



Лекция. Математика

Лектор: Санина Елена Ивановна



ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

ЛЕКЦИЯ 7

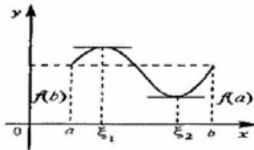
Приложения производной. Основные теоремы

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема на интервале (a, b) ;
- 3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

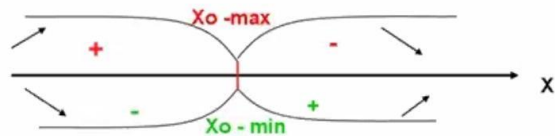
Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функция равна нулю: $f'(\xi) = 0$.



Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Для того, чтобы непрерывная в точке x_0 функция $y=f(x)$ имела в точке x_0 экстремум

- **необходимо:** $y'(x_0)=0$
 $y'(x_0)=\infty$ или не существовала
- **достаточно:** производная $y'(x_0)$ меняла знак при переходе через x_0





Пример:

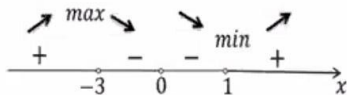
Исследовать функцию $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$$f'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 10x^2(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 = 0 \text{ или } x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = -3 \text{ или } x = 1$$



при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает,

при $x \in (-3; 0) \cup (0; 1)$ функция убывает \Leftrightarrow при $x \in (-3; 1)$ функция убывает

$$x = -3 - \text{точка максимума } y_{max} = 2(-3)^5 + 5(-3)^4 - 10(-3)^3 + 3 = 192$$

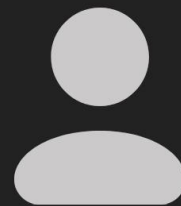
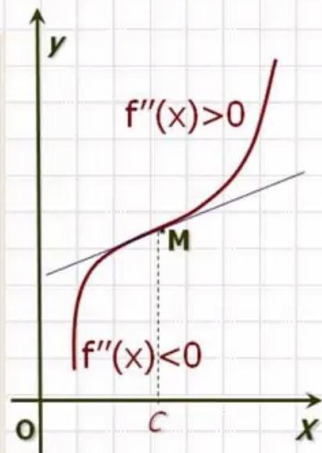
$$x = 1 - \text{точка минимума } y_{min} = 2 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 3 = 0$$



Точки перегиба графика

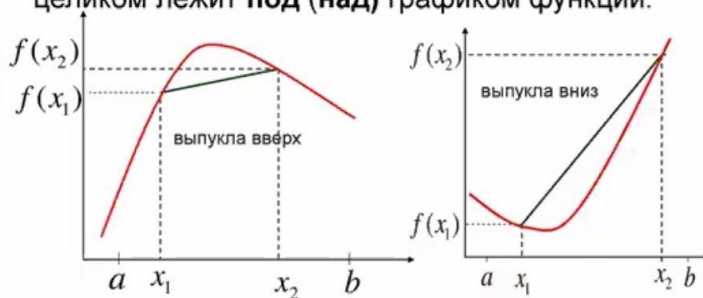
Теорема:

Если функция $f(x)$ имеет вторую производную в окрестности точки c , и $f''(x)$ *меняет знак* при переходе через эту точку, то $M(c; f(c))$ – *точка перегиба графика* функции $f(x)$.



Выпуклость функции. Точки перегиба.

Опр. Функция $y=f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a,b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ отрезок, соединяющий точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ целиком лежит под (над) графиком функции.

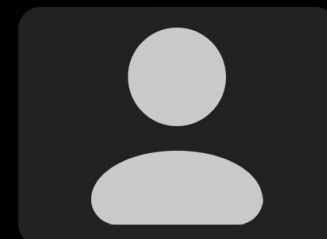
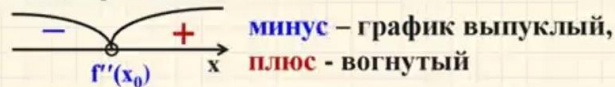


Точки перегиба

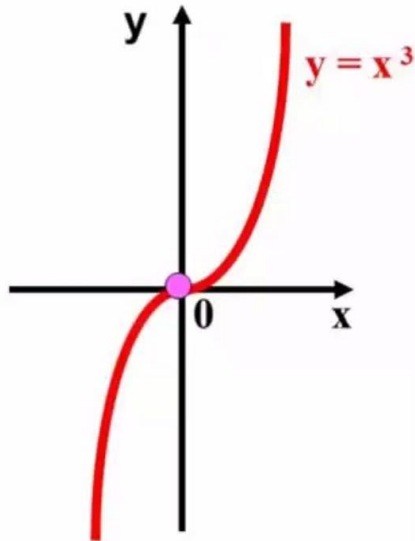
Точка, в которой меняется характер выпуклости графика функции, называется точкой **перегиба**.

Точка x_0 является *точкой перегиба* функции $y=f(x)$, если:

- а) функция $y=f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0
- б) $f''(x_0)=0$ (вторая производная)
- в) вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак.



2. Точки перегиба.



$$y'(x) = 3x^2$$

$$y'(0) = 0$$

точка $x = 0$ не является
точкой экстремума
функции

точка $x = 0$ является
точкой перегиба
функции



4 Выпуклость, точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} \right)' = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

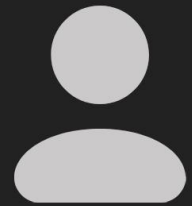
$$y'' \text{ не существ.} \Rightarrow (x+1)^4 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D(x)$$



$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ - функция выпукла

$x \in (0; +\infty)$ - функция вогнута

$M(0; 0)$ - точка перегиба



Асимптоты

■ Асимптотой для функции $y=f(x)$ называется прямая, к которой неограниченно (не пересекая) приближается кривая графика функции.

Функция может иметь

■ вертикальную асимптоту $x=a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (может, слева или справа),

■ наклонную асимптоту $y=kx+b$, если существуют конечные числа k и b

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx$$

■ горизонтальную $y=b$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной при $k=0$



§22. Исследование функций с помощью второй производной

22.4. Асимптоты кривых

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1$.

Решение.

$$D(y): \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

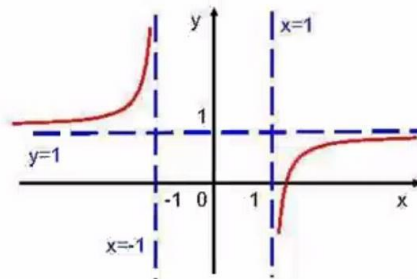
$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1 \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1 \right) = -\infty.$$

Прямые $x = -1$ и $x = 1$ -
вертикальные асимптоты.

$$k = 0; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1 \right) = 1,$$

Прямая $y = 1$ - горизонтальная
асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$.



Пример. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{1+x^2}{1+x}$$

Область определения функции: $x \neq -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{x = -1} \text{ - вертикальная асимптота}$$

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x(1+x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^2}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1} = 1 = k$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -1$$

$\boxed{y = x - 1}$ - наклонная асимптота

Найдите уравнение наклонной
асимптоты для графика функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 3x}{3 - x^2} = 0$$

Значит, прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой



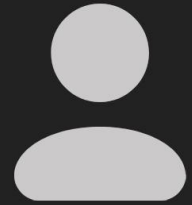
ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

ЛЕКЦИЯ 8

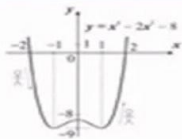


Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать на четность и нечетность функцию;
3. Найти точки пересечения функции с координатными осями;
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы
5. Определить точки перегиба функции интервалы выпуклости и вогнутости;
6. Найти точки разрыва и асимптоты графика функции;
7. При необходимости вычислить значения функции в дополнительных точках



8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ



Дан график функции $y = x^3 - 2x^2 - 8$.
По графику устанавливаем, что

- $D(y) = \mathbb{R}$
- $E(y) = [-9; +\infty)$
- $y(-x) = y(x)$ — четная функция
- $y = 0$ при $x = \pm 2$
- $y(0) = -8$

Свойство функции

с использованием производной

по данному графику

$$f'(x) = 4x^2 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$$

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Критические точки

$$f'(x) = 0; 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad -1; 0; 1$$

Монотонность функции



убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$
возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; \infty)$

убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$
возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; \infty)$

Экстремумы функции

$$x_{\min} = -1; f_{\min} = f(-1) = 1 - 2 - 8 = -9$$

$$x_{\min} = -1; x_{\max} = 0; x_{\min} = 1$$

$$x_{\max} = 0; f_{\max} = f(0) = 0 - 0 - 8 = -8$$

$$f_{\min} = f(-1) = f(1) = -9$$

$$x_{\min} = 1; f_{\min} = f(1) = -9$$

$$f_{\max} = f(0) = -8$$

Наибольшее и наименьшее значения

$$\min_x f(x) = f_{\min} = f(-1) = f(1) = -9$$

$$\min_x f(x) = f_{\min} = f(-1) = f(1) = -9$$

$$E(f) = [-9; \infty).$$

Наибольшего значения нет.