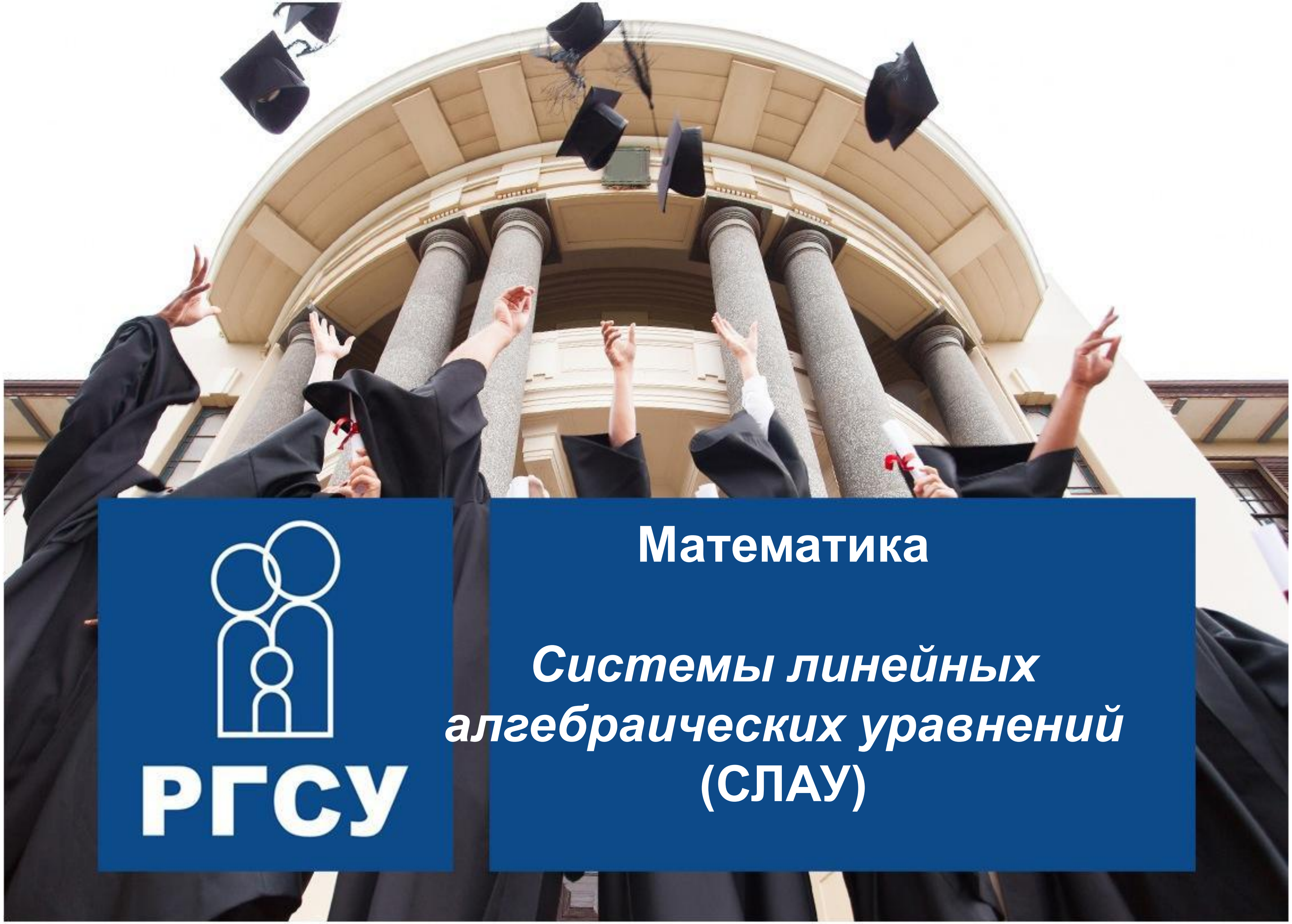

РГСУ

Математика

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Системой линейных алгебраических уравнений, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными *x* и *y*, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \qquad (1)$$

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы* (1);

Вектор $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ называется *столбцом свободных членов системы* (1),

Вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – столбцом неизвестных.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Теорема 1 (*правило Крамера*). Если определитель матрицы системы (1) не равен нулю, то система (1) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где $\Delta = |A|$; $\Delta_j \ (j = 1,2)$

– определители, полученные из Δ заменой его *j*-го столбца столбцом свободных членов .

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Теорема 2. Если у системы (1) $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_1 или Δ_2 отличен от нуля, то система (1) не имеет решения. Если у системы (1) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (1) имеет бесконечное множество решений.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Системой линейных алгебраических уравнений, состоящей из трех уравнений с тремя неизвестными ***x***, ***y*** и ***z***, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a_{ij}, b_i \; (i, j = 1,2,3)$

– некоторые постоянные действительные числа.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Теорема 3. (правило Крамера). Если определитель матрицы системы (2) не равен нулю, то система (2) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

где $\Delta = |A|$; $\Delta_j \ (j = 1,2,3)$ определители, полученные из Δ заменой его j-го столбца столбцом свободных членов .

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Теорема 4. Если у системы (2) $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 отличен от нуля, то система (2) не имеет решения.

Если выполнены условия $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ то система (2) или имеет бесконечное множество решений.

ПРАВИЛО КРАМЕРА

Пример 4. Решить систему:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x-y=1 \\ 4x-y+3z=1. \end{cases}$$

Решение. В данном примере имеем:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta=|A|=-3-6+8=-1\neq 0.$$

Вычислим:

ПРАВИЛО КРАМЕРА

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-1} = 8; \quad z = \frac{1}{-1} = -1.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

О п р е д е л е н и е. *Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из m уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{11}, \ldots, a_{mn}$, $b_1, \ldots, b_m$ некоторые числа.

Системы линейных алгебраических уравнений

Введем $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор–столбец неизвестных,

$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных членов,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица системы.

Системы линейных алгебраических уравнений

Тогда система (1) может быть записана в векторной форме:

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b} \qquad (2)$$

Если $b_1=0, \ldots, b_m=0$, то система называется *линейной однородной*.

Однородная система в векторной форме имеет вид

$$A \cdot \overline{x} = \overline{0}$$

Система (2) называется *линейной неоднородной системой.*

ПРИМЕРЫ

<u>П р и м е р 1</u>. Для системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 5z = 3 \\ 4x + 7z = 7 \end{cases}$$

указать матрицу системы A и столбец свободных членов $\overline{b}$

Записать систему в векторной форме.

ПРИМЕРЫ

Р е ш е н и е. Обозначим столбец неизвестных :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Тогда матрица A рассматриваемой системы составляется из числовых коэффициентов, стоящих в системе при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕРЫ

Столбец $\overline{b}$ составляется из свободных членов системы:

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Поэтому систему можно переписать в векторной форме:

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}$$

О т в е т: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\overline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$

Системы линейных алгебраических уравнений

О п р е д е л е н и е. *Расширенной матрицей* системы (1) называется матрица, обозначаемая $\left(A\middle|\bar{b}\right)$ и полученная приписыванием к матрице A справа после вертикальной черты столбца $\bar{b}$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \Rightarrow \quad \left(A/\bar{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Системы линейных алгебраических уравнений

О п р е д е л е н и е. *Решением* системы (2) $A \cdot \overline{x} = \overline{b}$ называется любой n- мерный вектор $\overline{x}$, подстановка которого в систему дает тождество.

О п р е д е л е н и е. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной*.

Системы линейных алгебраических уравнений

Т е о р е м а 1. (*Кронекера – Капелли*). Система (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть:

$$r(A) = r\left(A \middle| \bar{b}\right).$$

При этом если $r(A) = n,$ то система имеет единственное решение;
если $r(A) < n,$ то система имеет бесконечное множество решений (n –число неизвестных).

ПРИМЕРЫ

П р и м е р 2. Исследовать на совместность систему:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x-y=1 \\ 4x-y+2z=1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

$$\overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕРЫ

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)(-3)(-4) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right)(-1) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно: $r(A) = 2,\ r(A|\bar{b}) = 3$ и $r(A) \neq r(A|\bar{b})$.

О т в е т: система несовместна.

Метод Гаусса

Определение. Две системы, множества решений которых совпадают, называются ***равносильными***.

Теорема. 2. Применение к расширенной матрице системы элементарных преобразований приводит к равносильной системе.

Метод Гаусса основан на приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду Гаусса и решению полученной системы.

Метод Гаусса

Шаги метода Гаусса рассмотрим на примере.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

Метод Гаусса

I. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow A/\bar{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-2)\ \cdot(-1) \\ \hookleftarrow \quad \downarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-1)(-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

II. Проверить совместность системы.

Если $r(A/\bar{b}) \neq r(A)$, то система несовместна. Решение заканчивается.

Если $r(A/\bar{b}) = r(A)$, то система совместна. Если $r = n$, то решение единственно.
Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае следует определить базисные и свободные переменные.

В примере $r(A/\bar{b}) = r(A) = 2 < n = 4$.

Система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Базисным переменным соответствуют базисным столбцам.

В примере базисные переменные: x_1, x_2.

Остальные переменные называются свободными. Число свободных переменных определяется из условия $k = n - r$.

В примере $k = 4 - 2 = 2$, свободные переменные: x_3, x_4.

Метод Гаусса

III. Привести матрицу к виду Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{3} & 5 & 5 & \vert & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & \vert & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

IY. Написать систему, соответствующую матрице шага III.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Y. Выразить базисные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4. \end{cases}$$

YI. Обозначить свободные переменные через $C_1, \dots, C_k$: $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$

и выразить базисные переменные через них.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + C_1 - 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 - C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Метод Гаусса

YII. Записать ответ в векторной форме.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + C_1 - 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 - C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \Longrightarrow \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{l}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение неоднородной системы $A\bar{x} = \bar{b}$ имеет вид

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + C_1\bar{l}_1 + C_2\bar{l}_2$$

$\bar{x}_0$ – частное решение неоднородной системы $A\bar{x} = \bar{b}$ при $C_1 = C_2 = 0$,

$\bar{l}_1, \bar{l}_1$ – **линейно независимые решения** однородной системы $A\bar{x} = \bar{0}$.

Линейная зависимость векторов

- **Определение.** Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что справедливо равенство:

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = 0 \qquad (1).$$

Определение. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются ***линейно независимыми,*** если выполнение равенства (1) возможно только при условии:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Теорема. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен n.

Определение. Рангом матрицы называется наивысший порядок минора, отличного от нуля.

Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

Теорема 2. Решение системы $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ (2) имеет вид:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + c_1 \bar{l}_1 + \dots + c_k \bar{l}_k, \qquad (3)$$

где $\bar{x}_0$ – частное решение линейной неоднородной системы (2); число k, называемое числом свободных неизвестных системы (2), вычисляется по формуле $k = n - r(A)$,

$c_1, \dots, c_k$ – произвольные постоянные числа;

$\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k$ – постоянные n- мерные векторы, являющиеся линейно независимыми решениями соответствующей линейной однородной системы .

$$A \cdot \bar{x} = \bar{0}$$

Фундаментальная система векторов

Рассмотрим однородную систему

$$A \cdot \overline{x} = \overline{0}$$

Однородная система всегда совместна, так как всегда имеет нулевое (тривиальное) решение.

Нетривиальное решение возможно только при условии

$$r(A) < n$$

Общее решение имеет вид

$$\overline{x} = C_1 \overline{l_1} + \ldots + C_k \overline{l_k}$$

$\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_k}$ – линейно-независимые *n*-мерные векторы, образующие фундаментальную систему решений однородной системы.

ПРИМЕРЫ

П р и м е р 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

столбец свободных членов.

ПРИМЕРЫ

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$\left(A\,\bar{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) (-3)(-4) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right) (-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) (6)(-2) \rightarrow \left[\begin{array}{c} r(A) = r\left(A\,\bar{b}\right) = 3, \\ n = 3, \\ \text{система совместна,} \\ \text{решение единственное} \end{array}\right] \rightarrow$$

ПРИМЕРЫ

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&-1&0&-8\\0&0&1&-1\end{array}\right)(-1)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&8\\0&0&1&-1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\y=8,\\z=-1.\end{cases}$$

Ответ: $x=3;\quad y=8;\quad z=-1.$

ПРИМЕРЫ

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$A/\bar{b} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & 4 & 2 & 6 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \hookleftarrow & \downarrow \\ & \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 16 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & -3 & -11 & -22 \\ -5 & 0 & -9 & -5 & -17 & -32 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} \uparrow & & \\ (2) & (5) & (-1) \\ & \hookleftarrow & \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -10 & -4 & -16 & -28 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 26 & \boxed{10} & 38 & 78 \end{array}\right)(0,1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -10 & -4 & -16 & -28 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & 7,8 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \leftarrow \\ \leftarrow & \uparrow \\ (-3) & (4) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0,4 & 0 & -0,8 & 3,2 \\ 1 & 0 & -0,8 & 0 & -0,4 & -1,4 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & 7,8 \end{array}\right)$$

ПРИМЕРЫ

Пример 3. (продолжение)

Получим систему

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0,4 & 0 & -0,8 & 3,2 \\ 1 & 0 & -0,8 & 0 & -0,4 & -1,4 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & 7,8 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_2 + 0,4x_3 - 0,8x_5 = 3,2, \\ x_1 - 0,8x_3 - 0,4x_5 = -1,4, \\ 2,6x_3 + x_4 + 3,8x_5 = 7,8. \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = -1,4 + 0,8C_1 + 0,4C_2, \\ x_2 = 3,2 - 0,4C_1 + 0,8C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = 7,8 - 2,6C_1 - 3,8C_2, \\ x_5 = C_2. \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,4 \\ 3,2 \\ 0 \\ 7,8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,4 \\ 1 \\ -2,6 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 0 \\ -3,8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

- **Теорема.** Если матрица A квадратная и невырожденная, то система

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

имеет единственное решение, вычисляемое по формуле

$$\overline{x}_0 = A^{-1}\overline{b}$$

где A^{-1} - матрица, обратная к матрице A.