Электронное пособие

Основные понятия и определения

ВЫХОД

Оглавление:

- Вектор
- Матрица
- Многогранник
- Многоугольник
- Определитель
- Система
- Система координат
- Стереометрия
- Уравнение плоскости

Вектор

— направленный отрезок, для которого указаны начало и конец.

- Основные понятия
- Виды векторов
- Равенство векторов
- Сложение и вычитание векторов
- Умножение вектора на число
- Компланарные векторы
- Координаты вектора
- Длина вектора
- Расстояние между двумя точками
- Скалярное произведение векторов

Основные понятия

- Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: [illegible]
- Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: [illegible]
- **Длиной** или **модулем** ненулевого вектора называется длина отрезка. Длина нулевого вектора равна 0.
- Длина вектора обозначается знаком модуля: [illegible]

Виды векторов

- Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- Если два ненулевых вектора АБ и CD коллинеарны и если при этом лучи АБ и CD сонаправлены, то векторы АБ и CD называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы АВ и CD называются **противоположно направленными**.

Равенство векторов

- Векторы называются равными, если они **сонаправлены и их длины равны**.

Теорема: от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

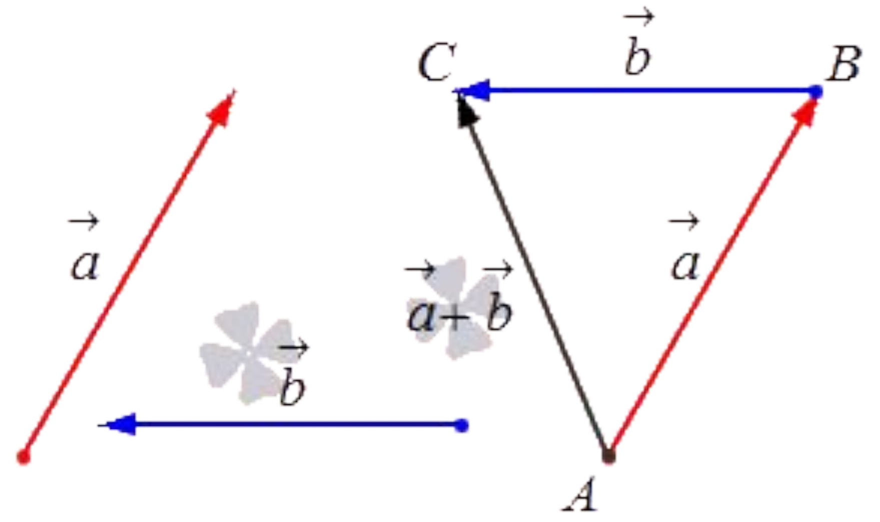
Сложение векторов

- Правило треугольника
- Переместительный закон
- Сочетательный закон
- Разность векторов
- Правило многоугольника
- Правило параллелограмма

ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Для любых трех точек А, В и С имеет место равенство

$\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$.



Переместительный закон

$$\vec{a} + \vec{в} = \vec{в} + \vec{a}$$

Сочетательный закон

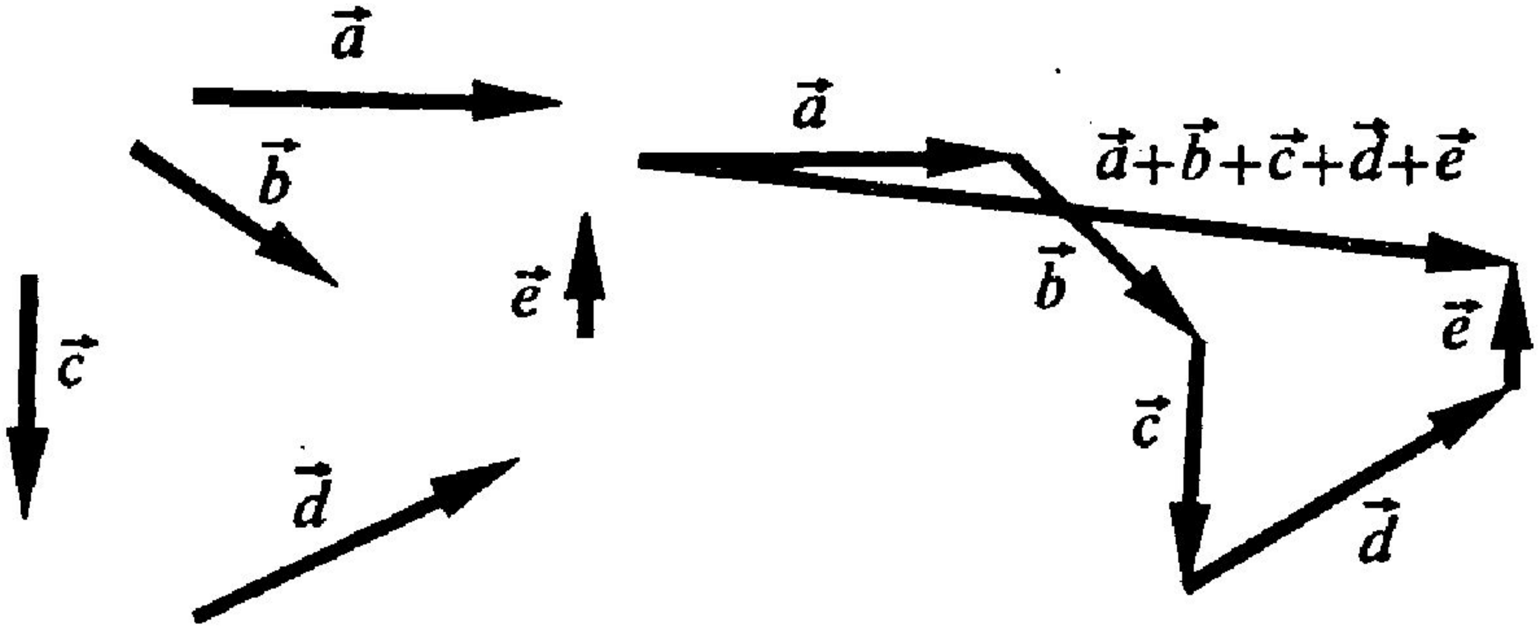
$$(\vec{a} + \vec{в}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{в} + \vec{c})$$

Разность векторов

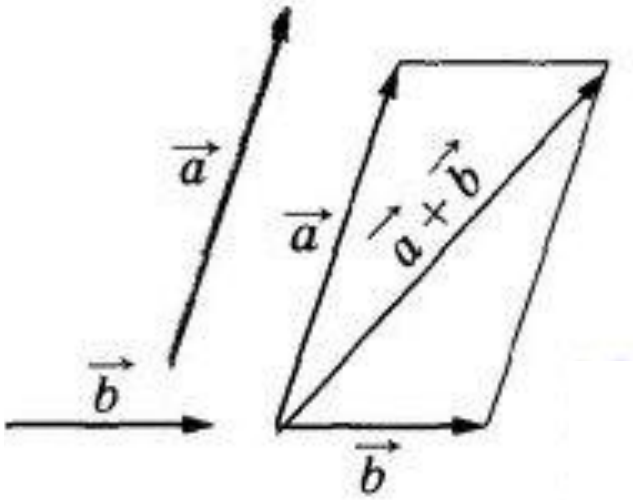
- Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-b)$$

Правило многоугольника



Правило параллелограмма



Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон);

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (первый распределительный закон);

$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (второй распределительный закон).

Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, **векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.**

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \qquad (1)$$

где x и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

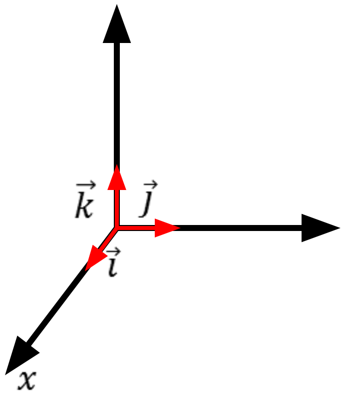
Справедливо и обратное утверждение: **если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$** (т. е. представить в виде (1)), **причем коэффициенты разложения** (т. е. числа x, y в формуле (1)) **определяются единственным образом.**

Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.



Сумма и разность векторов, умножение вектора на число.

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов: $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов:

$\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ — $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.

3. Каждая координата произведения вектора на число рана произведению соответствующий координаты вектора на это число:

   если $\vec{a}\{x; y; z\}$, а α – данное число, то $\alpha\vec{a}\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.

Длина вектора

- Длина вектора $\vec{a}\,\{x; y; z\}$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Расстояние между двумя точками

- Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Скалярное произведение векторов

» Скалярным произведением векторов называют произведение их длин на косинус угла между ними: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)$

› Скалярное произведение ненулевых векторов равно 0 тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;

› Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

› Общая формула: $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

Матрица

— математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов задает размер матрицы.

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} & & b_2 \\ \ldots & & & & \ldots \\ a_{pl} & a_{p2} & a_{p3} \ldots a_{pn} & & b_n \end{array}\right)$$

Пример матричной формы записи системы

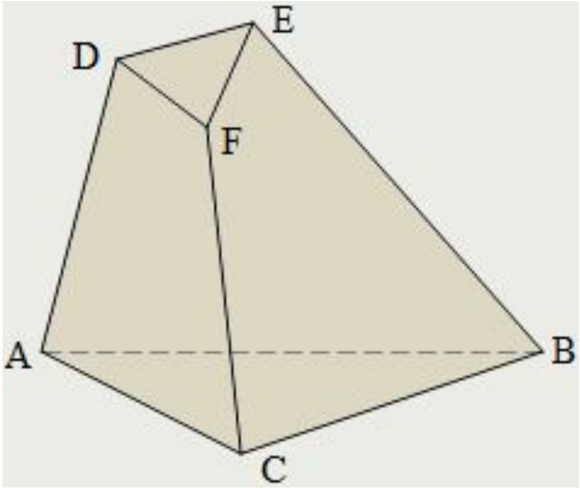
Многогранник

— геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

- Выпуклый многогранник
- Правильный многогранник
- Теорема Эйлера
- Призма
- Параллелепипед
- Пирамида

Выпуклый многогранник

— многогранник, который расположен по одну сторону плоскости, проведённой через любой многоугольник, образующий поверхность данного многогранника.



Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его **гранями**: ABC, DEF, ABED, BCFE, ACFD; стороны многоугольников – **рёбрами**: AB, BC, AC, DE, EF, DF, AD, BE, CF; **вершины** – вершинами многогранника: A, B, C, D, E, F

Правильный многогранник

— многогранник, у которого грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

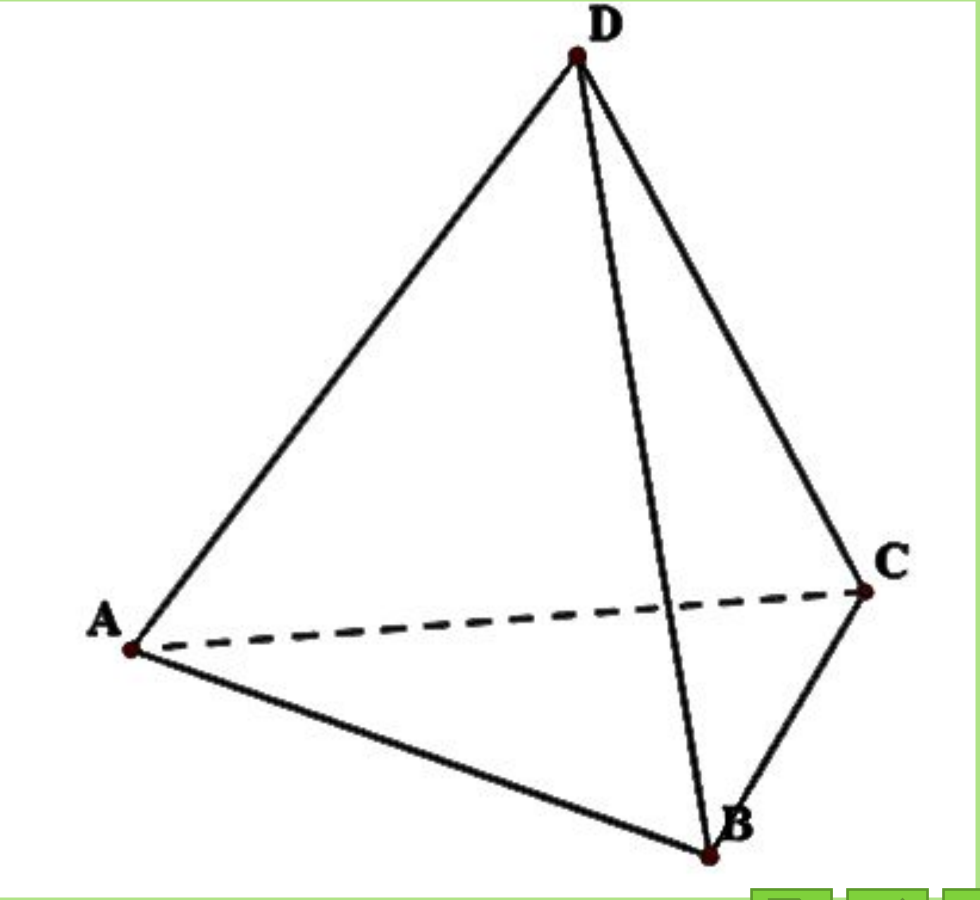
Всего существует 5 типов:

- Тетраэдр
- Куб
- Октаэдр
- Додекаэдр
- Икосаэдр

ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

У правильного тетраэдра грани –правильные треугольники;
в каждой вершине сходится по три ребра.

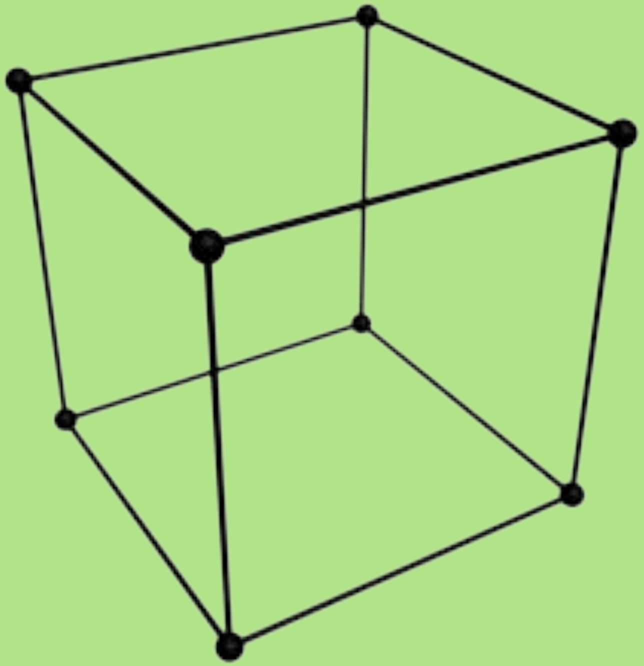
Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.



КУБ

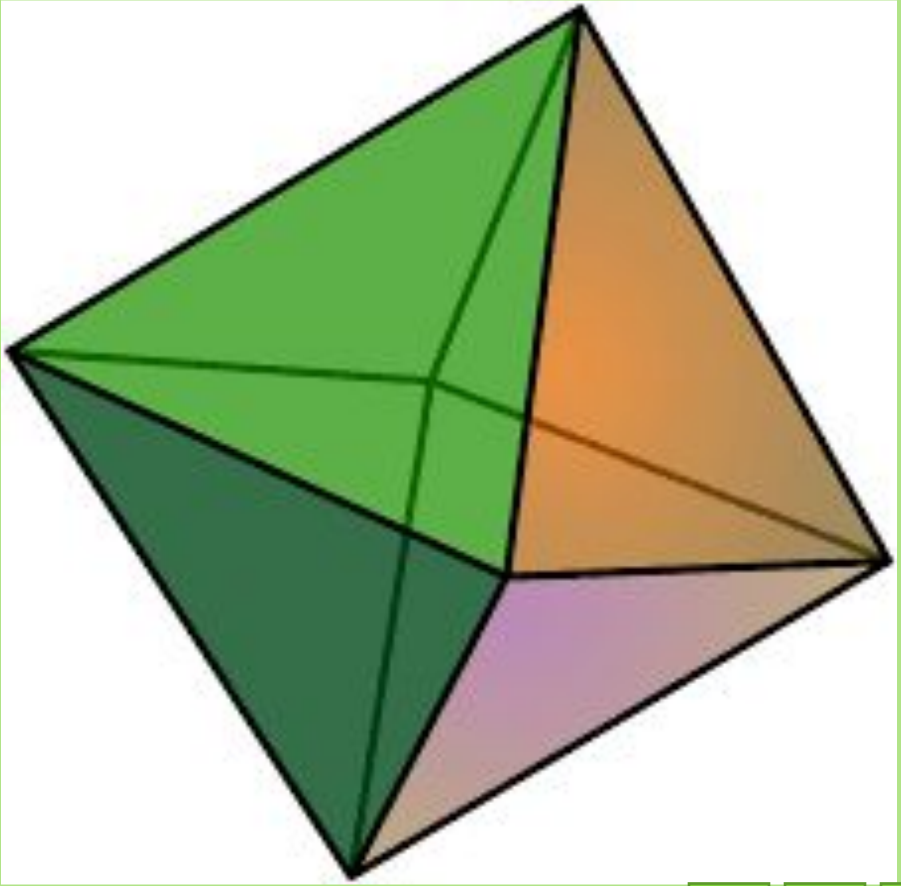
У куба (правильный гексаэдр) все грани – квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра.

Куб представляет собой прямоугольный параллелепи-пед с равными ребрами.



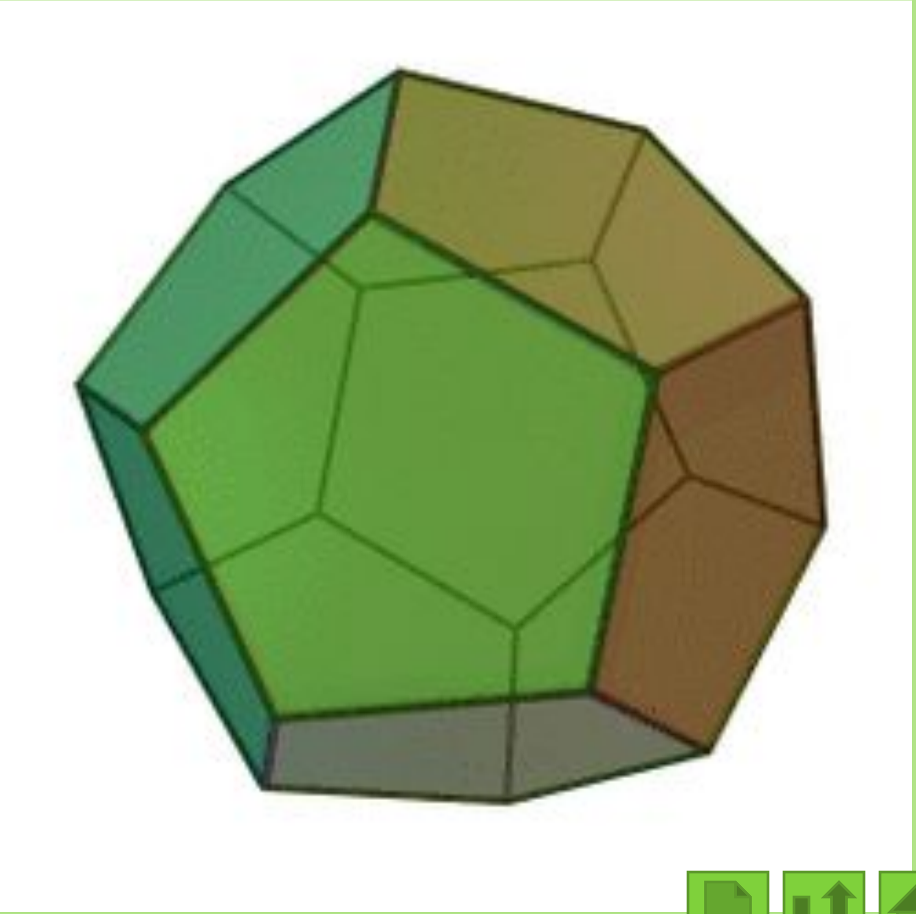
ПРАВИЛЬНЫЙ ОКТАЭДР

У октаэдра грани – правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.



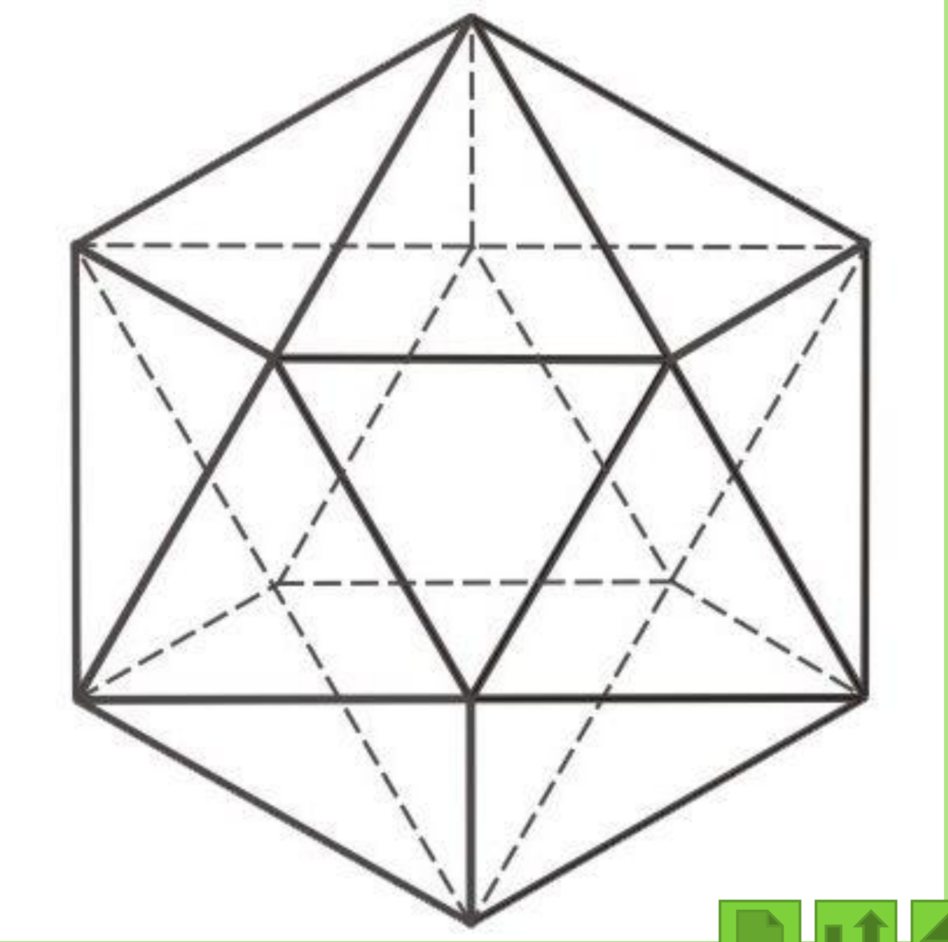
ПРАВИЛЬНЫЙ ДОДЕКАЭДР

У додекаэдра грани – правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.



ПРАВИЛЬНЫЙ ИКОСАЭДР

У икосаэдра грани – правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.



Теорема Эйлера

- Если V — число вершин выпуклого многогранника, R — число его ребер и G — число граней, то верно равенство:

$$V - R + G = 2$$

Призма

— многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, которые лежат в разных плоскостях и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники, о которых шла речь, называются **основаниями** призмы, а отрезки, соединяющие их соответствующие вершины – **боковыми рёбрами** призмы.

- Свойства призмы
- Треугольная призма
- Прямая призма (наклонная, правильная)

Свойства призмы

- Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях.
- Боковые рёбра призмы равны и параллельны.
- Поверхность призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности.
- Боковая поверхность любой призмы состоит из параллелограммов, у каждого из которых две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие – соседними боковыми рёбрами.
- Высотой призмы называется любой из перпендикуляров, проведённых из точки одного основания к плоскости другого основания призмы.
- Призма называется n-угольной, если её основание – n-угольник.

ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

$ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма;

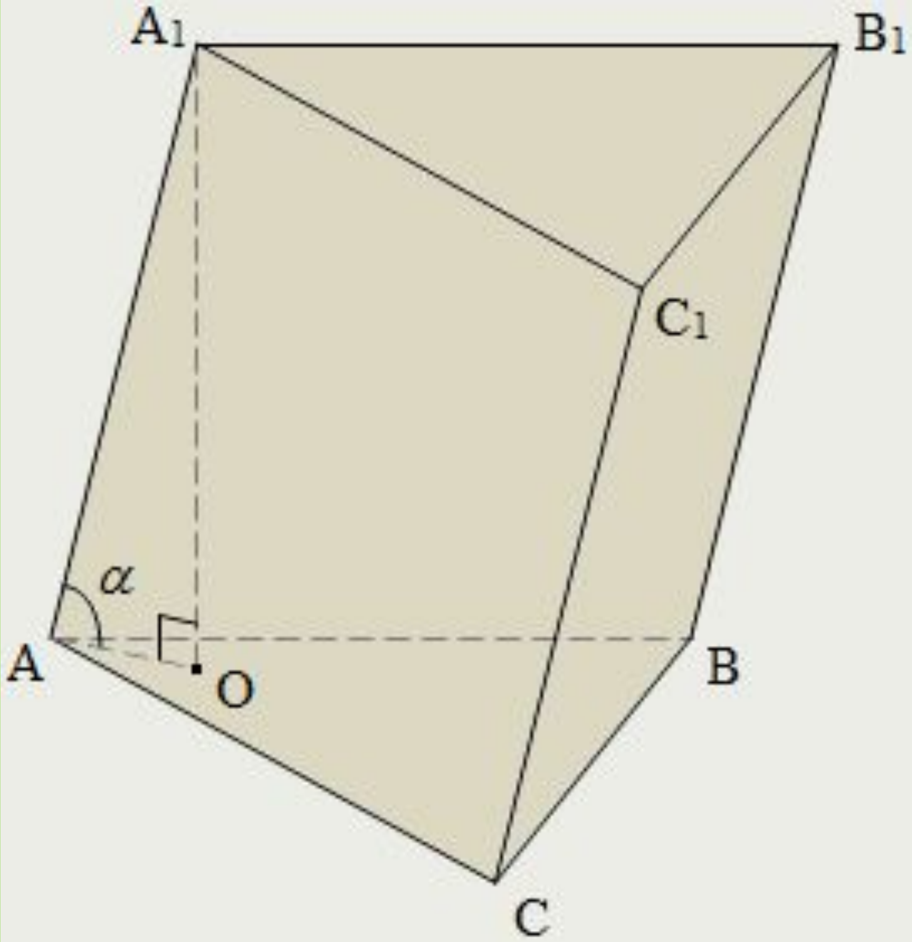
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – основания;

AA_1, BB_1, CC_1 – боковые рёбра;

AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C – боковые грани;

A_1O – высота призмы;

α – угол наклона бокового ребра к основанию призмы.



ПРЯМАЯ ПРИЗМА

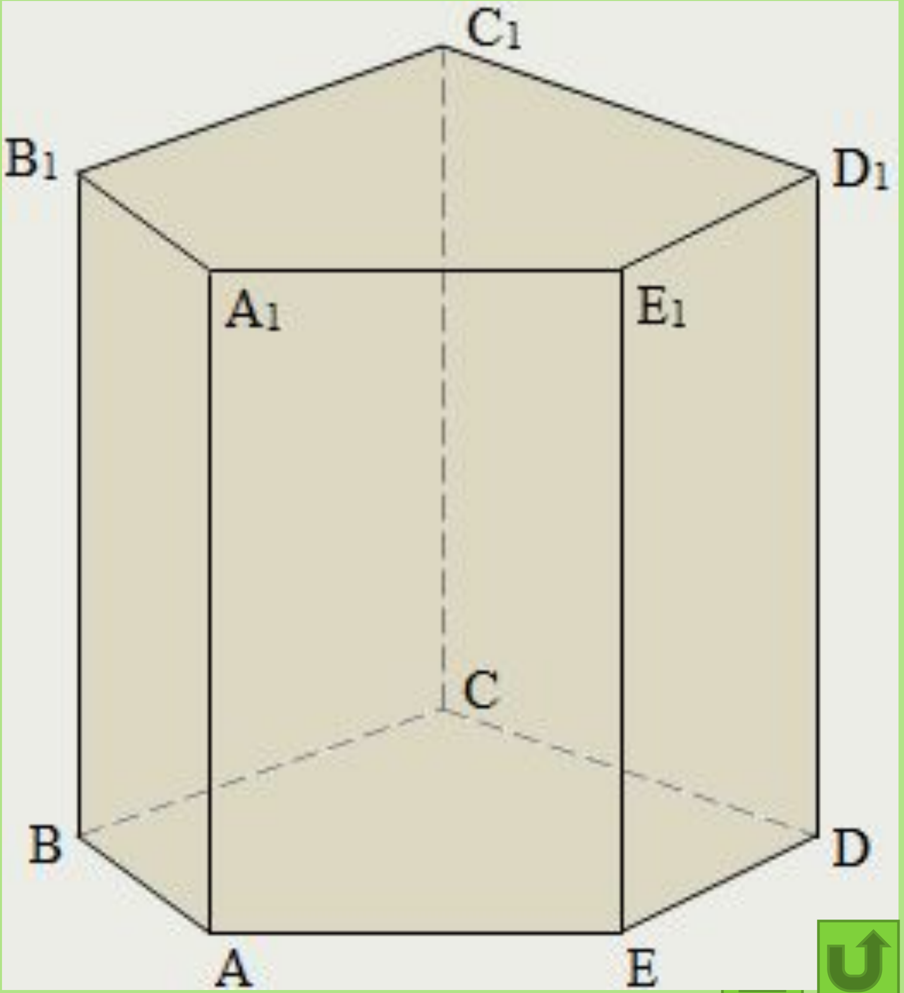
Призма называется прямой, если её рёбра перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае призма называется **наклонной**.

Свойства:

- ✔ Боковые грани прямой призмы – прямоугольники.
- ✔ Боковое ребро прямой призмы является её высотой.
- ✔ Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$S_б = P_{осн} \cdot AA_1$.

- ✔ Прямая призма называется **правильной**, если её основания являются правильными многоугольниками.



Параллелепипед

— призма, в основании которой лежит параллелограмм.

- Свойства параллелепипеда
- Прямоугольный параллелепипед
- Куб
- Плоскости симметрии

Свойства параллелепипеда

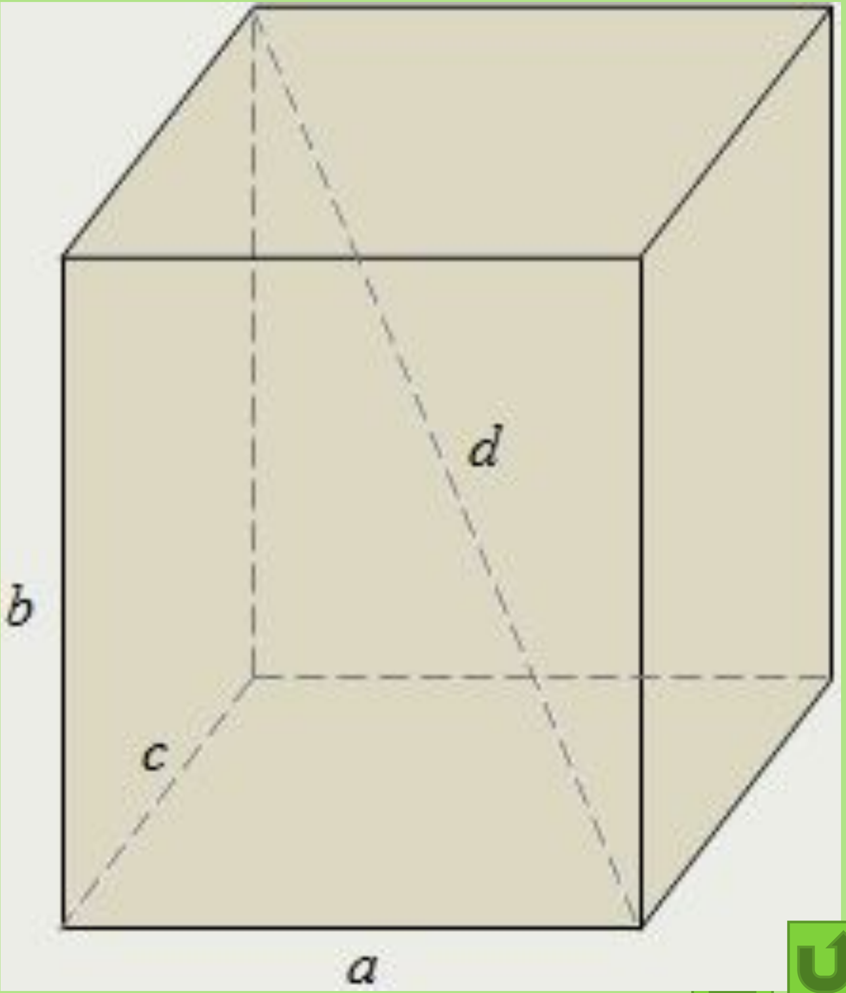
- У параллелепипеда все грани – параллелограммы.
- Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими.
- У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
- Диагональю параллелепипеда, как и многогранника вообще, называется отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не лежащие в одной его грани.
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
- Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Прямоугольным параллелепипедом называется такой прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник.

Свойства:

- ✔ Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.
- ✔ Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются его измерениями или линейными размерами.
- ✔ У прямоугольного параллелепипеда три измерения.
- ✔ В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- ✔ Площадь полной поверхности: $S_п = 2\cdot(ab+bc+ac)$;
- ✔ Объём: $V = abc$.



КУБ

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.

Диагональ куба в квадратный корень из трёх раз больше его стороны:

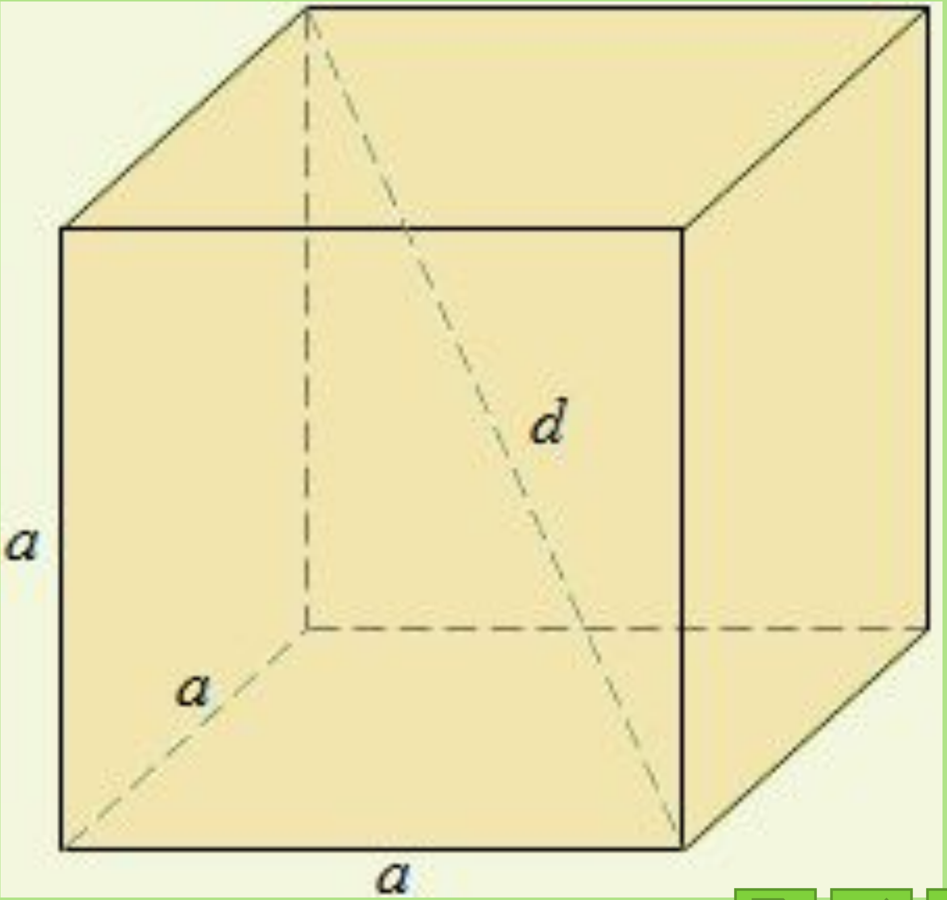
$$d = a\sqrt{3}.$$

Площадь полной поверхности:

$S_п = 6 \cdot a^2$, $S_п = 2 \cdot d^2$

Объем:

$$V = a^3, \ V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}.$$



Плоскости симметрии

- В прямоугольном параллелепипеде, как и во всяком параллелепипеде, есть центр симметрии – точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно парам противолежащих граней. На рисунке №1 показана одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда.
- Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме тех, что на рисунке №2.
- Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то есть он является правильной четырёхугольной призмой, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на рисунке №3.

Рисуно

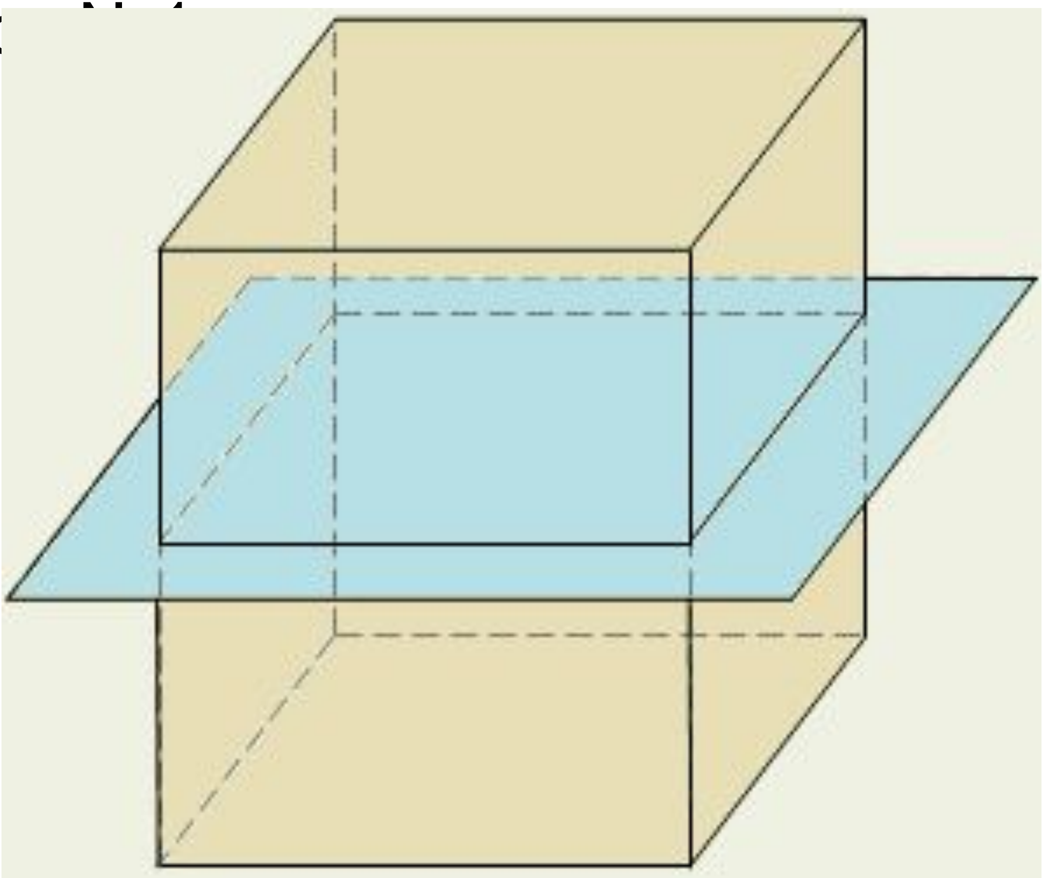


Рисунок №2

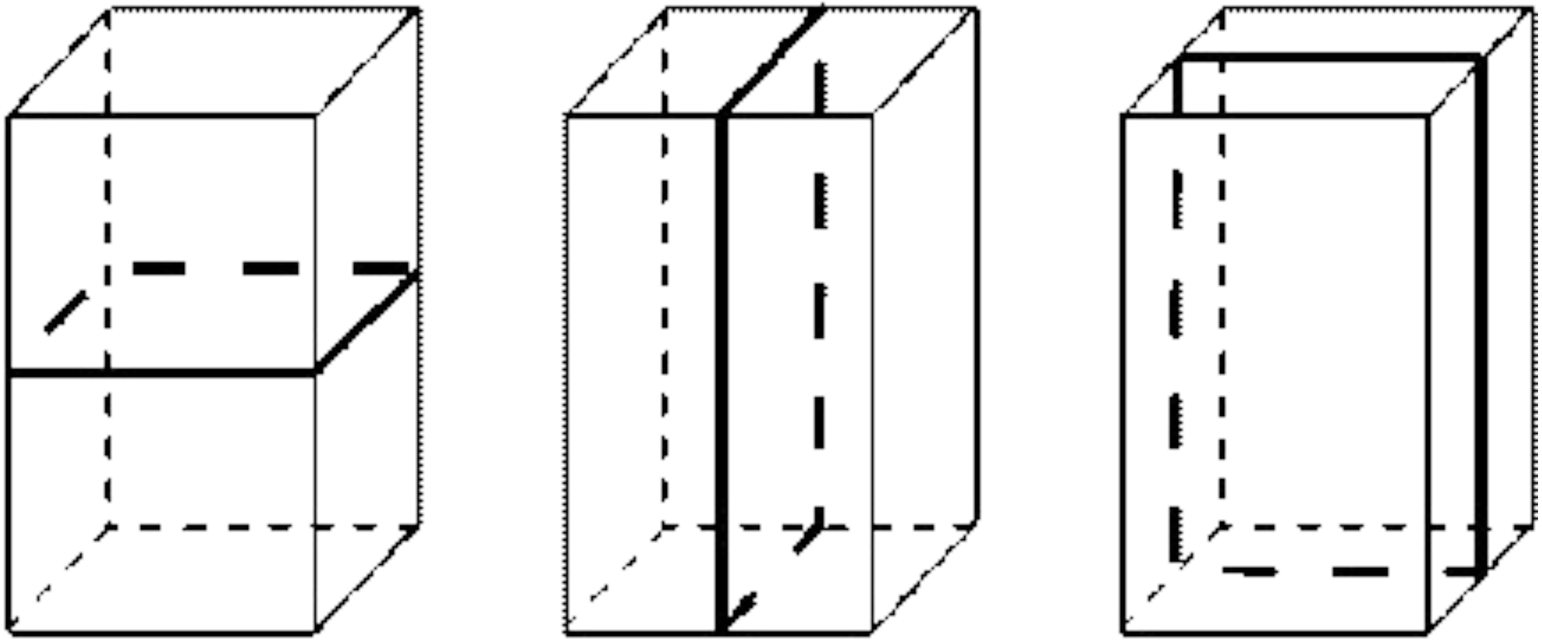
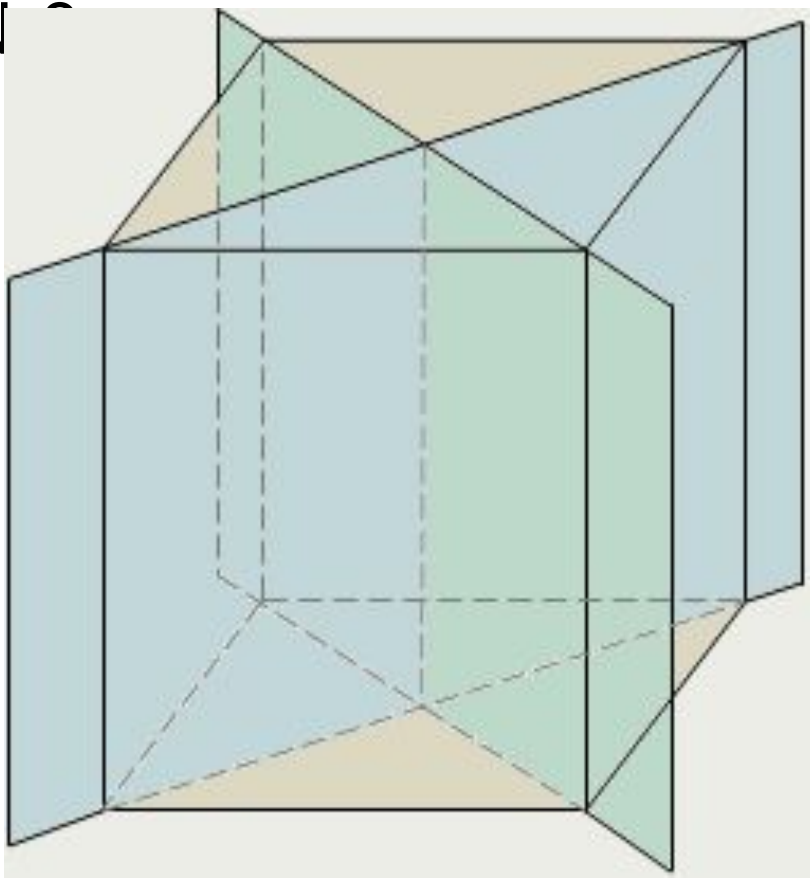


Рисунок N



Пирамида

— многогранник, одна из граней которого (называемая **основанием**) — произвольный многоугольник, а остальные грани (называемые **боковыми гранями**) — треугольники, имеющие общую вершину.

- Основные понятия
- Основание центр описанной окружности
- Основание центр вписанной окружности
- Правильная пирамида
- Усеченная пирамида

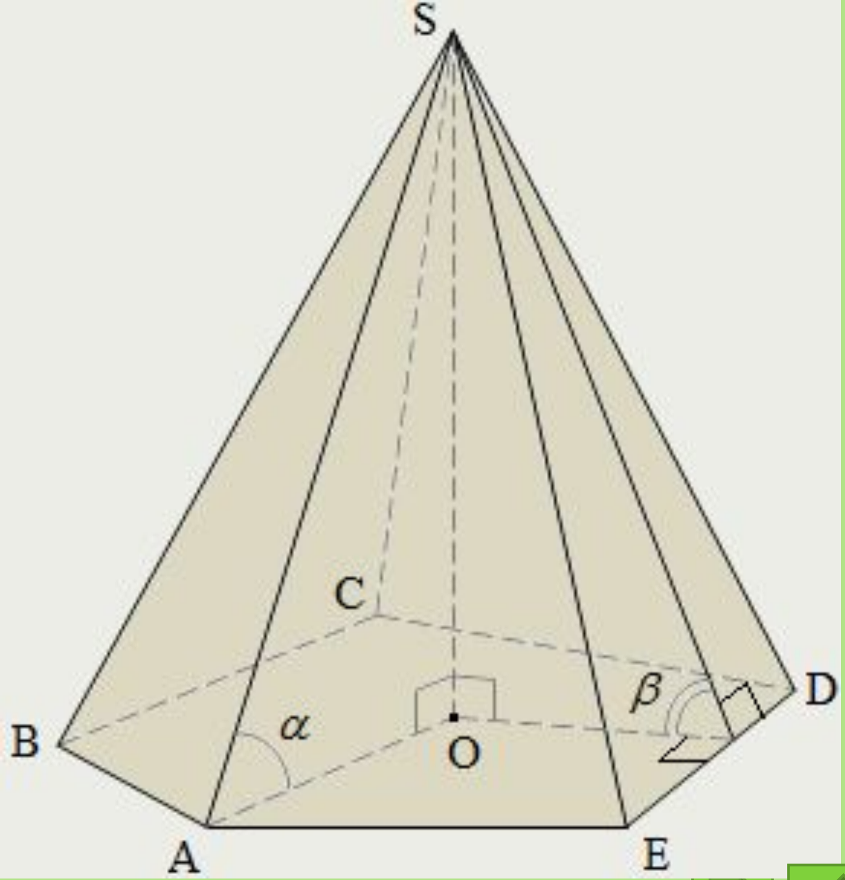
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Высотой пирамиды (SO) называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется *n*-угольной, если ее основанием является *n*-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

α – угол наклона бокового ребра SA пирамиды к плоскости её основания;

β – угол наклона боковой грани (SED) пирамиды к плоскости её основания.



Основание центр описанной окружности

— основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- › все боковые ребра равны;
- › боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;
- › боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды.

Основание центр вписанной окружности

— Основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

› боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом;

› высоты боковых граней равны;

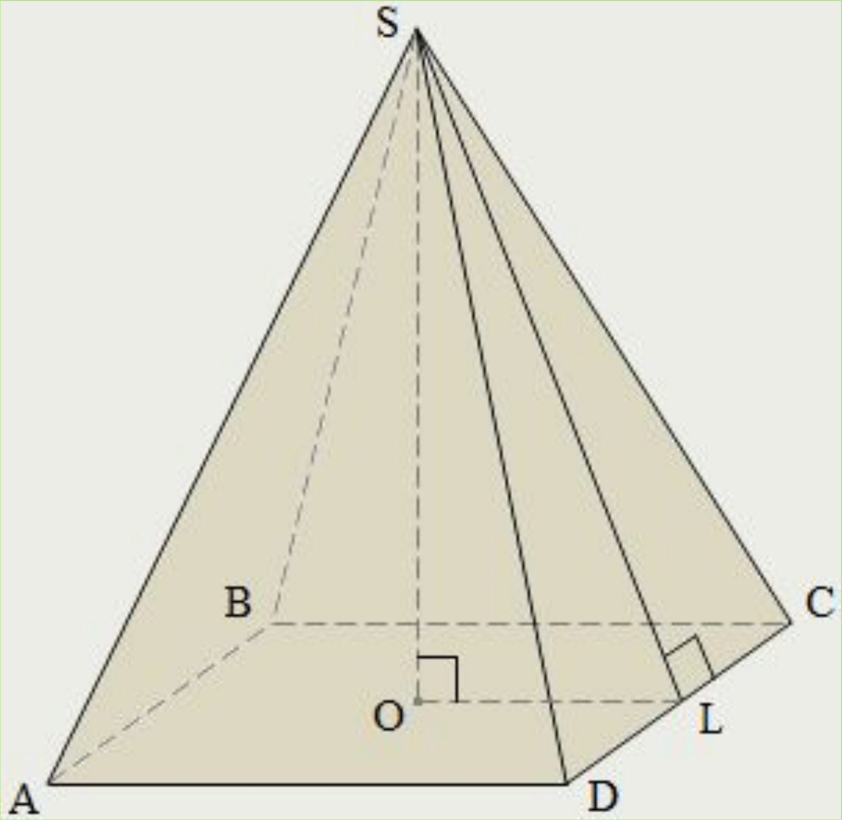
› боковые грани образуют равные углы с высотой пирамиды.

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (O - центр описанной и вписанной окружностей основания).

Свойства:

- ✔ Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.
- ✔ Боковые ребра правильной пирамиды равны.
- ✔ Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.
- ✔ Высота боковой грани правильной пирамиды (SL), проведенная из ее вершины к стороне основания, называется апофемой.
- ✔ Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему: $S_б = ½P_{осн}·SL$.



УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

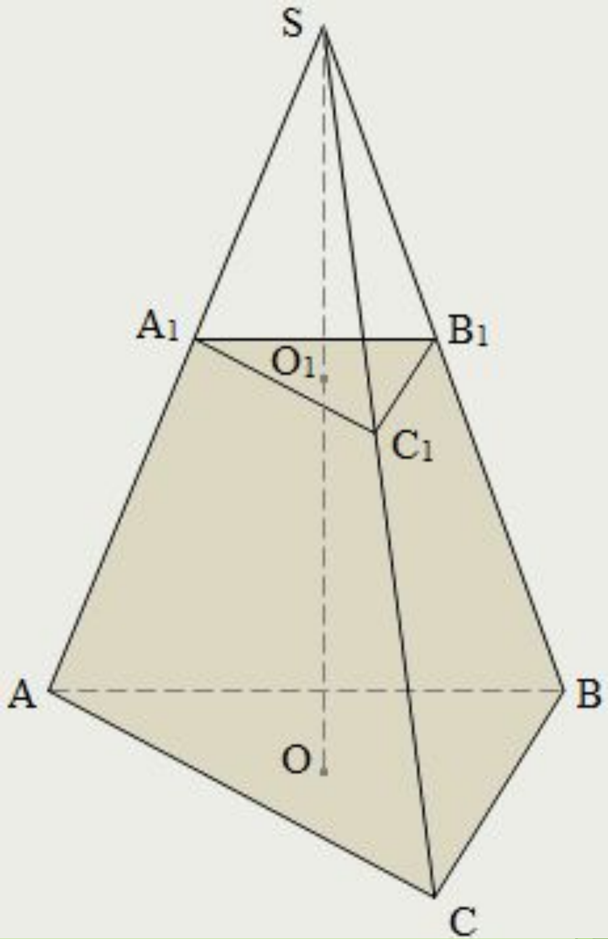
Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части: пирамиду, подобную данной и многогранник, называемый усеченной пирамидой.

Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями, остальные грани называются боковыми гранями.

Свойства:

- ✔ Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.
- ✔ Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.
- ✔ Если S_1 и S_2 – площади оснований усечённой пирамиды и h – её высота, то для объёма усеченной пирамиды верно:

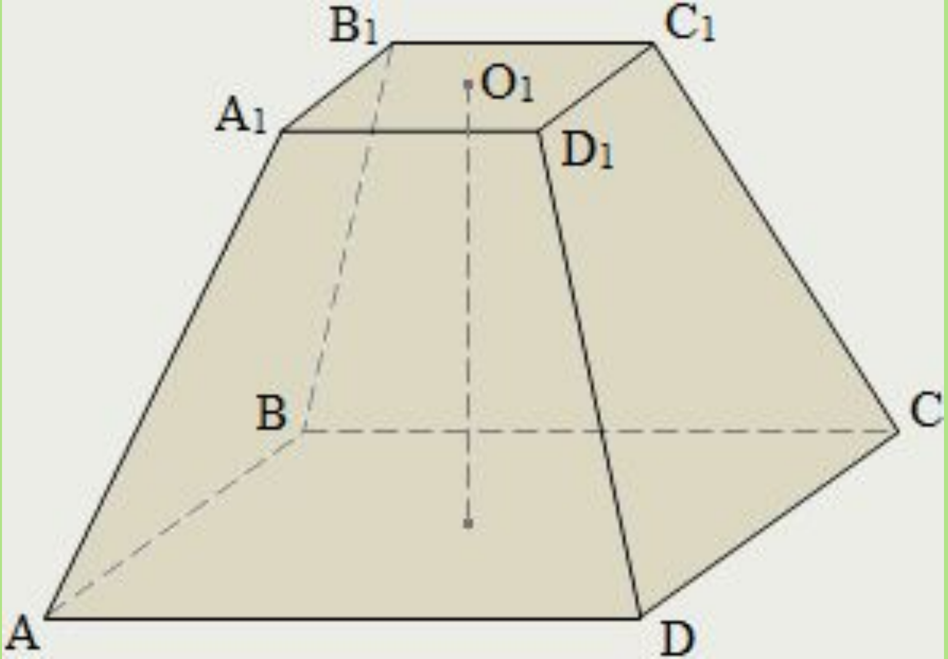
$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right).$$



ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Усеченная пирамида (например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$), которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды (AA_1B_1B, AA_1C_1C, DD_1C_1C, AA_1D_1D) – равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.



Многоугольник

— это замкнутая линия, которая образовывается, если взять *n* каких-либо точек A_1, A_2, ..., A_n и соединить их последовательно отрезками.

Выпуклый многоугольник

— это многоугольник, не имеющий самопересечений и каждый его внутренний угол меньше 180°.

Определитель

Что такое определитель?

Простой определитель

Для определителей третьего порядка

Способ столбцов и строк (ССС)

Правило Саррюса

Правило треугольника

Определитель матрицы.

Определитель (детерминант) матрицы - выражение, составленное из матрицы, с помощью которого находят решение систем линейных уравнений.

Определитель матрицы A обозначается как: det(A), |A| или ΔA.

Матрица A:	Определитель матрицы A

Вычисление определителей

Определители вычисляются только для квадратных матриц (т.е. для матриц, в которых количество строк равно количеству столбцов).

1) Определить матрицы 1 порядка равен элементу матрицы.

$$\Delta \mathrm{A} = |a_{11}| = a_{11}$$

2) Определитель матрицы второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}} * \boldsymbol{a_{22}} - \mathrm{a}_{21} * \mathrm{a}_{12}$$

Вычисление определителя матрицы 3-го порядка

1) Разложение по элементам строк и столбцов:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} * a_{33} - a_{32} * a_{23}) - a_{12}(a_{21} * a_{33} - a_{31} * a_{23})$$

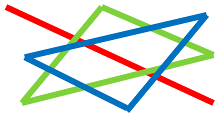
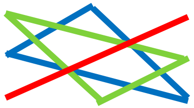
$$+ a_{13}(a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22})$$

Правило Саррюса

2)Правило Саррюса: Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, умножают на 1 ; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, умножают на (-1):

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Правило треугольника: значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, из которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.

Умноженное на 1	*Умноженное на (-1)*
	

Система координат

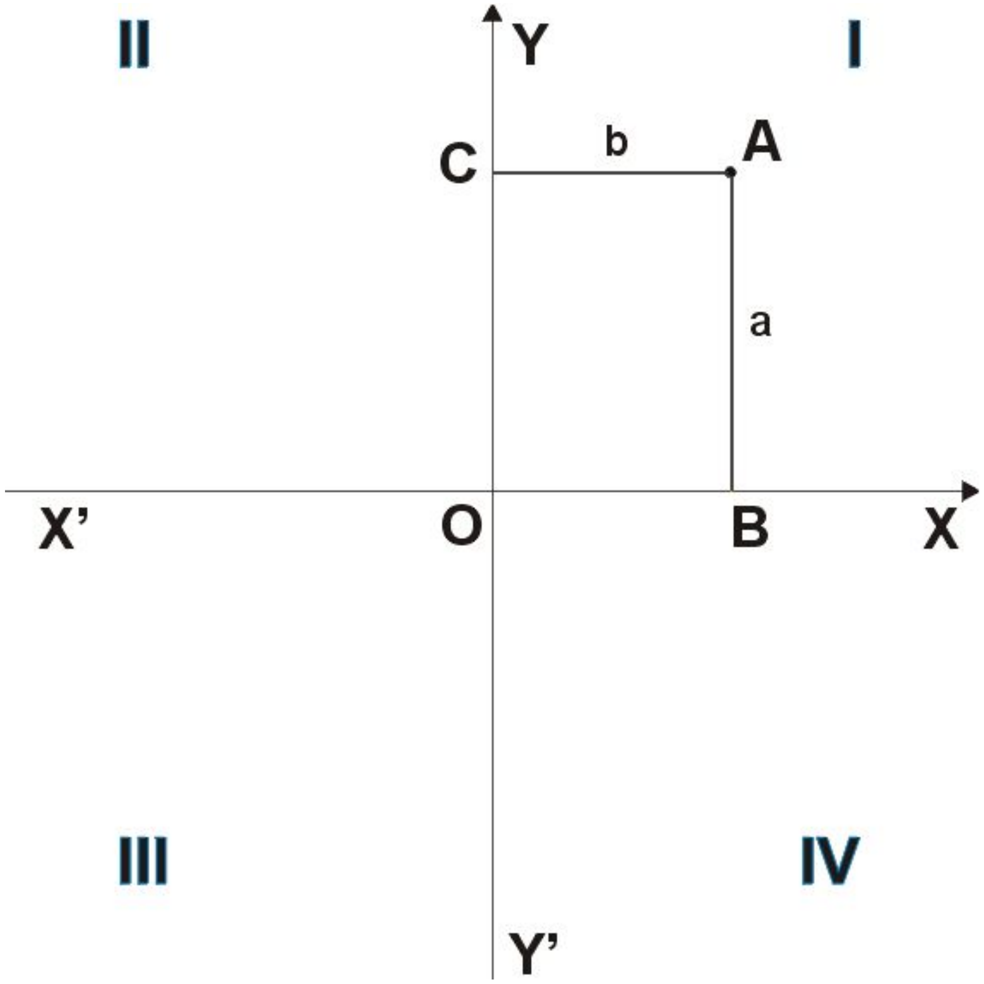
— комплекс определений, реализующий метод координат, то есть способ определять положение и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов.

Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется **координатами** этой точки.

- Прямоугольная система координат на плоскости
- Прямоугольная система координат в пространстве

Прямоугольная система координат на плоскости(декартовая)

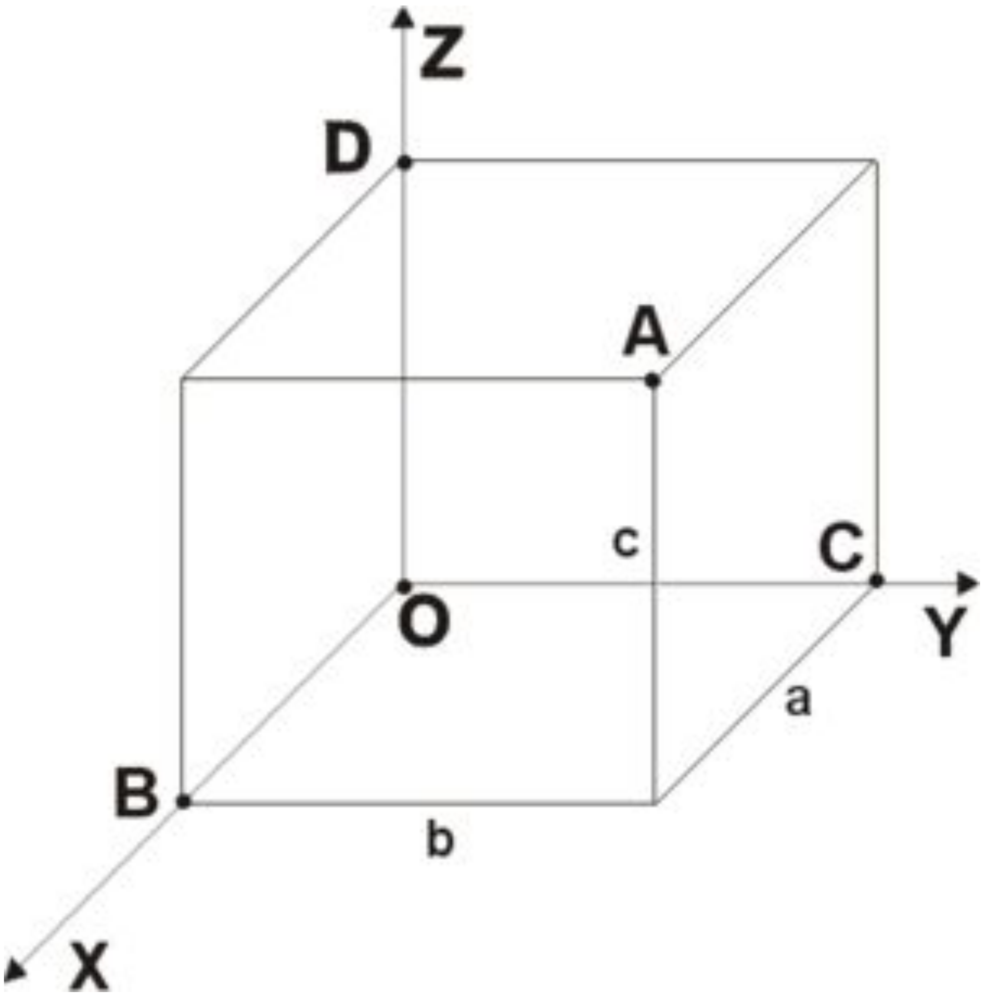
— образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ох(ось абсцисс) и Оу(ось ординат). Оси координат пересекаются в точке О, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей.



II
Y
I
C
b
A
a
X'
O
B
X
III
IV
Y'

Прямоугольная система координат в пространстве

— образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ox(ось абсцисс), Oy(ось ординат) и Oz(ось аппликат). Оси координат пересекаются в точке O, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей.



Z
D
A
c
C
O
Y
a
B
b
X

Система

— это совокупность элементов или отношений, закономерно связанных друг с другом в единое целое.

$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ – переменные

a_{ij} – коэфициент

i – номер строки

j – номер столбца

$b_1, b_2, b_3, \dots b_p$ – свободные члены

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} + \dots + x_n a_{3n} = b_3 \\ \dots \qquad\qquad\qquad \dots \qquad\qquad \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + x_3 a_{n3} + \dots + x_n a_{nn} = b_n \end{cases}$$

Стереометрия

— отдел геометрии, изучающий фигуры, не лежащие в одной плоскости.

Используемая литература:

- http://math4school.ru/mnogogranniki.html
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_координат
- плоскости симметрии прямоугольного параллелепипеда
- https://ru.wikipedia.org/wiki/Пирамида_(геометрия)
- http://mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html
- https://slovo.ws/urok/geometr/10/007/084.html
- Учебник по геометрии 10-11 класс (Серия «МГУ – школе» основана в 1999 году, авторы: Л.С. Анатасян, В.Ф. Бутузов и другие; издательство «Просвещение», 2006 год, с изменениями)