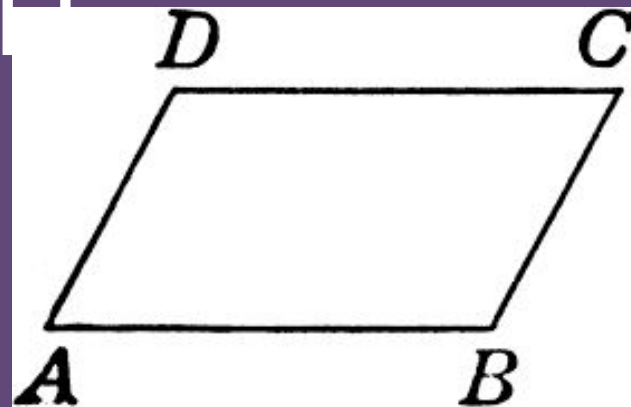


Параллелограмм и Трапеция



Параллелограмм

Параллелограмм - это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

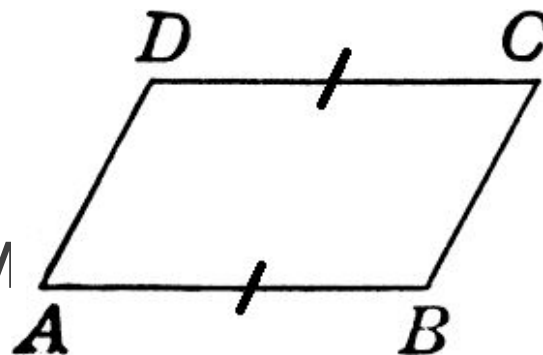


Признаки параллелограмма

Первый признак параллелограмма.

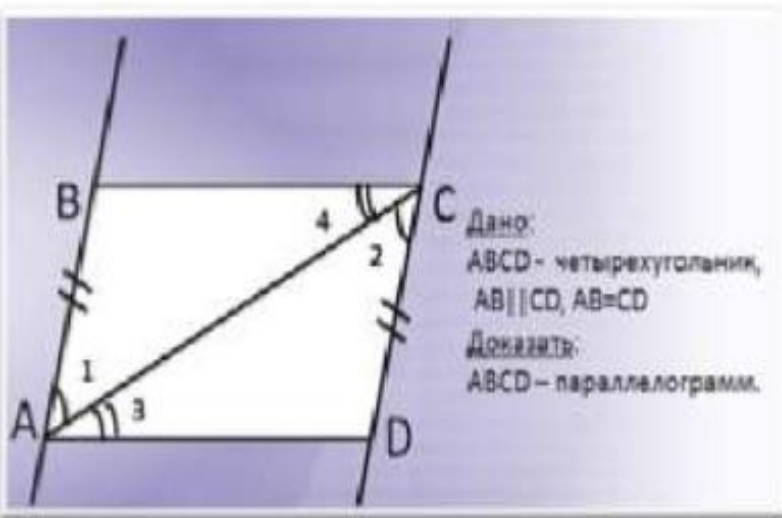
Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

$AB \parallel CD$, $AB = CD$, значит
ABCD-параллелограмм



Доказательство 1-го признака параллелограмма

Теорема 1.



Доказательство:

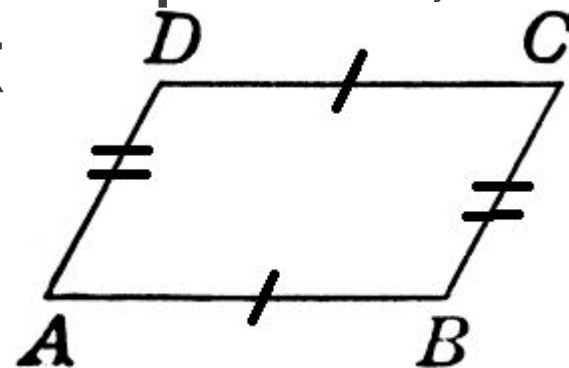
- 1) Дополнительное построение: диагональ AC.
- 2) $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при $AB \parallel CD$ и секущей AC.
- 3) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по I признаку равенства треугольников ($AB = CD$, AC – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$), а в равных треугольниках равны соответственные элементы, следовательно, $\angle 3 = \angle 4$.
- 4) $\angle 3$ и $\angle 4$ накрест лежащие углы при прямых BC, AD и секущей AC, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $AD \parallel BC$.
- 5) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, следовательно ABCD – параллелограмм по определению, что и требовалось доказать.

Признаки параллелограмма

2. Второй признак параллелограмма. Если в четырехугольнике каждые две противоположные стороны равны, то этот четырехугольник параллелограмм.

$$AB=CD,$$

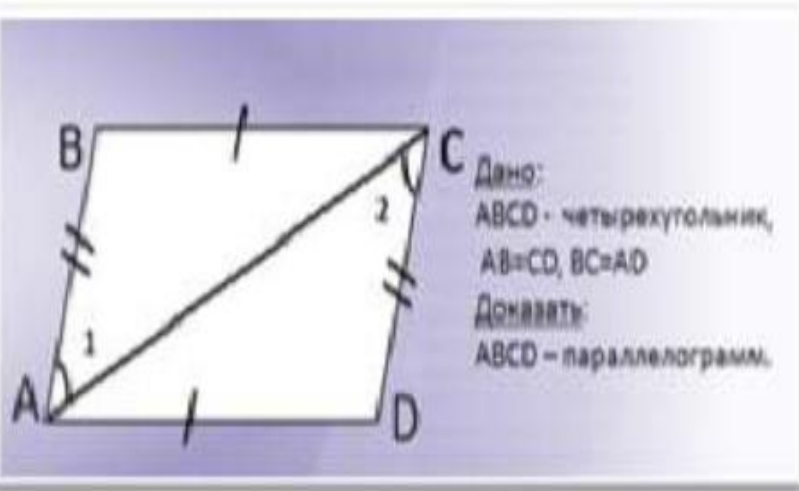
$$AD=BC,$$



значит ABCD-параллелограмм

Доказательство 2-го признака параллелограмма

Теорема 2.



Доказательство:

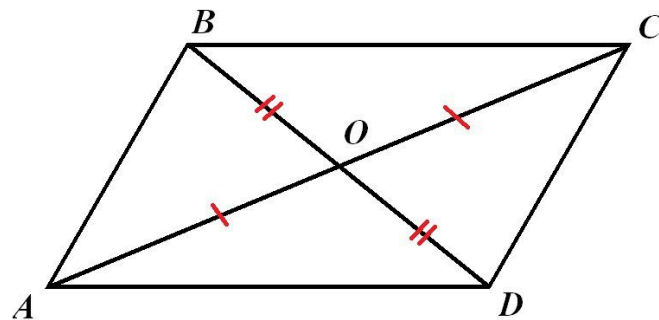
- 1) Дополнительное построение: диагональ AC.
- 2) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по III признаку равенства треугольников (AB=CD, AD=BC, AC – общая сторона), а в равных треугольниках равны соответственные элементы, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.
- 3) $\angle 1$ и $\angle 2$ накрест лежащие углы при прямых AB, CD и секущей AC, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $AB \parallel CD$.
- 4) $AB \parallel CD$, $AB = CD$, следовательно, ABCD – параллелограмм по первому признаку, что и требовалось доказать.

Признаки параллелограмма

3. Третий признак
параллелограмма. Если в
четырёхугольнике диагонали
точкой пересечения делятся
пополам, то этот четырёхугольник
параллелограмм.

$$BO=OD,$$

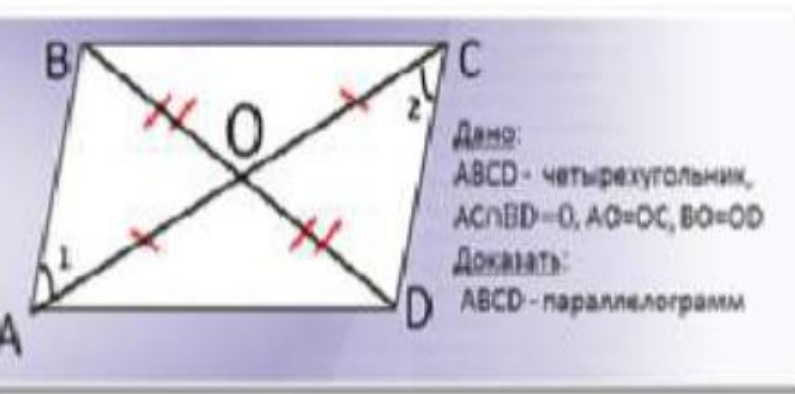
$$AO=OC,$$



значит ABCD-параллелограмм

Доказательство 3-го признака параллелограмма

Теорема 3.



Доказательство:

- 1) $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные.
- 2) $\triangle AOB = \triangle COD$ по I признаку ($AO = OC$, $BO = OD$, $\angle AOB = \angle COD$ по двум сторонам и углу между ними), а в равных треугольниках равны соответственные элементы, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $AB = CD$.
- 3) $\angle 1$ и $\angle 2$ накрест лежащие углы при прямых AB , CD и секущей AC , $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $AB \parallel CD$.
- 4) $AB \parallel CD$, $AB = CD$, следовательно, ABCD – параллелограмм по первому признаку, что и требовалось доказать.

Основные свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны параллелограмма имеют одинаковую длину:

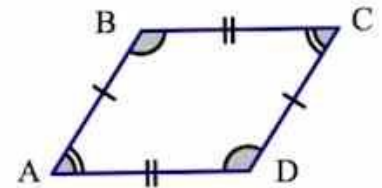
$$AB = CD, BC = AD$$

2. Противоположные стороны параллелограмма параллельны:

$$AB \parallel CD, BC \parallel AD$$

3. Противоположные углы параллелограмма равны:

$$\angle ABC = \angle CDA, \angle BCD = \angle DAB$$



Основные свойства параллелограмма

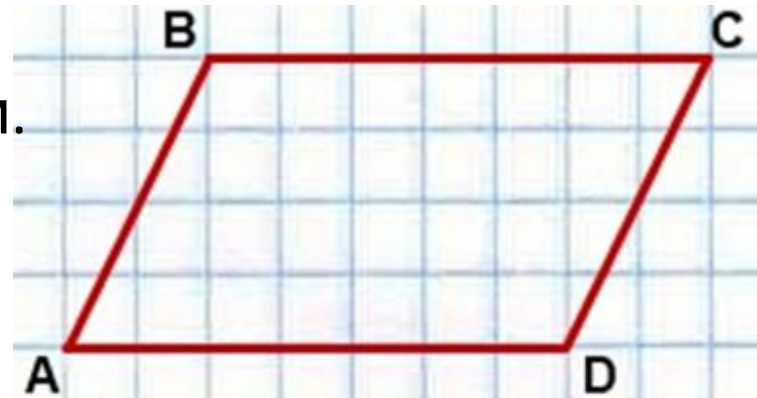
Дано:

$ABCD$ — параллелограмм.

Доказать:

$AB=CD$, $AD=BC$,

$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



Основные свойства параллелограмма

Рассмотрим треугольники ABD и CDB .

- 1) сторона BD — общая
- 2) $\angle ABD = \angle CDB$ (как внутренние накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей BD)
- 3) $\angle ADB = \angle CBD$ (как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD)

Значит, $\triangle ABD = \triangle CDB$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон:

$$AB = CD, AD = BC$$

и равенство соответствующих углов: $\angle A = \angle C$.

В пунктах 2) и 3) обосновано, что $\angle ABD = \angle CDB$ и $\angle ADB = \angle CBD$.

Следовательно,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \angle CDB + \angle ADB = \angle ADC,$$

то есть, $\angle B = \angle D$.

Что и требовалось доказать.



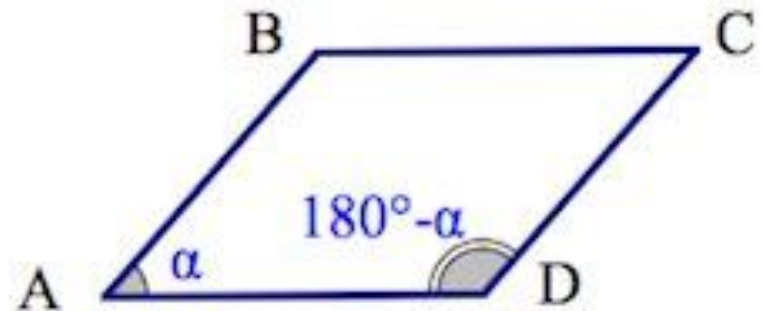
Основные свойства параллелограмма

4. Сумма углов параллелограмма равна 360° :

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^\circ$$

5. Сумма углов параллелограмма прилежающих к любой стороне равна 180° :

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle BCD &= \angle BCD + \angle CDA = \angle CDA + \angle DAB \\ &= \angle DAB + \angle DAB = 180^\circ \end{aligned}$$



Основные свойства параллелограмма

Свойство непосредственно вытекает из того, что углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними углами при параллельных прямых.

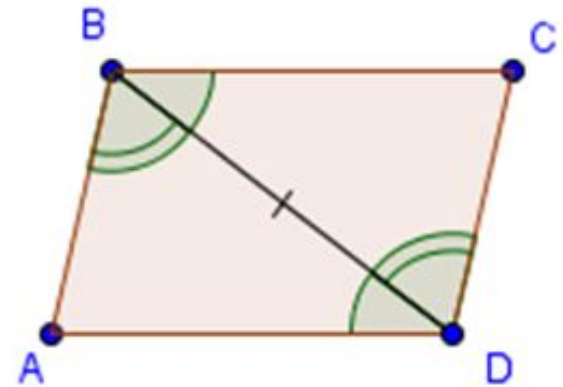
Для параллелограмма ABCD:

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей AB);

$\angle C + \angle D = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при $AD \parallel BC$ и секущей CD);

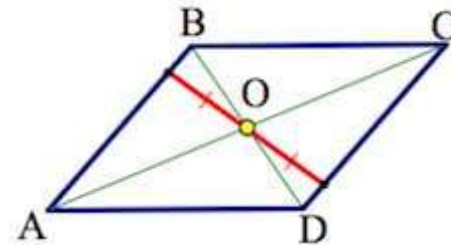
$\angle A + \angle D = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при $AB \parallel CD$ и секущей AD);

$\angle B + \angle C = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при $AB \parallel CD$ и секущей BC).



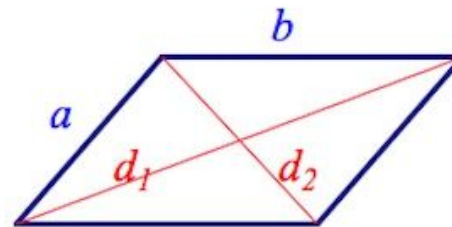
Основные свойства параллелограмма

6. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма



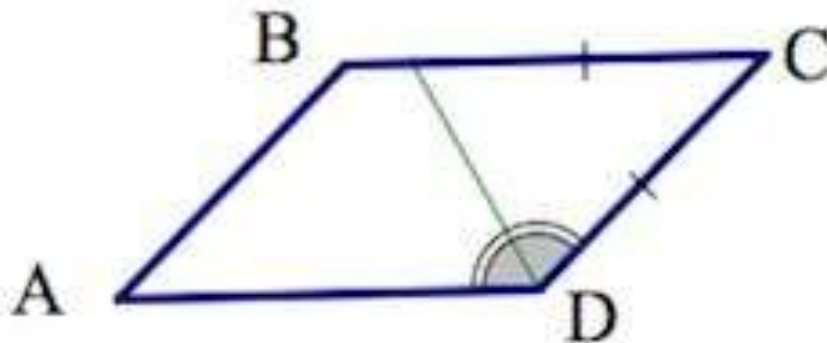
7. Диагонали d_1, d_2 параллелограмма и стороны a, b связаны следующим

соотношением: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$



Основные свойства параллелограмма

8. Биссектриса отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник



Основные свойства параллелограмма

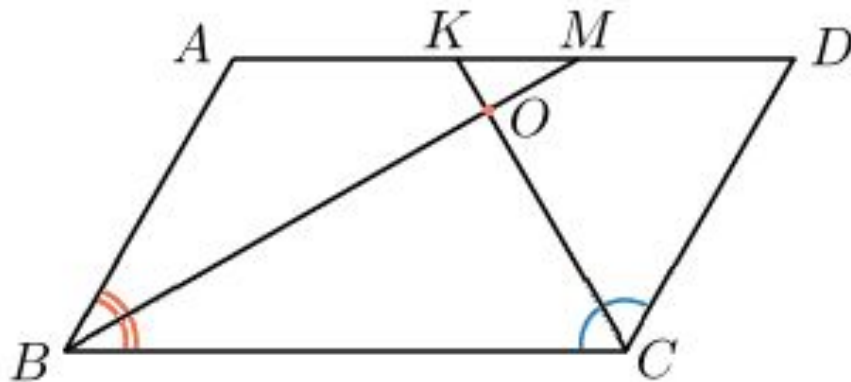
9. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$

10. Биссектрисы противоположных углов параллелограмма всегда параллельны

11. Биссектрисы соседних углов параллелограмма всегда пересекаются под прямым углом (90°)

Решение задач

Задача 1. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах

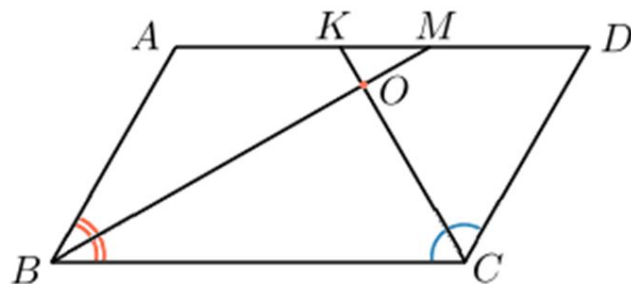


Решение задач

Решение.

1. Пусть BM и CK — биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к стороне BC .
2. Сумма углов ABC и BCD равна 180° . Углы OBC и OCB — половинки углов ABC и BCD . Значит, сумма углов ABC и BCD равна 90° градусов. Из треугольника BOC находим, что угол BOC — прѳ

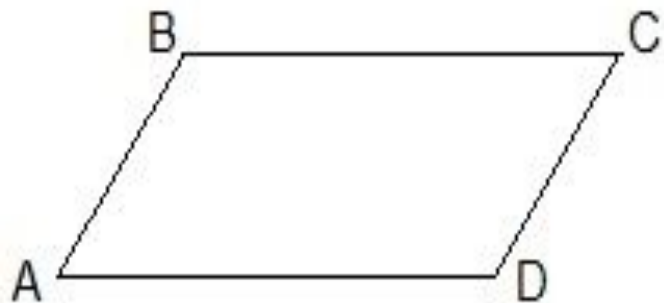
Ответ: 90° .



Решение задач

Задача 2.

Один из углов параллелограмма в 3 раза больше другого. Найти углы



Дано: ABCD - параллелограмм, $\angle B > \angle A$ в 3 раза.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

Решение задач

Решение.

Пусть $\angle A = x$. Тогда $\angle B = 3x$. Зная, что сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне равна 180° , составим уравнение:

$$x + 3x = 180;$$

$$4x = 180;$$

$$x = 180 : 4;$$

$$x = 45.$$

Получаем: $\angle A = x = 45^\circ$, а $\angle B = 3x = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$.

Противолежащие углы параллелограмма равны, следовательно,

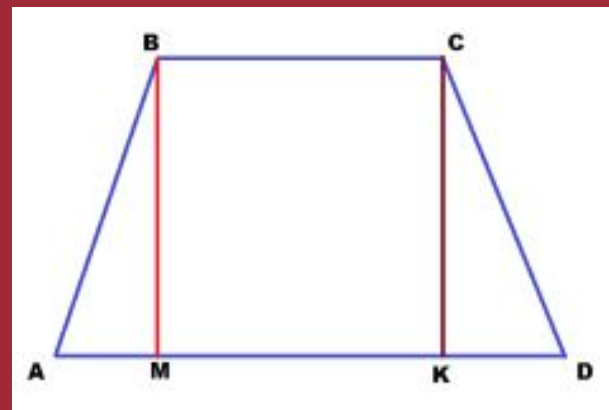
$$\angle A = \angle C = 45^\circ; \angle B = \angle D = 135^\circ.$$

Ответ: $\angle A = \angle C = 45^\circ; \angle B = \angle D = 135^\circ$.

Трапеция

Трапеция — выпуклый четырёхугольник, у которого ровно одна пара противоположащих сторон параллельна.

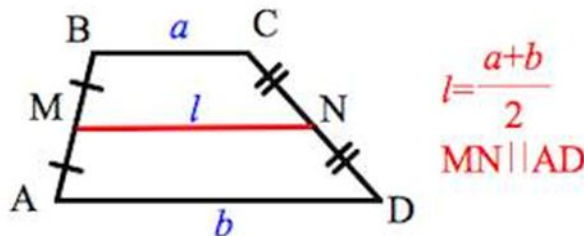
Параллельные стороны называют основаниями, а две другие — боковыми сторонами.



Свойства трапеции

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полсумме:

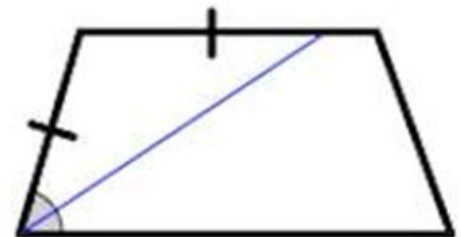
$$m = (a + b)/2$$



2. Средняя линия трапеции разделяет пополам любой отрезок который соединяет основы, так же делит диагонали пополам:

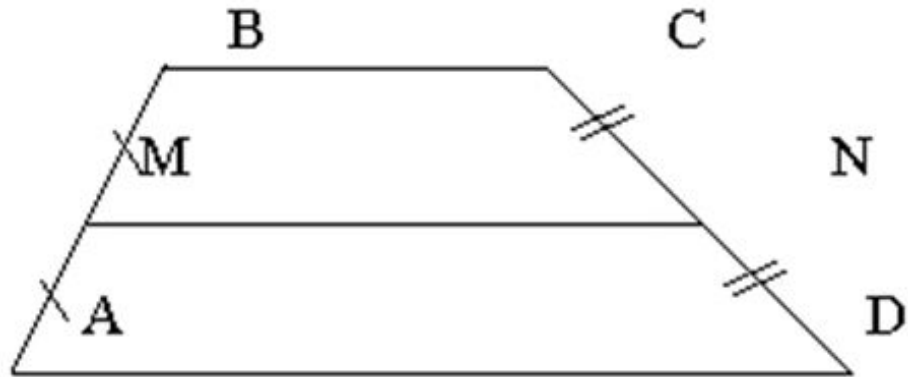
$$AK = KB, AM = MC, BN = ND, CL = LD$$

3. Биссектриса любого угла трапеции отсекает на её основании (или продолжении) отрезок, равный боковой стороне.



Свойства трапеции

- Дано: $ABCD$ – трапеция,
 MN – средняя линия $ABCD$
Доказать, что:
1. $BC \parallel MN \parallel AD$.
 2. $MN = \frac{AD + BC}{2}$.



Можно выписать некоторые следствия,
вытекающие из условия теоремы:
 $AM = MB$, $CN = ND$, $BC \parallel AD$.

Как построить треугольник, для которого
отрезок MN являлся бы средней линией?

Свойства трапеции

Доказательство :

1. Рассмотрим $\triangle BNC$ и $\triangle DNK$, в них:

а) $\angle CNB = \angle DNK$ (свойство вертикальных углов);

б) $\angle BCN = \angle NDK$ (свойство внутренних накрест лежащих углов);

в) $CN = ND$ (по следствию из условия теоремы).

Значит $\triangle BNC = \triangle DNK$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

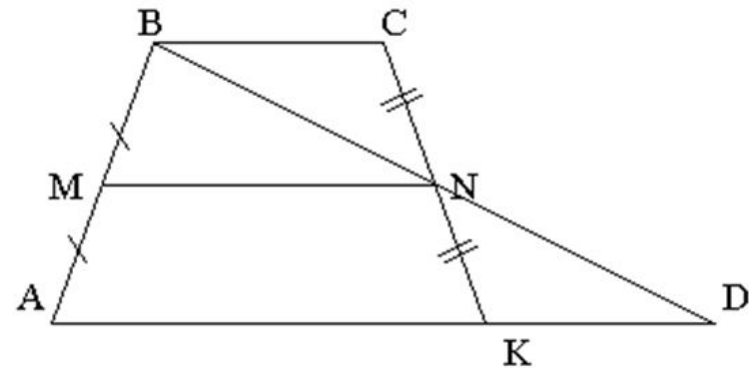
1. Из равенства $\triangle BNC = \triangle DNK$ следует, что $BN = NK$, а значит MN – средняя линия ABK .

2. $MN \parallel AD$ (п. 2).

3. Так как $ABCD$ – трапеция, то $BC \parallel AD$, но $MN \parallel AD$, значит $BC \parallel MN \parallel AD$.

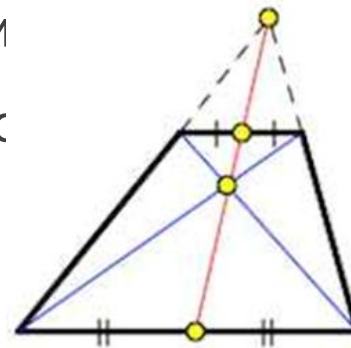
4. $MN = AK$, но $AK = AD + DK$, причём $DK = BC$ ($\triangle BNC = \triangle DNK$), значит $MN = (AD + BC)$.

Что и требовалось доказать.

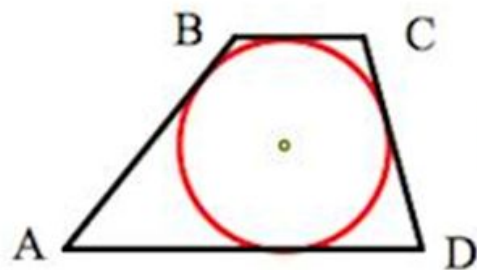


Свойства трапеции

3. Точка пересечения диагоналей трапеции
середины оснований лежат на одной прямой



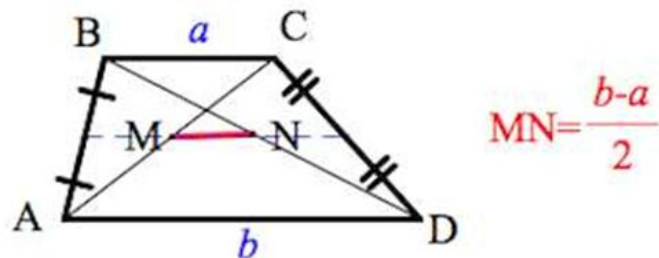
4. В трапецию можно вписать окружность, если сумма
оснований трапеции равна сумме её боковых сторон.



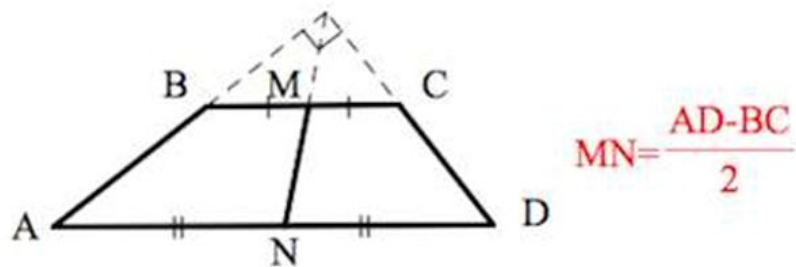
$$AB+CD=BC+AD$$

Свойства трапеции

5. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований и лежит на средней линии.



6. Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.



Виды трапеций



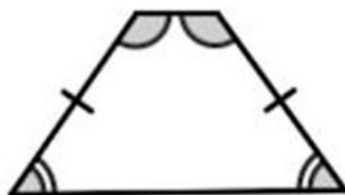
Равнобедренные трапеции — это трапеции, у которых боковые стороны равны.

Прямоугольные трапеции — это трапеции, у которых одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

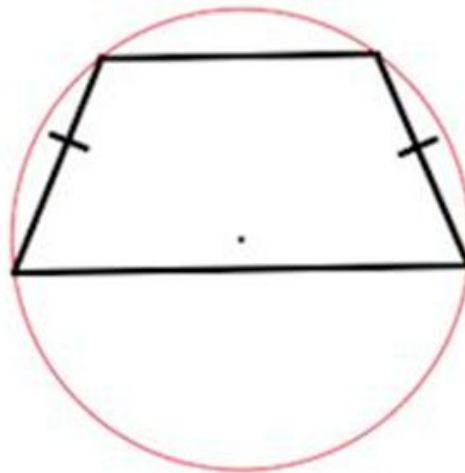
Произвольные трапеции — все остальные трапеции, которые не являются ни равнобедренными, ни прямоугольными.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.

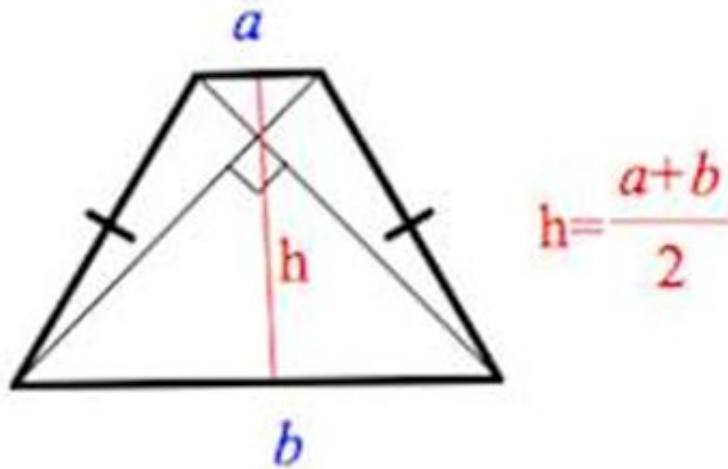


2. Если трапецию можно вписать в окружность, то трапеция – равнобедренная.



Свойства и признаки равнобедренной трапеции

3. Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.



Спасибо за внимание

