



**РГСУ**

**Математика**

*Системы линейных  
алгебраических уравнений  
(СЛАУ)*

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

---

*Системой линейных алгебраических уравнений*, состоящей из двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

---

Матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  называется *матрицей системы (1)*;

Вектор  $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  называется *столбцом свободных членов системы (1)*,

Вектор  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  — *столбцом неизвестных.*

# ПРАВИЛО КРАМЕРА

**Теорема 1** (*правило Крамера*). Если определитель матрицы системы (1) не равен нулю, то система (1) имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где  $\Delta = |A|$  ;  $\Delta_j$  ( $j = 1, 2$ )

– определители, полученные из  $\Delta$  заменой его  $j$ -го столбца столбцом свободных членов .

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

---

**Теорема 2.** Если у системы (1)  $\Delta = 0$ , но хотя бы один из определителей  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$  отличен от нуля, то система (1) не имеет решения. Если у системы (1)  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , то система (1) имеет бесконечное множество решений.

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

---

Системой линейных алгебраических уравнений, состоящей из трех уравнений с тремя неизвестными  $x$ ,  $y$  и  $z$ , называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad (2)$$

где  $a_{ij}, b_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )

– некоторые постоянные действительные числа.

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

**Теорема 3.** (правило Крамера). Если определитель матрицы системы (2) не равен нулю, то система (2)

имеет единственное решение, вычисляемое по

формулам:  $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$

где  $\Delta = |A|;$   $\Delta_j (j = 1, 2, 3)$

определители, полученные из  $\Delta$  заменой его  $j$ -го столбца столбцом свободных членов .

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

---

**Теорема 4.** Если у системы (2)  $\Delta = 0$ , но хотя бы один из определителей  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  или  $\Delta_3$  отличен от нуля, то система (2) не имеет решения. Если выполнены условия  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$  то система (2) или имеет бесконечное множество решений.

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

**Пример 4.** Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

**Решение.** В данном примере имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta = |A| = -3 - 6 + 8 = -1 \neq 0.$$

Вычислим:

## ПРАВИЛО КРАМЕРА

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-1} = 8; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1.$$

# Системы линейных алгебраических уравнений

**О п р е д е л е н и е.** Системой линейных алгебраических уравнений, состоящей из  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$ , называется система вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \square + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \square + a_{2n}x_n = b_2 \\ \square \quad \square \\ a_{m1}x_1 + \square + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $a_{11}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$  некоторые числа.

# Системы линейных алгебраических уравнений

Введем  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix}$  — вектор–столбец неизвестных,

$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \boxtimes \\ b_m \end{pmatrix}$  — вектор-столбец свободных членов,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \boxtimes & a_{1n} \\ a_{21} & \boxtimes & a_{2n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{m1} & \boxtimes & a_{mn} \end{pmatrix}$  — матрица системы.

# Системы линейных алгебраических уравнений

---

Тогда система (1) может быть записана в векторной форме:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b} \quad (2)$$

Если  $b_1=0, \dots, b_m=0$ , то система называется линейной однородной.

Однородная система в векторной форме имеет вид

$$A \cdot \bar{x} = \bar{0}$$

Система (2) называется линейной неоднородной системой.

# ПРИМЕРЫ

---

Пример 1. Для системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x - y + 5z = 3 \\ 4x + 7z = 7 \end{cases}$$

указать матрицу системы  $A$  и столбец свободных членов  $\bar{b}$   
Записать систему в векторной форме.

# ПРИМЕРЫ

---

Решение. Обозначим столбец неизвестных :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Тогда матрица  $A$  рассматриваемой системы составляется из числовых коэффициентов, стоящих в системе при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

# ПРИМЕРЫ

Столбец  $\bar{b}$  составляется из свободных членов системы:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Поэтому систему можно переписать в векторной форме:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

$$\text{О т в е т: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

# Системы линейных алгебраических уравнений

**О п р е д е л е н и е.** Расширенной матрицей системы (1) называется матрица, обозначаемая  $(A|\bar{b})$  и полученная приписыванием к матрице  $A$  справа после вертикальной черты столбца  $\bar{b}$ .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \square + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \square + a_{2n}x_n = b_2 \\ \square \quad \square \\ a_{m1}x_1 + \square + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

# Системы линейных алгебраических уравнений

---

**О п р е д е л е н и е.** Решением системы (2)  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$  называется любой  $n$ - мерный вектор  $\bar{x}$ , подстановка которого в систему дает тождество.

**О п р е д е л е н и е.** Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной.

# Системы линейных алгебраических уравнений

**Теорема 1.** (Кронекера – Капелли). Система (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть:

$$r(A) = r(A | \bar{b}).$$

При этом если  $r(A) = n$ , то система имеет единственное решение; если  $r(A) < n$ , то система имеет бесконечное множество решений ( $n$  — число неизвестных).

# ПРИМЕРЫ

Пример 2. Исследовать на совместность систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# ПРИМЕРЫ

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$(A|\bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-3)(-4) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \\ \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Следовательно:  $r(A) = 2$ ,  $r(A|\bar{b}) = 3$  и  $r(A) \neq r(A|\bar{b})$ .

О т в е т: система несовместна.

# Метод Гаусса

---

Определение. Две системы, множества решений которых совпадают, называются *равносильными*.

Теорема. 2. Применение к расширенной матрице системы элементарных преобразований приводит к равносильной системе.

**Метод Гаусса** основан на приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду Гаусса и решению полученной системы.

# Метод Гаусса

---

Шаги метода Гаусса рассмотрим на примере.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

# Метод Гаусса

I. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow A/\bar{b} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \cdot(-1) \\ \leftarrow \downarrow \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \cdot(-1) \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Метод Гаусса

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

□. Проверить совместность системы.

Если  $r(A/\bar{b}) \neq r(A)$ , то система несовместна. Решение заканчивается.

Если  $r(A/\bar{b}) = r(A)$ , то система совместна. Если  $r = n$ , то решение единственно.

Если  $r < n$ , то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае следует определить базисные и свободные переменные.

В примере  $r(A/\bar{b}) = r(A) = 2 < n = 4$ .

Система совместна и имеет бесконечное множество решений.

**Базисным переменным соответствуют базисным столбцам.**

В примере базисные переменные:  $x_1, x_2$ .

**Остальные переменные называются свободными. Число свободных переменных определяется из условия  $k = n - r$ .**

В примере  $k = 4 - 2 = 2$ , свободные переменные:  $x_3, x_4$ .

# Метод Гаусса

III. Привести матрицу к виду Гаусса.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & \underline{3} & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-3)} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

IV. Написать систему, соответствующую матрице шага III.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

# Метод Гаусса

У. Выразить базисные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 + x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_3 - x_4. \end{cases}$$

УІ. Обозначить свободные переменные через  $C_1, \dots, C_k$ :  $x_3 = C_1$ ,  $x_4 = C_2$   
и выразить базисные переменные через них.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + C_1 - 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 - C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

# Метод Гаусса

УП. Записать ответ в векторной форме.

$$\begin{cases} x_1 = 2 + C_1 - 2C_2, \\ x_2 = 1 - 2C_1 - C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Метод Гаусса

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{l}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда общее решение неоднородной системы  $A\bar{x} = \bar{b}$  имеет вид

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + C_1 \bar{l}_1 + C_2 \bar{l}_2$$

$\bar{x}_0$  — частное решение неоднородной системы  $A\bar{x} = \bar{b}$  при  $C_1 = C_2 = 0$ ,

$\bar{l}_1, \bar{l}_2$  — линейно независимые решения однородной системы  $A\bar{x} = \bar{0}$ .

# Линейная зависимость векторов

□ **Определение.** Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  называются *линейно зависимыми*, если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , не все равные нулю, такие, что справедливо равенство:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0 \quad (1).$$

**Определение.** Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  называются *линейно независимыми*, если выполнение равенства (1) возможно только при условии:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

**Теорема.** Векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен  $n$ .

**Определение.** Рангом матрицы называется наивысший порядок минора, отличного от нуля.

# Системы любого числа линейных алгебраических уравнений

**Теорема 2.** Решение системы  $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$  (2) имеет вид:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + c_1 \bar{l}_1 + \dots + c_k \bar{l}_k, \quad (3)$$

где  $\bar{x}_0$  — частное решение линейной неоднородной системы (2); число  $k$ , называемое числом свободных неизвестных системы (2), вычисляется по формуле  $k = n - r(A)$ ,

$c_1, \dots, c_k$  — произвольные постоянные числа;

$\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k$  — постоянные  $n$ -мерные векторы, являющиеся линейно независимыми решениями соответствующей линейной однородной системы

$$A \cdot \bar{x} = \bar{0}$$

# Фундаментальная система векторов

---

Рассмотрим однородную систему

$$A \cdot \bar{x} = \bar{0}$$

Однородная система всегда совместна, так как всегда имеет нулевое (тривиальное) решение.

Нетривиальное решение возможно только при условии

$$r(A) < n$$

Общее решение имеет вид

$$\bar{x} = C_1 \bar{l}_1 + \dots + C_k \bar{l}_k$$

$\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k$  – линейно-независимые  $n$ -мерные векторы, образующие фундаментальную систему решений однородной системы.

# ПРИМЕРЫ

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Решение. В данном случае имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов.}$$

# ПРИМЕРЫ

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$(A \bar{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-3)(-4) \\ \leftarrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \uparrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \uparrow \\ (6)(-2) \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{l} r(A) = r(A \bar{b}) = 3, \\ n = 3, \\ \text{система совместна,} \\ \text{решение единственное} \end{array} \right] \rightarrow$$

# ПРИМЕРЫ

---

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 8, \\ z = -1. \end{cases}$$

О т в е т:  $x = 3$ ;  $y = 8$ ;  $z = -1$ .

# ПРИМЕРЫ

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 16. \end{cases}$$

Решение.

$$A/\bar{b} = \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & 4 & 2 & 6 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 16 \end{array} \right) \cdot (-2) \cdot (-3) \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 16 \\ \boxed{-1} & 0 & -7 & -3 & -11 & -22 \\ -5 & 0 & -9 & -5 & -17 & -32 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ (2) (5) (-1) \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -10 & -4 & -16 & -28 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 26 & \boxed{10} & 38 & 78 \end{array} \right) (0,1) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -10 & -4 & -16 & -28 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & 7,8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \uparrow \\ (-3)(4) \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0,4 & 0 & -0,8 & 3,2 \\ 1 & 0 & -0,8 & 0 & -0,4 & -1,4 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & 7,8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \uparrow \\ \leftarrow \end{array}$$

# ПРИМЕРЫ

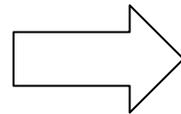
Пример 3. (продолжение)

Получим систему

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0,4 & 0 & -0,8 & 3,2 \\ 1 & 0 & -0,8 & 0 & -0,4 & -1,4 \\ 0 & 0 & 2,6 & 1 & 3,8 & 7,8 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_2 + 0,4x_3 - 0,8x_5 = 3,2, \\ x_1 - 0,8x_3 - 0,4x_5 = -1,4, \\ 2,6x_3 + x_4 + 3,8x_5 = 7,8. \end{cases}$$

откуда



$$\begin{cases} x_1 = -1,4 + 0,8C_1 + 0,4C_2, \\ x_2 = 3,2 - 0,4C_1 + 0,8C_2, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = 7,8 - 2,6C_1 - 3,8C_2, \\ x_5 = C_2. \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,4 \\ 3,2 \\ 0 \\ 7,8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 0,8 \\ -0,4 \\ 1 \\ -2,6 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 0 \\ -3,8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

---

□ **Теорема.** Если матрица  $A$  квадратная и невырожденная, то система

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

имеет единственное решение, вычисляемое по формуле

$$\bar{x}_0 = A^{-1}\bar{b}$$

где  $A^{-1}$  - матрица, обратная к матрице  $A$ .