Лекция. Математика

Лектор: Санина Елена Ивановна

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

ЛЕКЦИЯ 7

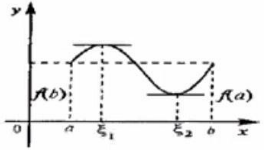
Приложения производной.
Основные теоремы

Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция y=f(x) достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.* $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. *Пусть функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируема на интервале* (a, b);
3) *на концах отрезка принимает равные значения, т.е.* $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, *в которой производная функция равна нулю:* $f'(\xi) = 0$.



Экран Елена Санина

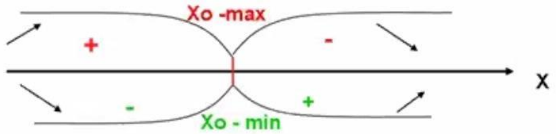
Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Для того, чтобы непрерывная в точке Xo функция y=f(x) имела в точке Xo экстремум

- <u>необходимо</u>: $y'(x_0)=0$

  $y'(x_0)=\infty$ или не существовала

- <u>достаточно</u>: производная $y'(x_0)$ меняла знак при переходе через x_0



Пример:

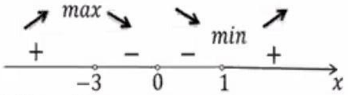
Исследовать функцию $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$f'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 10x^2(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 = 0$ или $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -3$ или $x = 1$



при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает,

при $x \in (-3; 0) \cup (0; 1)$ функция убывает $\Leftrightarrow$ при $x \in (-3; 1)$ функция убывает

$x = -3$ – точка максимума $y_{max} = 2(-3)^5 + 5(-3)^4 - 10(-3)^3 + 3 = 192$

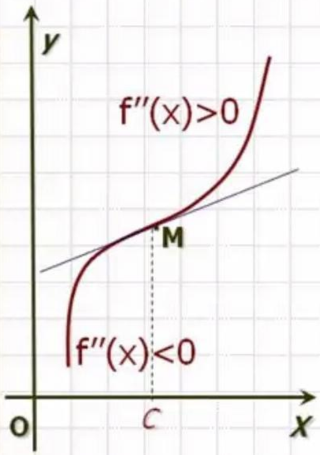
$x = 1$ – точка минимума $y_{min} = 2 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 3 = 0$

Экран Елена Санина

Точки перегиба графика

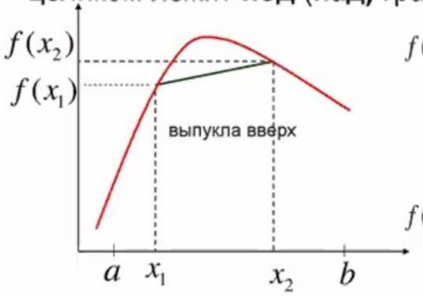
<u>Теорема:</u>

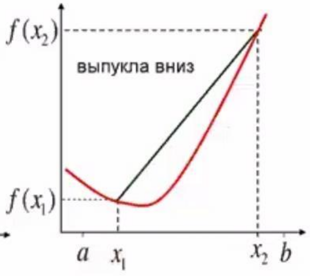
Если функция f(x) имеет вторую производную в окрестности точки *c*, и f''(x) *меняет знак* при переходе через эту точку, то M(c; f(c)) – *точка перегиба графика* функции f(x).



Выпуклость функции. Точки перегиба.

Опр. Функция y=f(x) называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ отрезок, соединяющий точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ целиком лежит **под (над)** графиком функции.





Точки перегиба

Точка, в которой меняется характер выпуклости графика функции, называется точкой перегиба.

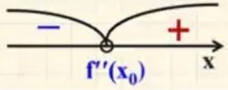
Точка X_0 является *точкой перегиба* функции $y=f(x)$, если:

а) функция $y=f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0

Tc2103 Кр...

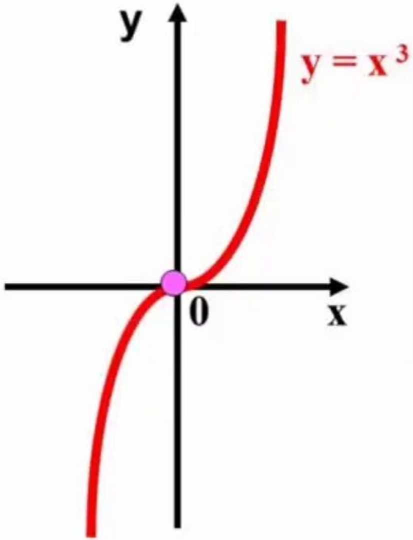
б) $f''(x_0)=0$ (вторая производная)

в) вторая производная при переходе через точку x_0 меняет знак.



минус – график выпуклый,
плюс - вогнутый

2. Точки перегиба.



$y'(x) = 3x^2$

$y'(0) = 0$

точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции

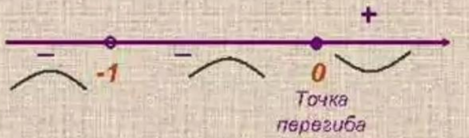
точка $x = 0$ является *точкой перегиба* функции

4 Выпуклость, точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

y'' не существ. $\Rightarrow (x+1)^4 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D(x)$



$$y(0) = \frac{0^3}{2(0+1)^2} = 0$$

$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$ - функция выпукла

$x \in (0; +\infty)$ - функция вогнута

$M(0;0)$ - точка перегиба

Экран Елена Санина

Асимптоты

- Асимптотой для функции y=f(x) называется прямая, к которой неограниченно (не пересекая) приближается кривая графика функции.

Функция может иметь

- вертикальную асимптоту x=a, если $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (может, слева или справа),
- наклонную асимптоту y=kx+b, если существуют конечные числа k и b

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$$

- горизонтальную y=b ,если $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

Горизонтальная асимптота – частный случай наклонной при k=0

§22. Исследование функций с помощью второй производной

22.4. Асимптоты кривых

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1.$

Решение.

$$D(y):\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \quad D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

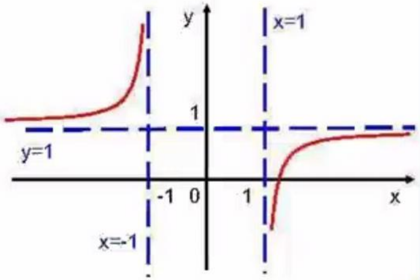
$$\lim_{x\to -1-0}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right) = -\infty.$$

Прямые $x=-1$ и $x=1$ - вертикальные асимптоты.

$$k=0;\quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+1\right) = 1,$$

Прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота при $x \to \pm\infty$.



Экран Елена Санина

Пример. Найти асимптоты графика функции

$$y=\frac{1+x^2}{1+x}$$

Область определения функции: $x\neq-1$

$$\lim_{x\to-1}\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{2}{0}=\infty\Longrightarrow\boxed{x=-1}$$ **- вертикальная асимптота**

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1+x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2+1}{1/x+1}=1=k$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x-1}{1/x+1}=-1$$

$$\boxed{y=x-1}$$ ***- наклонная асимптота***

Экран Елена Санина

Найдите уравнение наклонной асимптоты для графика функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{3 - x^2} = -1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 + 3x}{3 - x^2} = 0$$

Значит, прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

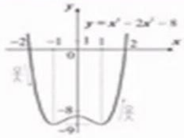
ЛЕКЦИЯ 8

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать на четность и нечетность функцию;
3. Найти точки пересечения функции с координатными осями;
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы
5. Определить точки перегиба функции интервалы выпуклости и вогнутости;
6. Найти точки разрыва и асимптоты графика функции;
7. При необходимости вычислить значения функции в дополнительных точках

Экран Елена Санина

8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ



Дан график функции $y = x^4 - 2x^2 - 8$.
По графику установливаем, что

1. $D(y) = R$
2. $E(y) = [-9; +\infty)$
3. $y(-x) = y(x)$ – четная функция
4. $y = 0$ при $x = \pm 2$
5. $y(0) = -8$

Свойство функции

с использованием производной	по данному графику
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ $D(f') = R$	

Критические точки

$f'(x) = 0;\ 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$	$-1;\ 0;\ 1$

Монотонность функции

убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$ возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; \infty)$	убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$ возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; \infty)$

Экстремумы функции

$x_{min} = -1:\ f_{min} = f(-1) = 1 - 2 - 8 = -9$ $x_{max} = 0:\ f_{max} = f(0) = 0 - 0 - 8 = -8$ $x_{min} = 1:\ f_{min} = f(1) = -9$	$x_{min} = -1;\ x_{max} = 0;\ x_{min} = 1$ $f_{min} = f(-1) = f(1) = -9$ $f_{max} = f(0) = -8$

Наибольшее и наименьшее значения

$\min\limits_R f(x) = f_{min} = f(-1) = f(1) = -9$	$\min\limits_R f(x) = f_{min} = f(-1) = f(1) = -9$

$E(f) = [-9; \infty)$.

Наибольшего значения нет.