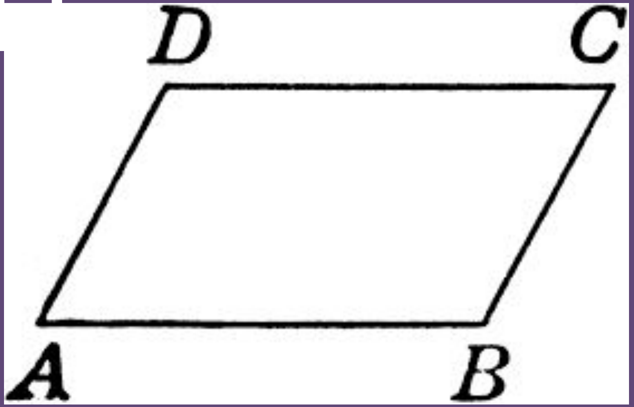
Параллелограмм и Трапеция

Параллелограмм

Параллелограмм - это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



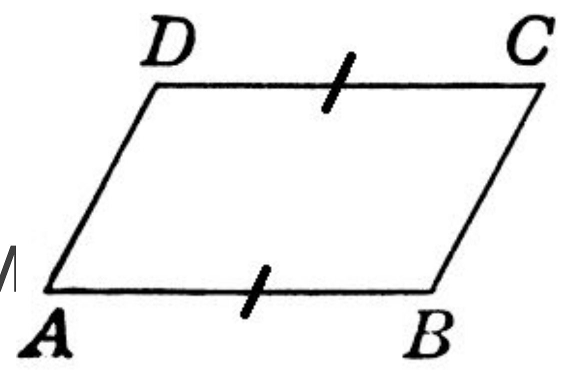
Признаки параллелограмма

Первый признак параллелограмма.

Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

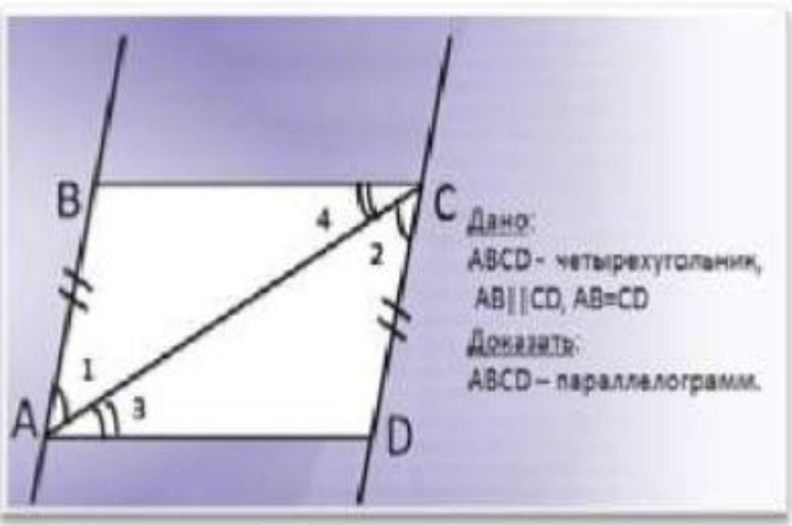
AB||CD, AB=CD,значит

ABCD-параллелограмм



Доказательство 1-го признака параллелограмма

Теорема 1.

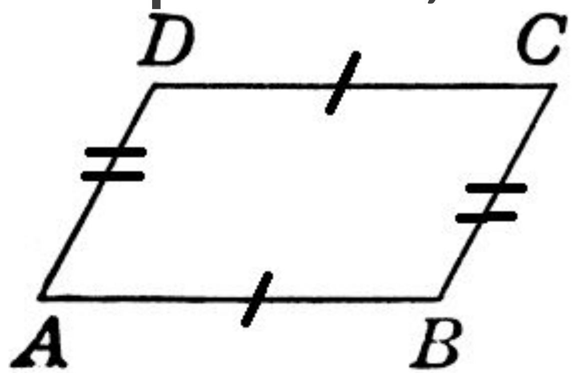


Доказательство:

1) Дополнительное построение: диагональ AC.
2) ∠1=∠2 как накрест лежащие угла при AB||CD и секущей AC.
3) ΔABC=ΔCDA по I признаку равенства треугольников (AB=CD, AC – общая сторона, ∠1=∠2), а в равных треугольниках равны соответственные элементы, следовательно, ∠3=∠4.
4) ∠3 и ∠4 накрест лежащие углы при прямых BC, AD и секущей AC, ∠3=∠4, поэтому AD||BC.
5) AB||CD, AD||BC, следовательно ABCD – параллелограмм по определению, что и требовалось доказать.

Признаки параллелограмма

2. Второй признак параллелограмма. Если в четырехугольнике каждые две противоположные стороны равны, то этот четырехугольник параллелограмм.



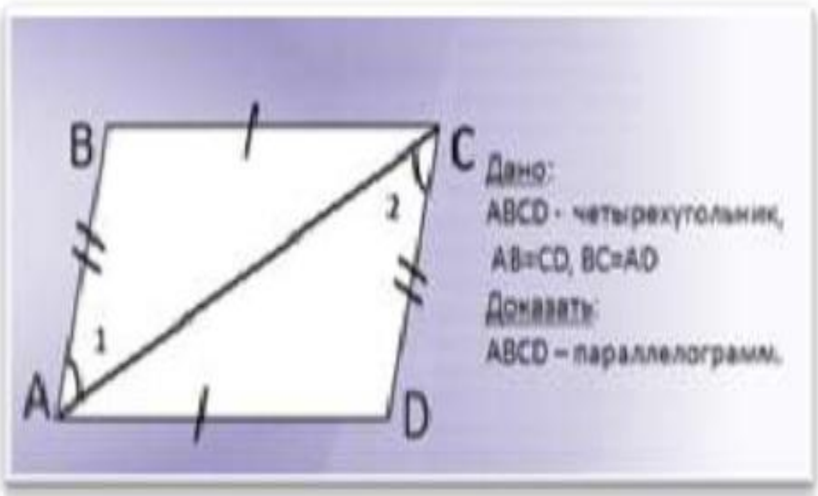
AB=CD,

AD=BC,

значит ABCD-параллелограмм

Доказательство 2-го признака параллелограмма

Теорема 2.



Доказательство:

1) Дополнительное построение: диагональ AC.

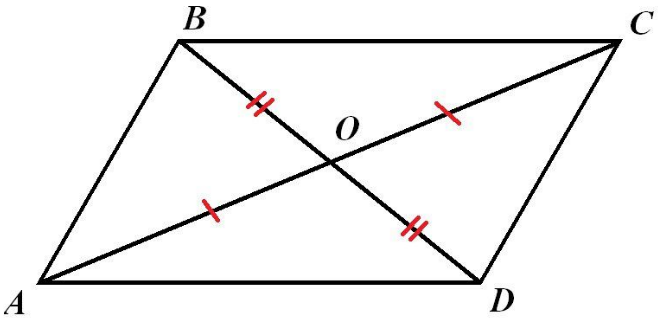
2) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по I I I признаку равенства треугольников (AB=CD, AD=BC, AC – общая сторона), а в равных треугольниках равны соответственные элементы, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

3) $\angle 1$ и $\angle 2$ накрест лежащие углы при прямых AB, CD и секущей AC, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому AB|| CD.

4) AB|| CD, AB=CD, следовательно, ABCD – параллелограмм по первому признаку, что и требовалось доказать.

Признаки параллелограмма

3. Третий признак параллелограмма. Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четыре параллелограмм.



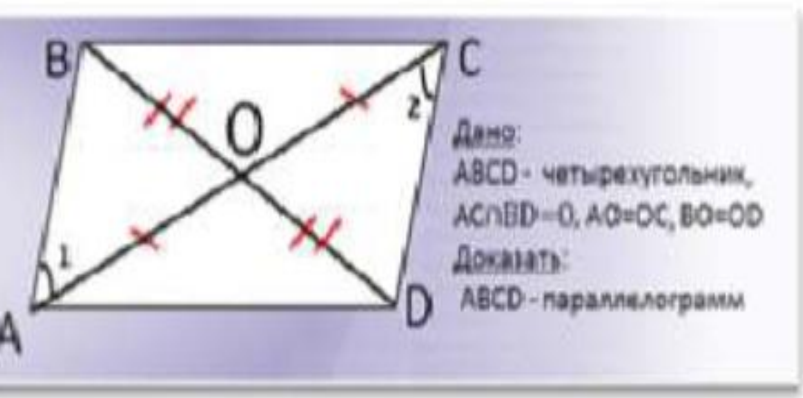
BO=OD,

AO=OC,

значит ABCD-параллелограмм

Доказательство 3-го признака параллелограмма

Теорема 3.



Доказательство:

1) ∠AOB=∠COD как вертикальные.
2) Δ AOB=Δ COD по I признаку (AO=OC, BO=OD, ∠AOB=∠COD по двум сторонам и углу между ними), а в равных треугольниках равны соответственные элементы, следовательно, ∠1=∠2, AB=CD.
3) ∠1 и ∠2 накрест лежащие углы при прямых AB, CD и секущей AC, ∠1=∠2, поэтому AB|| CD.
4) AB|| CD, AB=CD, следовательно, ABCD – параллелограмм по первому признаку, что и требовалось доказать.

Основные свойства параллелограмма

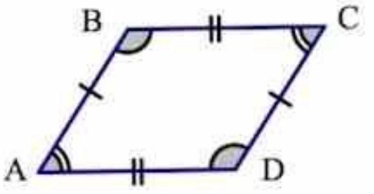
1. Противоположные стороны параллелограмма имеют одинаковую длину:

AB = CD, BC = AD

2. Противоположные стороны параллелограмма параллельны:

AB||CD,   BC||AD

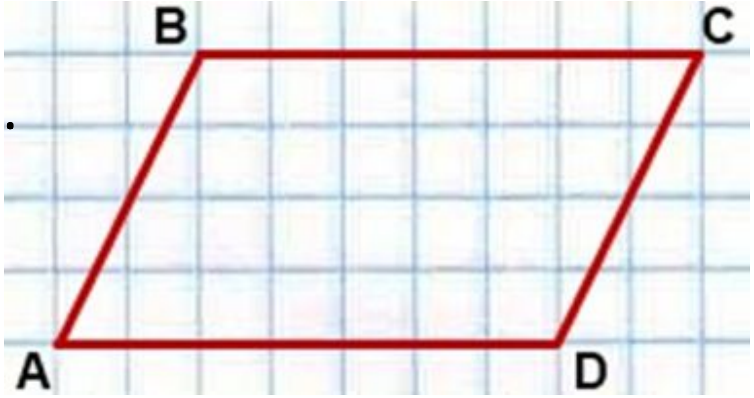
3. Противоположные углы параллелограмма равны:



∠ABC = ∠CDA, ∠BCD = ∠DAB

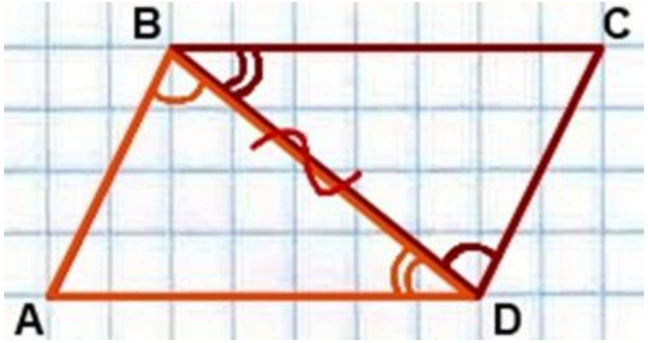
Основные свойства параллелограмма

Дано:
ABCD — параллелограмм.
Доказать:
AB=CD, AD=BC,
∠A=∠C, ∠B=∠D.



Основные свойства параллелограмма

Рассмотрим треугольники ABD и CDB.
1) сторона BD — общая
2) ∠ABD=∠CDB (как внутренние накрест лежащие при AB // CD и секущей BD)
3) ∠ADB=∠CBD (как внутренние накрест лежащие при AD // BC и секущей BD)
Значит, ∆ABD= ∆CDB (по стороне и двум прилежащим к ней углам).



Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон:
AB=CD, AD=BC
и равенство соответствующих углов: ∠A=∠C.
В пунктах 2) и 3) обосновано, что ∠ABD=∠CDB и ∠ADB=∠CB.
Следовательно,
∠ABC=∠ABD+∠CBD=∠CDB+∠ADB=∠ADC,
то есть, ∠B=∠D.
Что и требовалось доказать.

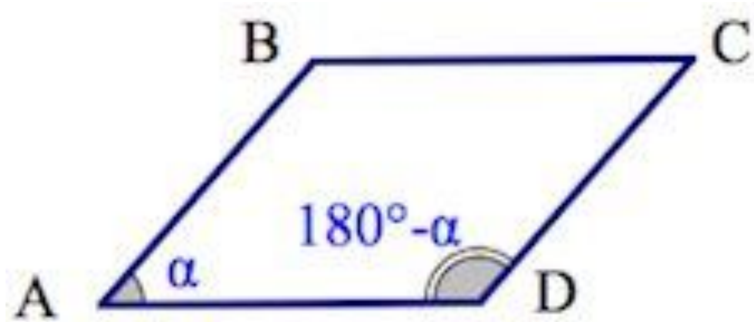
Основные свойства параллелограмма

4. Сумма углов параллелограмма равна 360°:

$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360°$

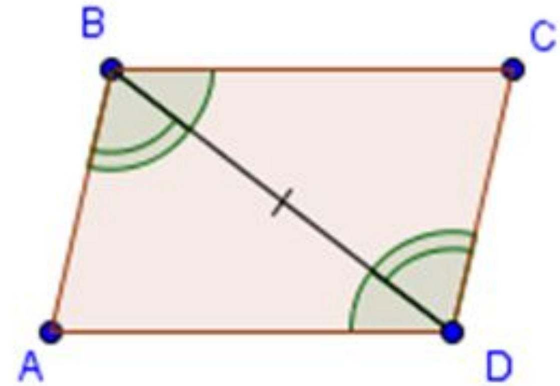
5. Сумма углов параллелограмма прилегающих к любой стороне равна 180°:

$\angle ABC + \angle BCD = \angle BCD + \angle CDA = \angle CDA + \angle DAB = \angle DAB + \angle DAB = 180°$



Основные свойства параллелограмма

Свойство непосредственно вытекает из того, что углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними углами при параллельных прямых.



Для параллелограмма ABCD:

$\angle A + \angle B = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при AD ∥ BC и секущей AB;

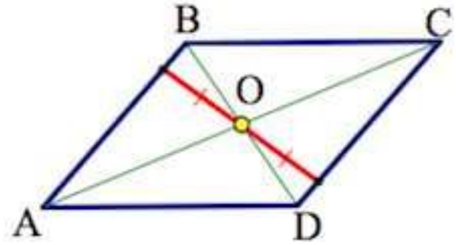
$\angle C + \angle D = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при AD ∥ BC и секущей CD;

$\angle A + \angle D = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при AB ∥ CD и секущей AD;

$\angle B + \angle C = 180^\circ$ (как внутренние односторонние при AB ∥ CD и секущей BC.

Основные свойства параллелограмма

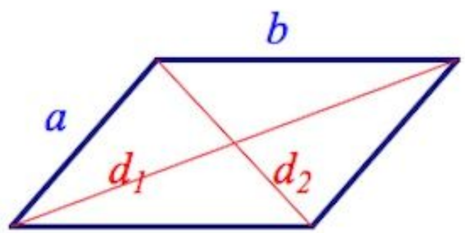
6. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма



7. Диагонали d_1 ,d_2 параллелограмма и стороны

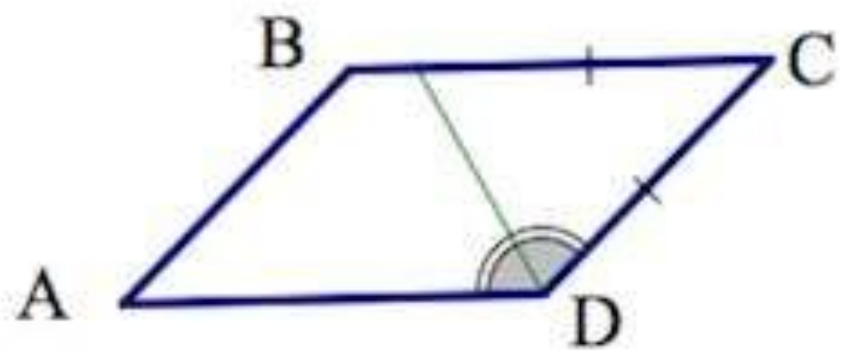
a,b связаны следующим

соотношением: $d_1{}^2+d_2{}^2=2(a^2+b^2)$



Основные свойства параллелограмма

8. Биссектриса отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник



Основные свойства параллелограмма

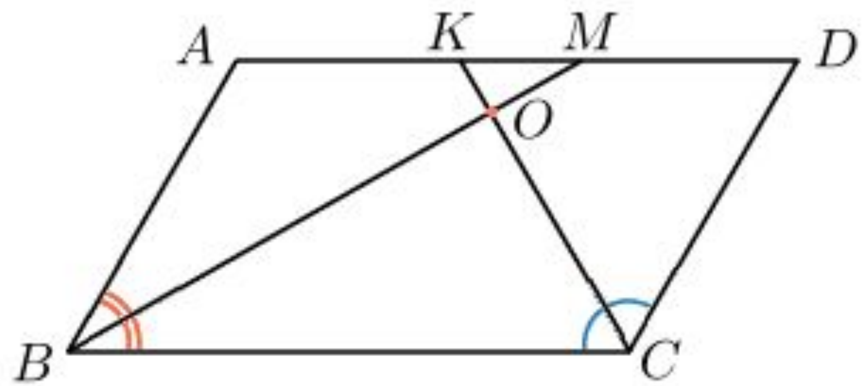
9. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$

10. Биссектрисы противоположных углов параллелограмма всегда параллельны

11. Биссектрисы соседних углов параллелограмма всегда пересекаются под прямым углом (90°)

Решение задач

Задача 1. Найдите угол между биссектрисами углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне. Ответ дайте в градусах

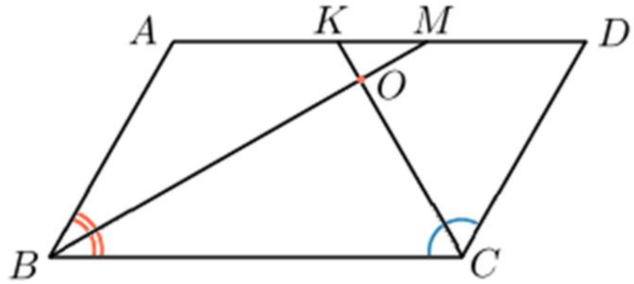


Решение задач

Решение.

1.Пусть BM и CK — биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к стороне BC.

2. Сумма углов ABC и BCD равна 180°.Углы OBC и OCB — половинки углов ABC и BCD. Значит, сумма углов ABC и BCD равна 90° градусов. Из треугольника BOC находим, что угол BOC— пря

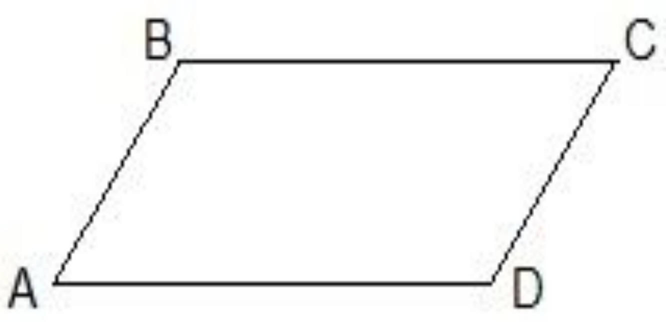


Ответ: 90°.

Решение задач

Задача 2.

Один из углов параллелограмма в 3 раза больше другого. Найти углы



Дано: ABCD - параллелограмм, $\angle B > \angle A$ в 3 раза.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

Решение задач

Решение.

Пусть $\angle A = x$. Тогда $\angle B = 3x$. Зная, что сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне равна 180°, составим уравнение:

$x + 3x = 180$;

$4x = 180$;

$x = 180 : 4$;

$x = 45$.

Получаем: $\angle A = x = 45°$, а $\angle B = 3x = 3 \cdot 45° = 135°$.

Противолежащие углы параллелограмма равны, следовательно,

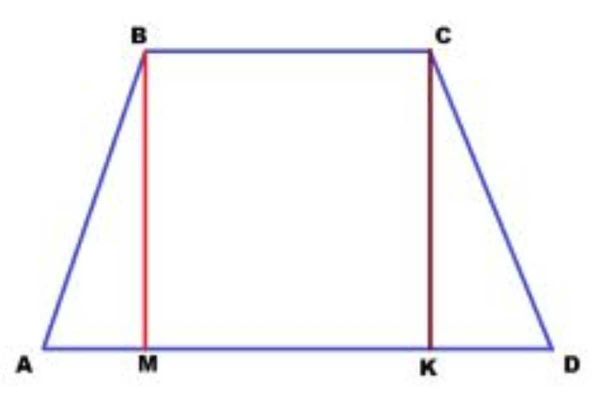
$\angle A = \angle C = 45°$; $\angle B = \angle D = 135°$.

Ответ: $\angle A = \angle C = 45°$; $\angle B = \angle D = 135°$.

Трапеция

Трапеция — выпуклый четырёхугольник, у которого ровно одна пара противолежащих сторон параллельна.

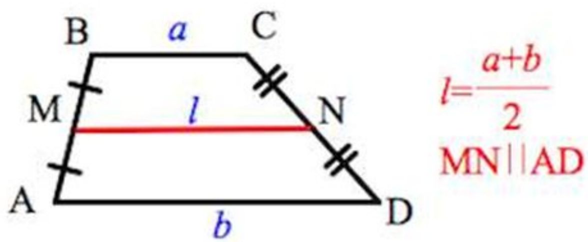
Параллельные стороны называют основаниями, а две другие — боковыми сторонами.



Свойства трапеции

1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полсумме:

m = (a + b)/2



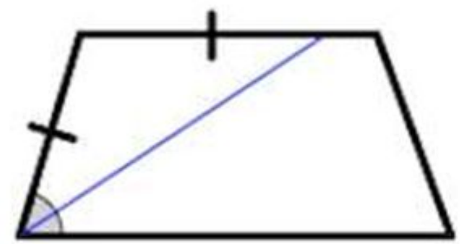
2. Средняя линия трапеции разделяет пополам любой отрезок который соединяет основы, так же делит диагонали пополам:

AK = KB, AM = MC, BN = ND, CL = LD

3. Биссектриса любого угла трапеции отсека

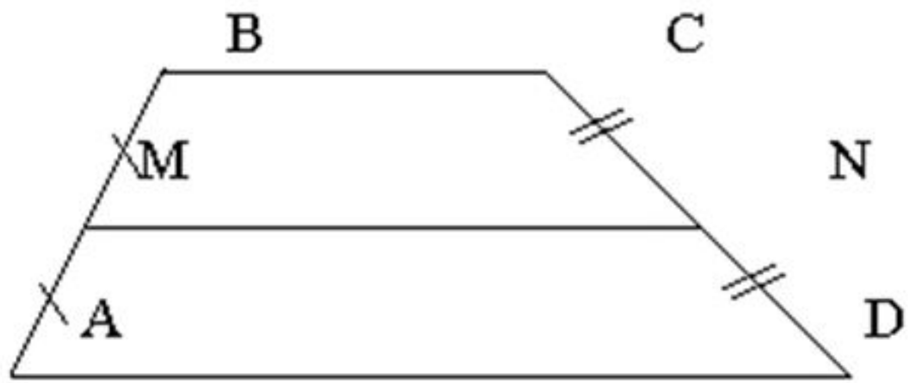
на её основании (или продолжении)

отрезок, равный боковой стороне.



Свойства трапеции

Дано: ABCD – трапеция,
MN – средняя линия ABCD
Доказать, что:
1. BC || MN || AD.
2. MN = (AD + BC).



Можно выписать некоторые следствия, вытекающие из условия теоремы:
AM = MB, CN = ND, BC || AD.

Как построить треугольник, для которого отрезок MN являлся бы средней линией?

Свойства трапеции

Доказательство :

1. Рассмотрим BNC и DNK, в них:

а) ∟CNB = ∟DNK (свойство вертикальных углов);

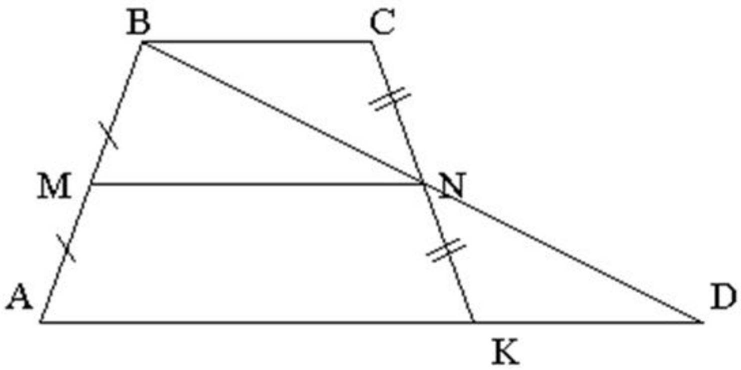
б) ∟BCN = ∟NDK (свойство внутренних накрест лежащих углов);

в) CN = ND (по следствию из условия теоремы).

Значит BNC = DNK (по стороне и двум прилежащим к ней углам).

1. Из равенства BNC = DNK следует, что BN = NK, а значит MN – средняя линия ABK.
2. MN || AD (п. 2).
3. Так как ABCD – трапеция, то BC||AD, но MN || AD, значит BC || MN || AD.
4. MN = AK, но AK = AD + DK, причём DK = BC (BNC = DNK), значит MN = (AD + BC).

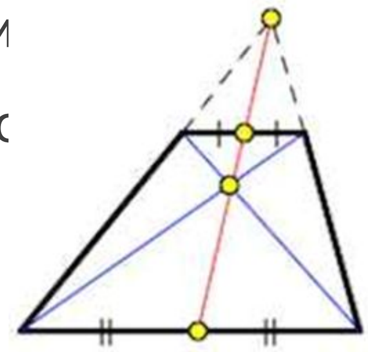
Что и требовалось доказать.



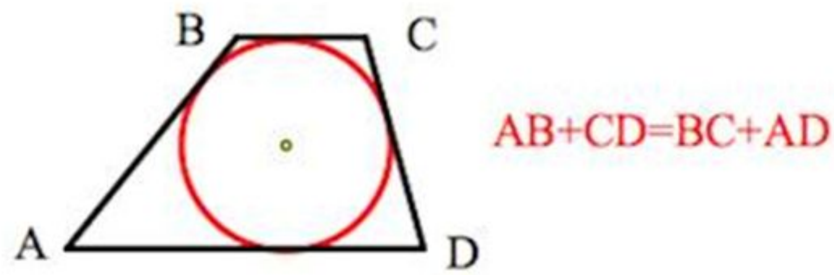
Свойства трапеции

3. Точка пересечения диагоналей трапеции

середины оснований лежат на одной прямо

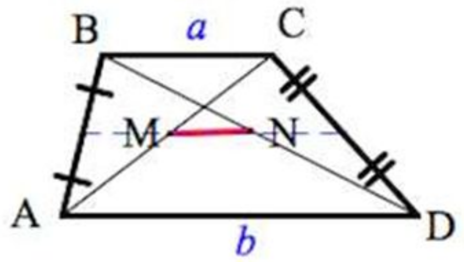


4. В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований трапеции равна сумме её боковых сторон.



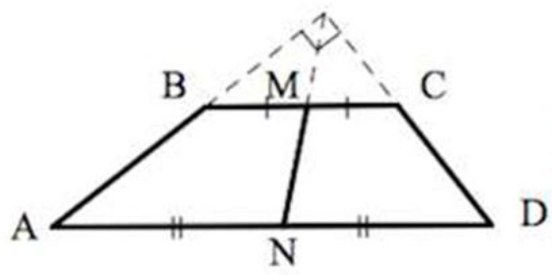
Свойства трапеции

5. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен полуразности оснований и лежит на средней линии.



$$MN = \frac{b-a}{2}$$

6. Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.



$$MN = \frac{AD-BC}{2}$$

Виды трапеций

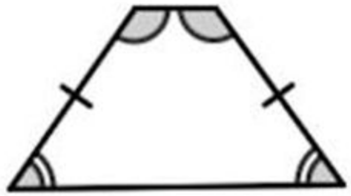
Равнобедренные трапеции — это трапеции, у которых боковые стороны равны.

Прямоугольные трапеции — это трапеции, у которых одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

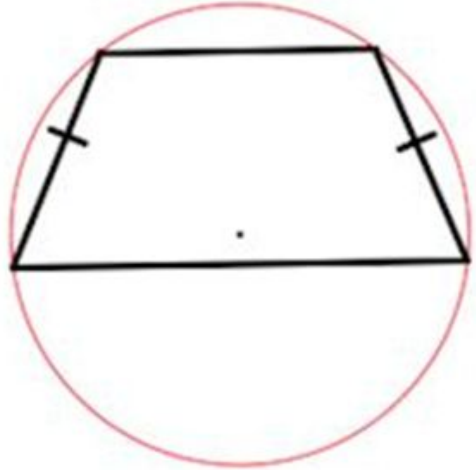
Произвольные трапеции — все остальные трапеции, которые не являются ни равнобедренными, ни прямоугольными.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции

1. В равнобедренной трапеции углы при любом основании равны.

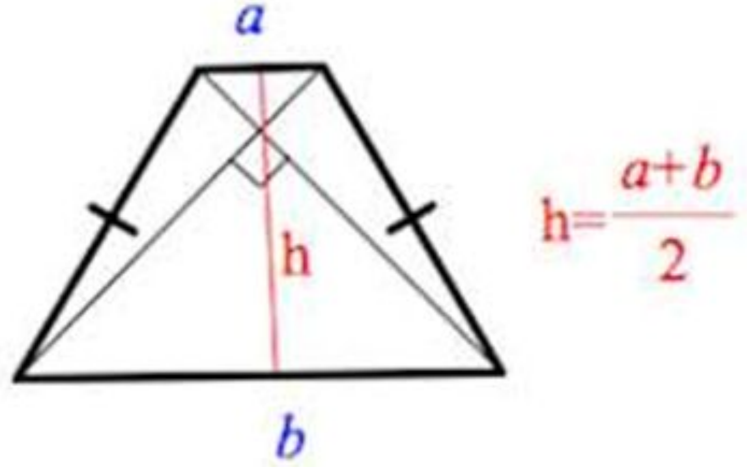


2. Если трапецию можно вписать в окружность, то трапеция – равнобедренная.



Свойства и признаки равнобедренной трапеции

3. Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.



Спасибо за внимани