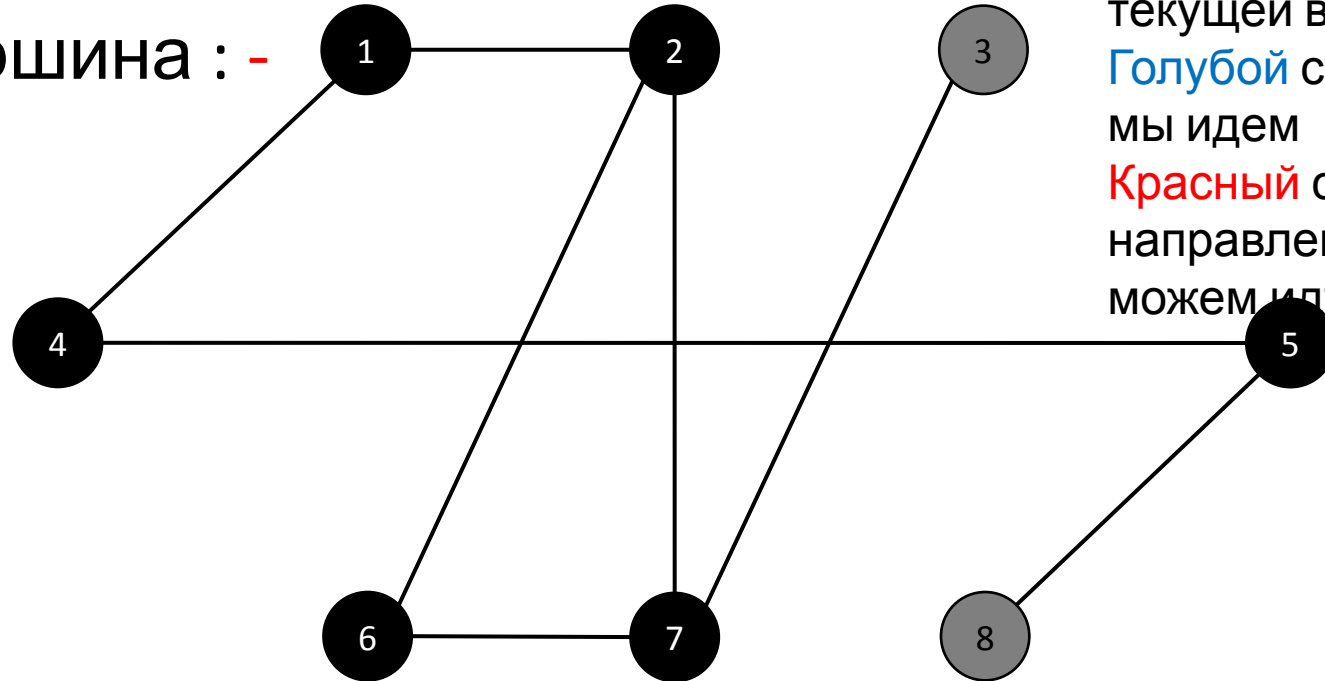
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5}

Очередь : {3, 8}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

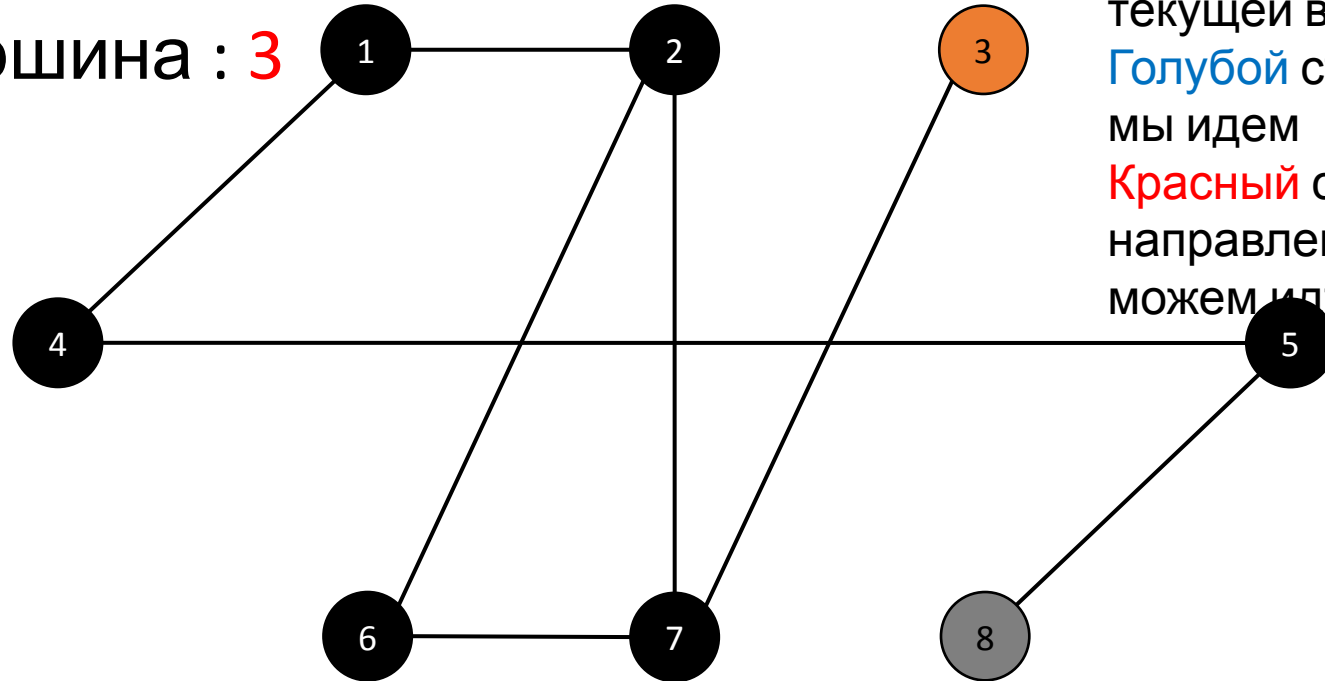
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : 3



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

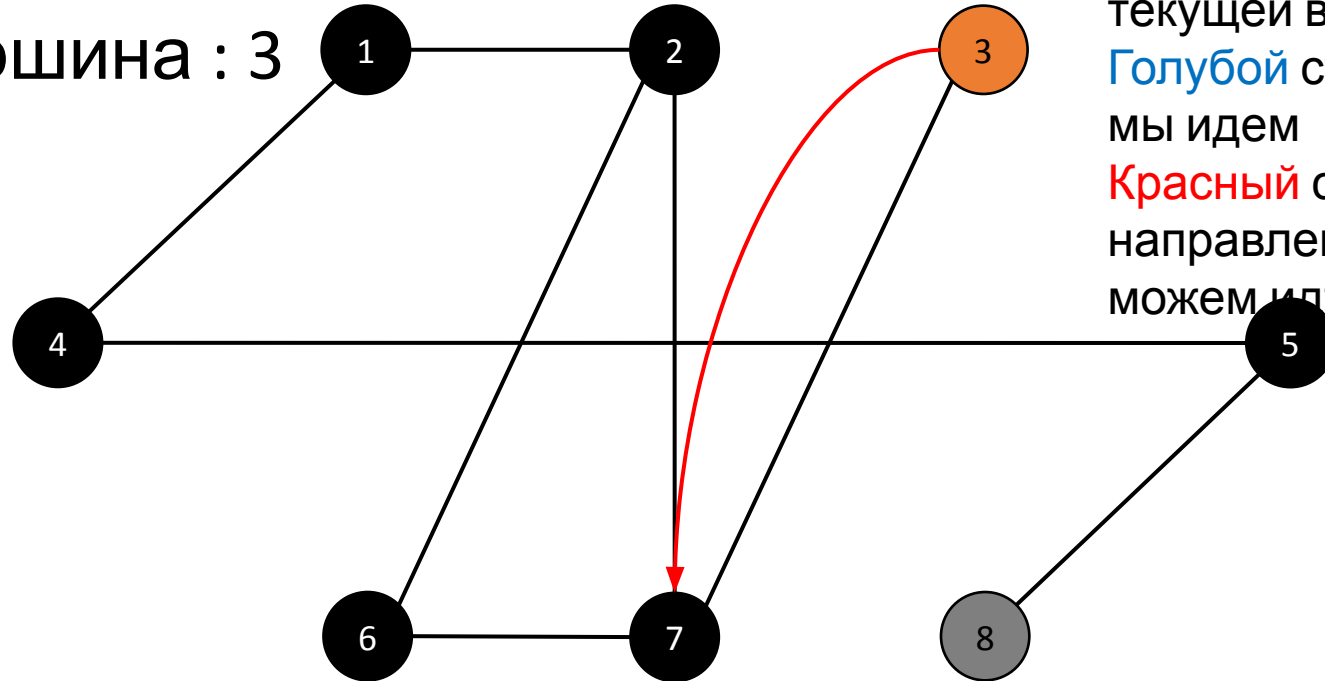
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : 3



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

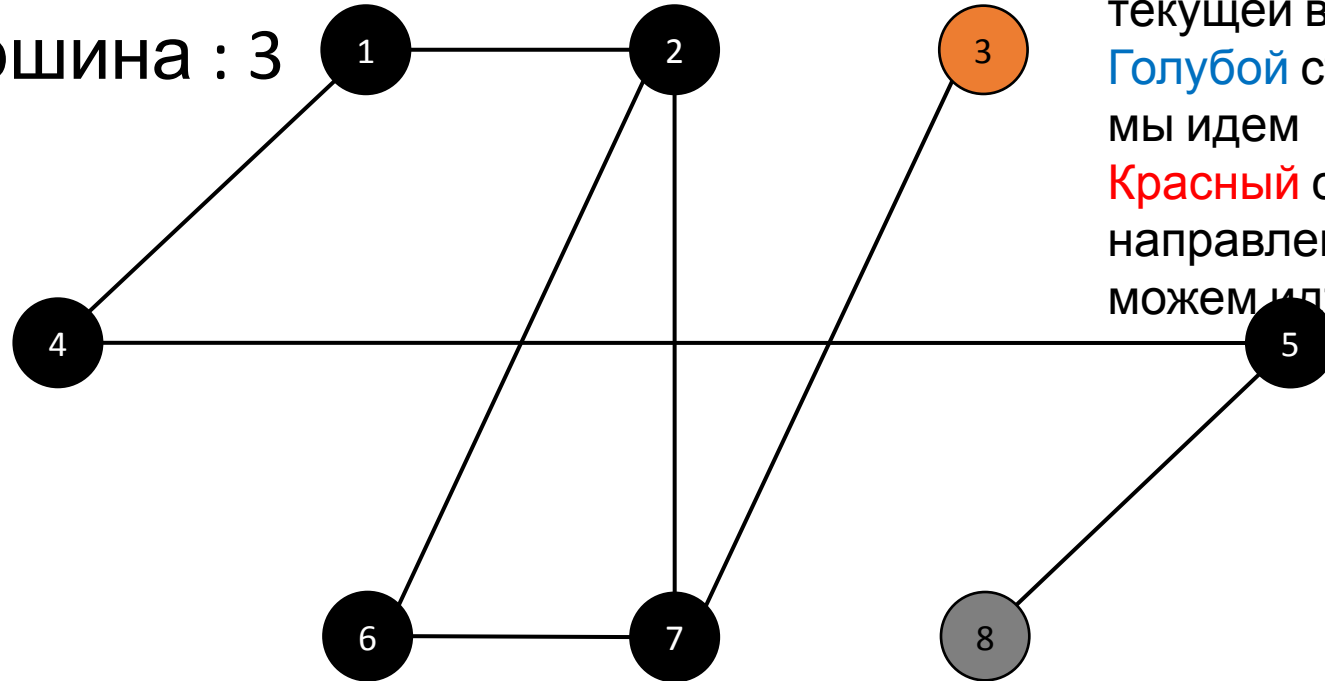
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : 3



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

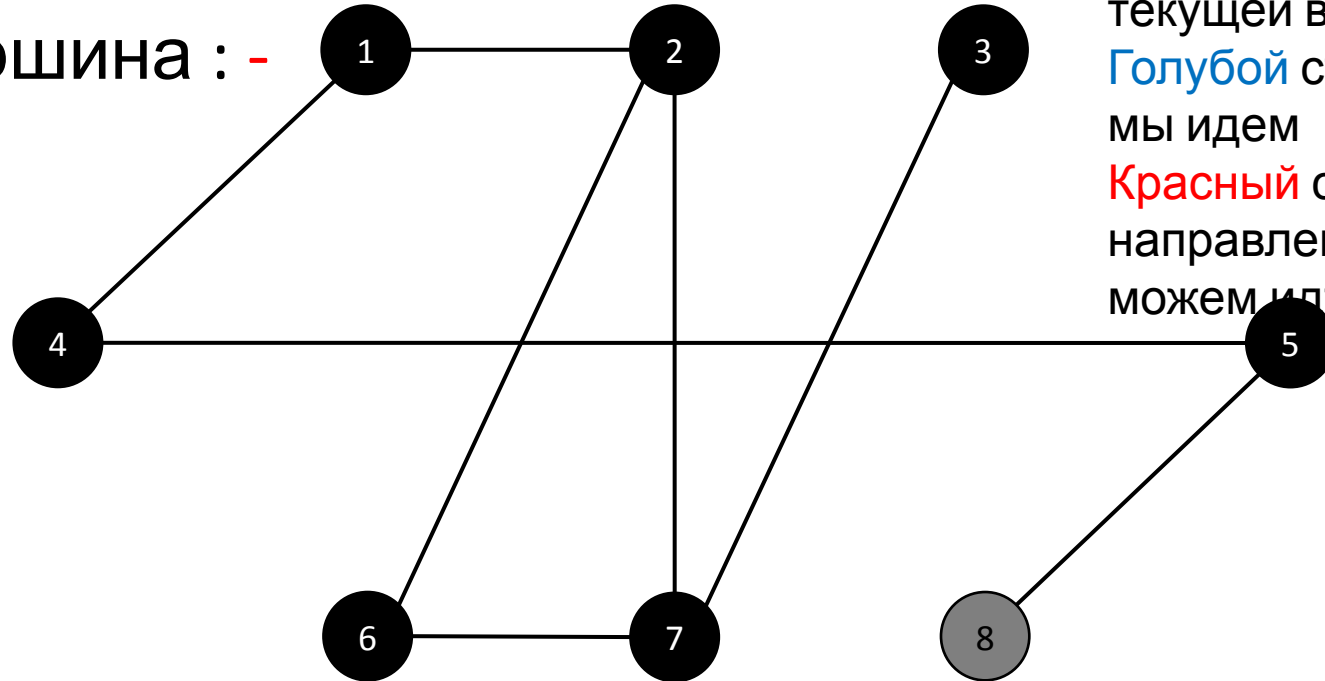
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3}

Очередь : {8}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

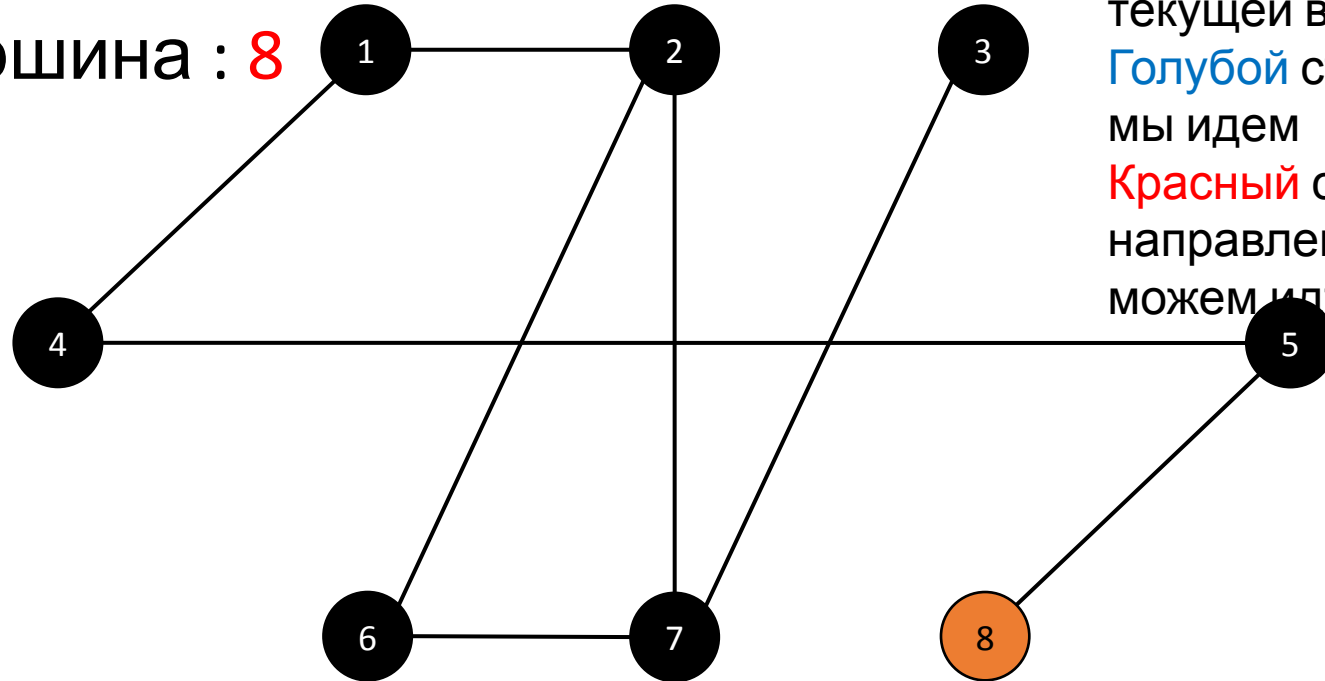
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

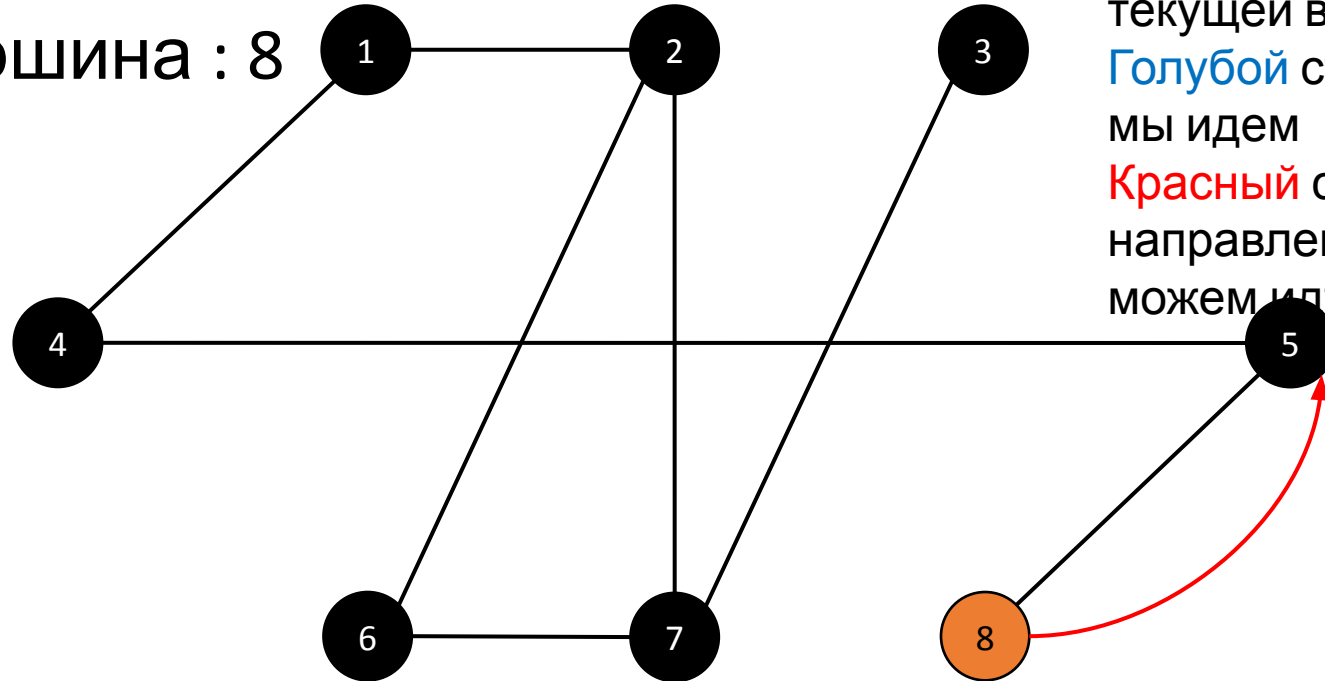
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

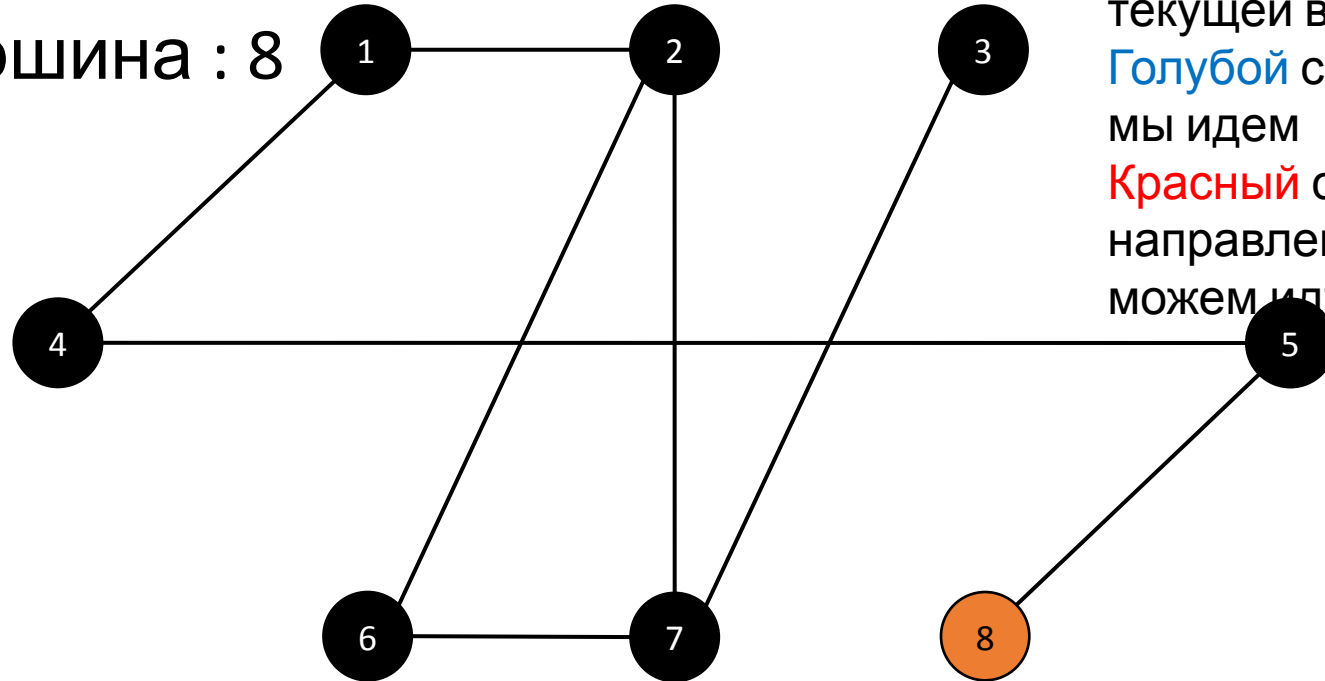
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : 8



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

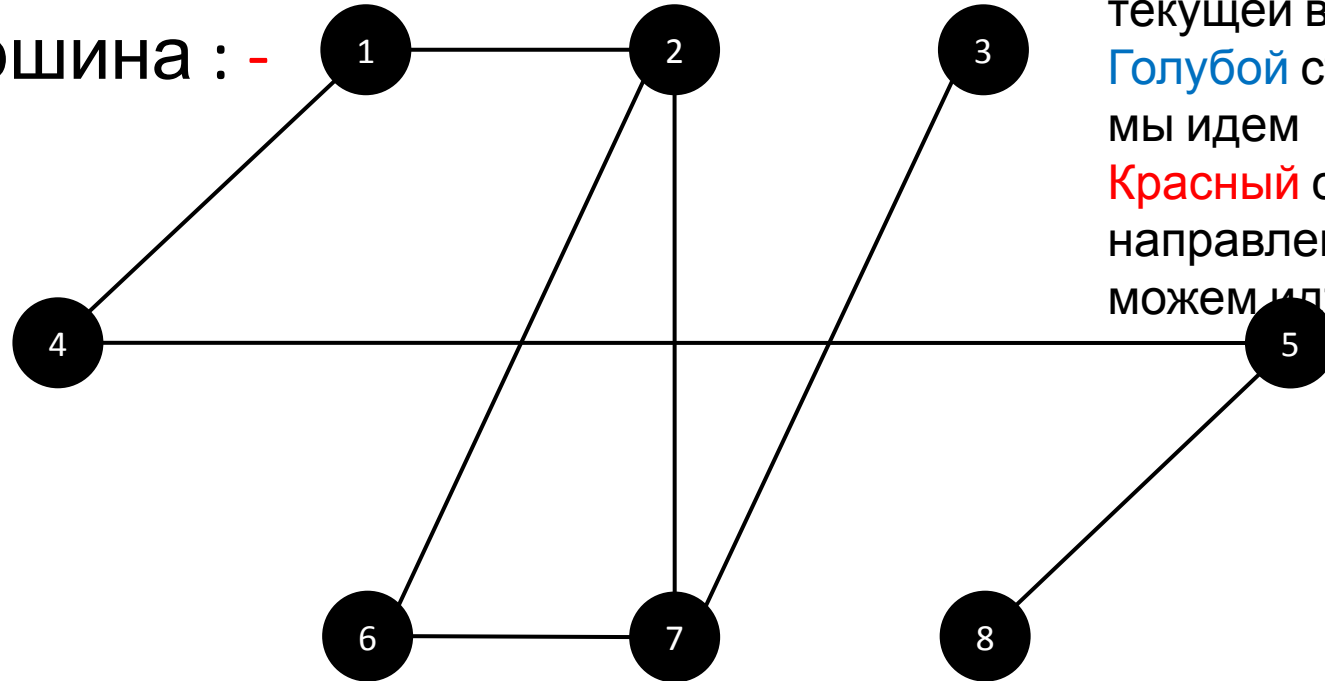
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

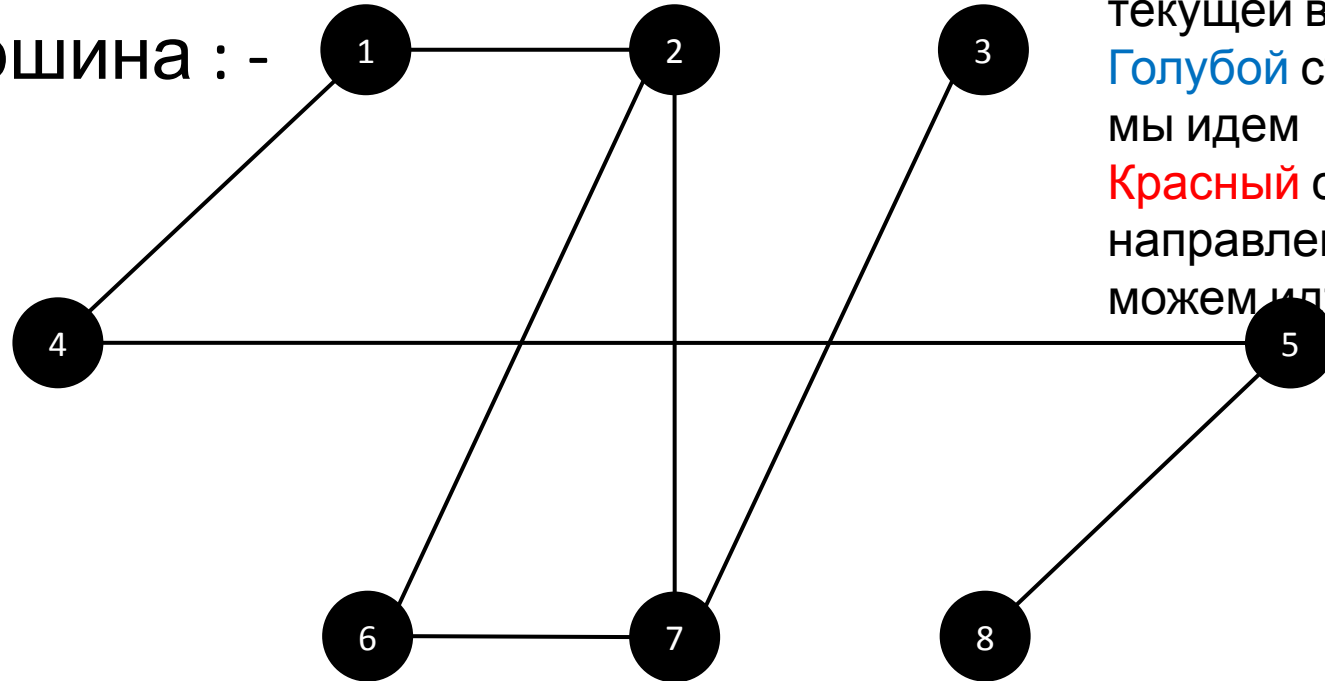
Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

Посещенные вершины : {1, 2, 4, 6, 7, 5, 3, 8}

Очередь : {}

Текущая вершина : -



Легенда:

Зеленый вершины не посещены

Серый вершины в очереди

Черный вершины посещаются

Оранжевый вершина является текущей вершиной

Голубой стрелки пути по которому мы идем

Красный стрелки - это направление, в котором мы не можем идти

Breadth First Search (BFS)

- Сложность :

- BFS отмечает каждый узел, посещенный только один раз
- BFS проверить каждое ребро
- Также $O(|V| + |E|)$ если мы используем список соединений
- И $O(|V|^2)$ если мы используем матрицу смежности (потому что нам нужно найти каждое ребро, поэтому нужно перебрать всю матрицу).