

Электронное пособие

Основные
понятия и
определения

ВЫХОД

Оглавление:

- Вектор
- Матрица
- Многогранник
- Многоугольник
- Определитель
- Система
- Система координат
- Стереометрия
- Уравнение плоскости



Вектор

— направленный отрезок, для которого указаны начало и конец.

- › [Основные понятия](#)
- › [Виды векторов](#)
- › [Равенство векторов](#)
- › [Сложение и вычитание векторов](#)
- › [Умножение вектора на число](#)
- › [Компланарные векторы](#)
- › [Координаты вектора](#)
- › [Длина вектора](#)
- › [Расстояние между двумя точками](#)
- › [Скалярное произведение векторов](#)



Основные понятия

- › Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: \overrightarrow{AB}
- › Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: \vec{a}
- › **Длиной** или **модулем** ненулевого вектора называется длина отрезка. Длина нулевого вектора равна 0.
- › Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\vec{a}|$

Виды векторов

- › Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- › Если два ненулевых вектора AB и CD коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы AB и CD называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы AB и CD называются **противоположно направленными**.



Равенство векторов

- › Векторы называются равными, если они **сонаправлены и их длины равны.**

Теорема: от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.



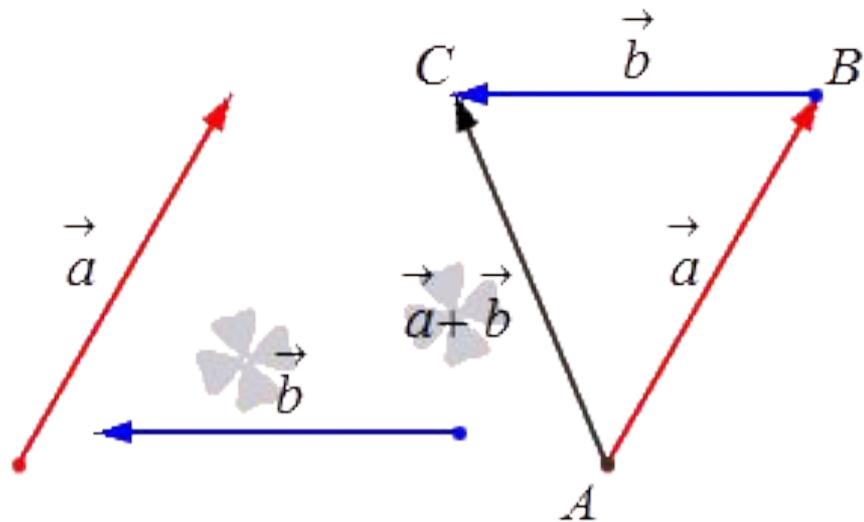
Сложение векторов

- › Правило треугольника
- › Переместительный закон
- › Сочетательный закон
- › Разность векторов
- › Правило многоугольника
- › Правило параллелограмма

ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Для любых трех точек А,
В и С имеет место
равенство

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$



Переместительный закон

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Сочетательный закон

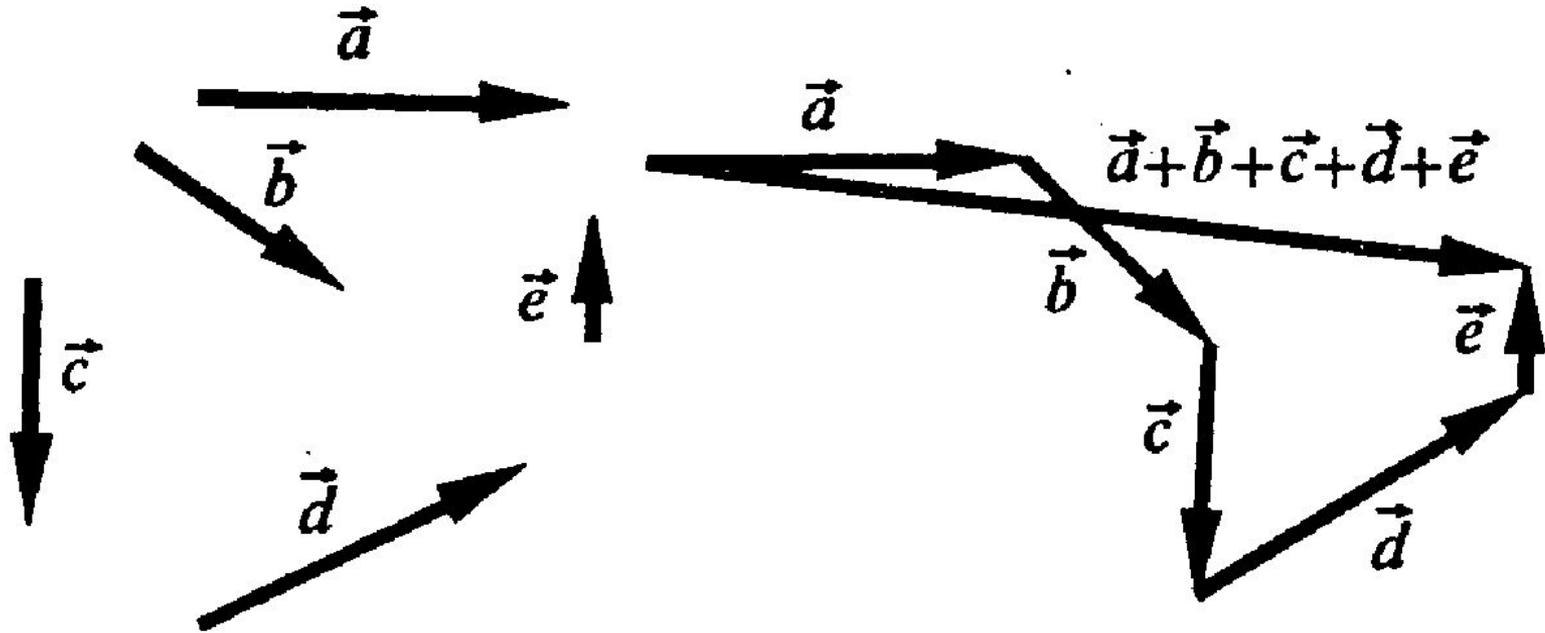
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Разность векторов

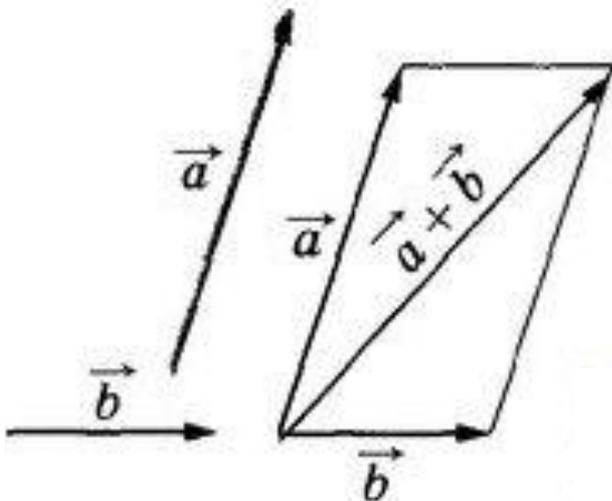
› Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} . Разность векторов \vec{a} и \vec{b} можно найти по формуле:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-b)$$

Правило многоугольника



Правило параллелограмма



Правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов

Умножение вектора на число

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и любых чисел k , l справедливы равенства:

$$(kl) \vec{a} = k (l\vec{a}) \text{ (сочетательный закон);}$$

$$k (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} \text{ (первый распределительный закон);}$$

$$(k + l) \vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} \text{ (второй распределительный закон).}$$



Компланарные векторы

Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , т. е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad (1)$$

где x и y — некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} **компланарны**.

Справедливо и обратное утверждение: если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} **компланарны**, а векторы \vec{a} и \vec{b} не **коллинеарны**, то вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} (т. е. представить в виде (1)), причем коэффициенты разложения (т. е. числа x , y в формуле (1)) **определяются единственным образом**.

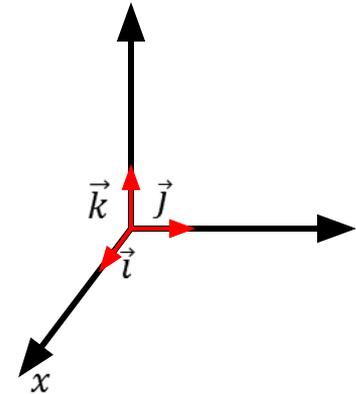


Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат единичный вектор, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через \vec{i} единичный вектор оси абсцисс, через \vec{j} — единичный вектор оси ординат и через \vec{k} — единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} назовем координатными векторами. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому любой вектор \vec{a} можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения x , y , z определяются единственным образом.



Сумма и разность векторов, умножение вектора на число.

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов: $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$.
2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов: $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$, то вектор $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$.
3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующий координаты вектора на это число:
если $\vec{a} \{x; y; z\}$, а α – данное число, то $\alpha \vec{a} \{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$.



Длина вектора

» Длина вектора $\vec{a} \{x; y; z\}$ вычисляется по формуле
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Расстояние между двумя точками

» Расстояние между двумя точками
 $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Скалярное произведение векторов

- » Скалярным произведением векторов называют произведение их длин на косинус угла между ними: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$
- › Скалярное произведение ненулевых векторов равно 0 тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;
- › Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
- › Общая формула: $\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$



Матрица

- математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы, которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов задает размер матрицы.

$$T = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} & b_n \end{array} \right)$$

← Пример матричной формы записи системы



Многогранник

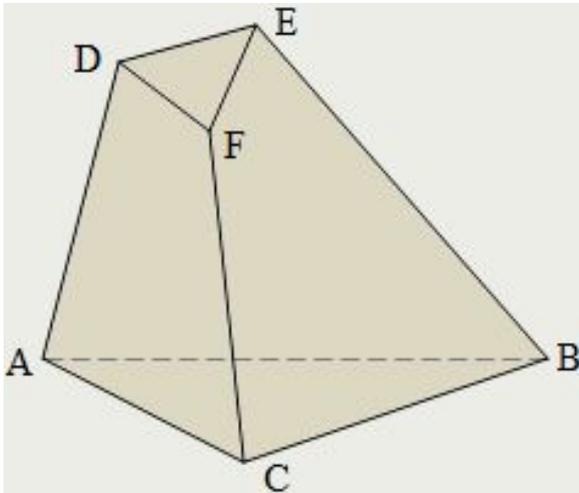
— геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

- Выпуклый многогранник
- Правильный многогранник
- Теорема Эйлера
- Призма
- Параллелепипед
- Пирамида



Выпуклый многогранник

- многогранник, который расположен по одну сторону плоскости, проведённой через любой многоугольник, образующий поверхность данного многогранника.



Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его **гранями**:
ABC, DEF, ABED, BCFE, ACFD;
стороны многоугольников – **рёбрами**:
AB, BC, AC, DE, EF, DF, AD, BE, CF;
вершины – вершинами многогранника: A, B, C, D, E, F

Правильный многогранник

— многогранник, у которого грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Всего существует 5 типов:

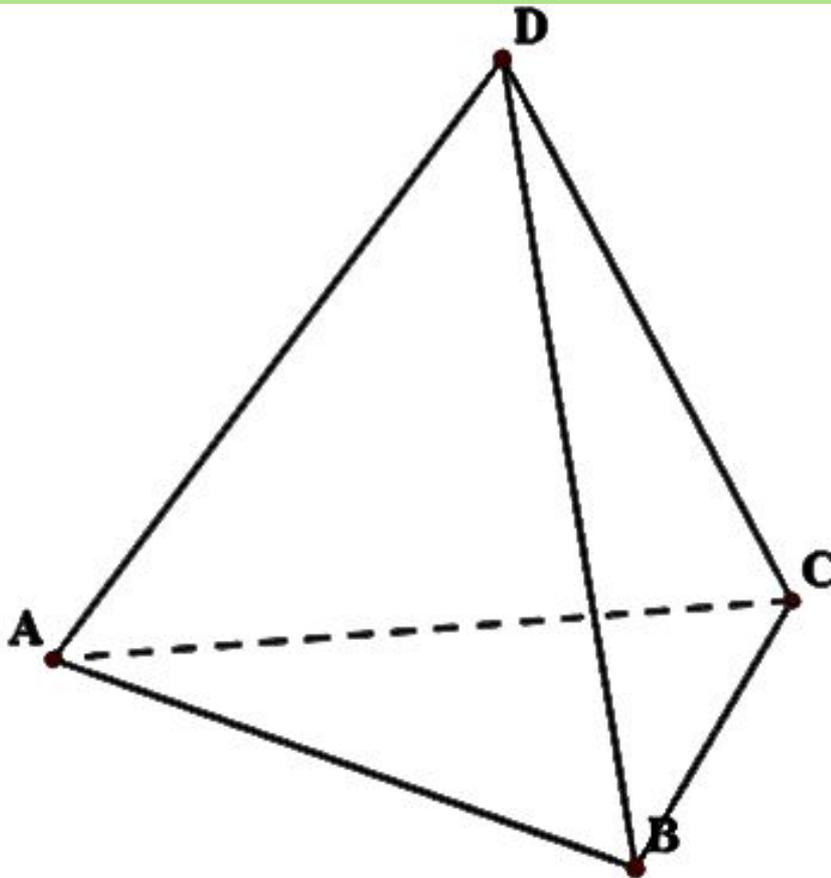
- Тетраэдр
- Куб
- Октаэдр
- Додекаэдр
- Икосаэдр



ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

У правильного тетраэдра грани – правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра.

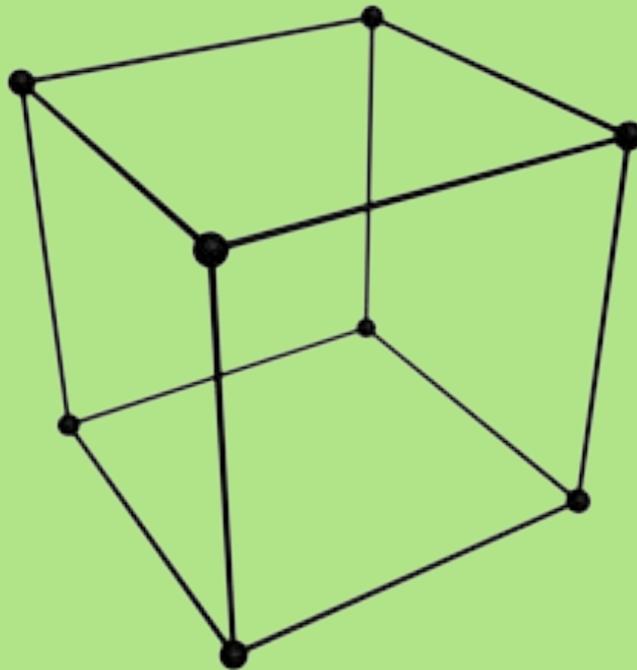
Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.



КУБ

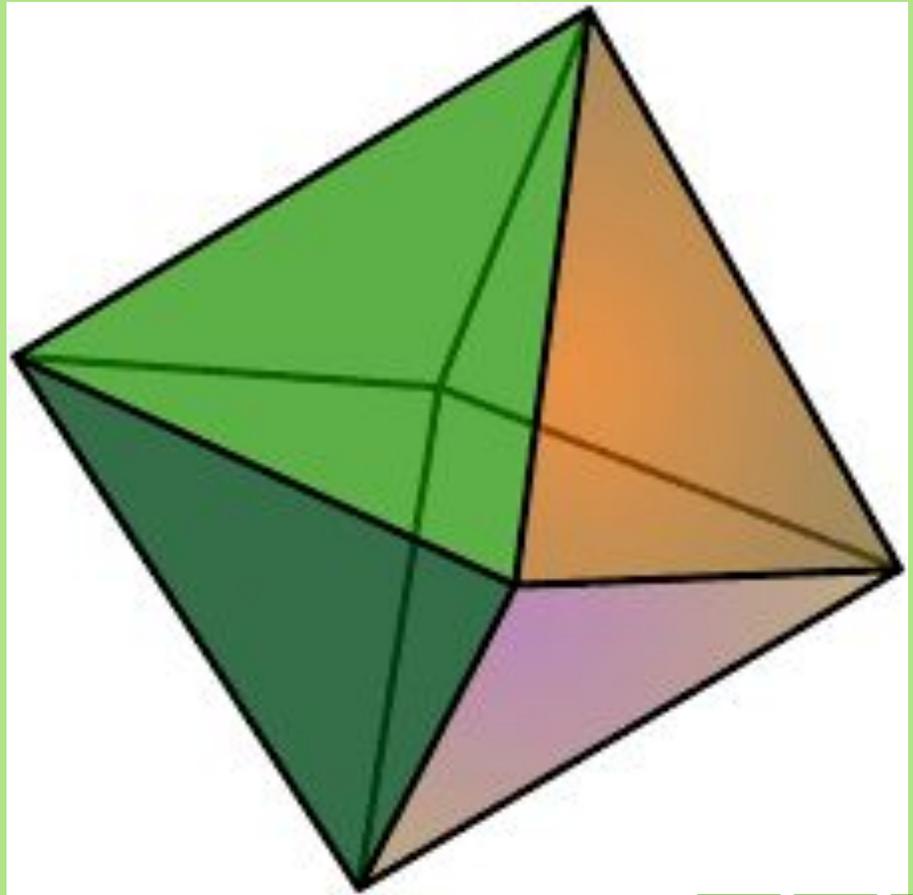
У куба (правильный гексаэдр) все грани – квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра.

Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.



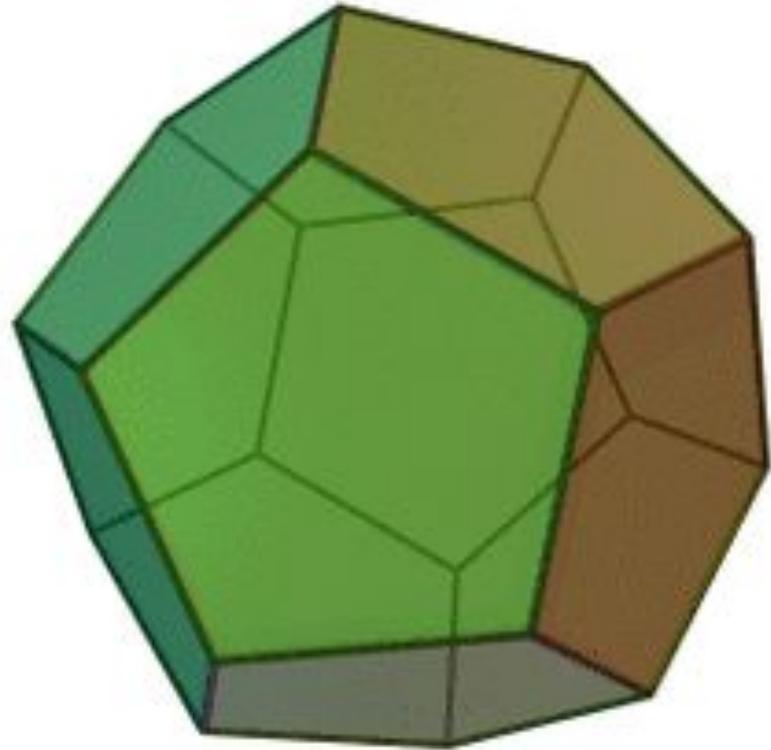
ПРАВИЛЬНЫЙ ОКТАЭДР

У октаэдра грани –
правильные треугольники,
но в отличие от тетраэдра
в каждой его вершине
сходится по четыре ребра.



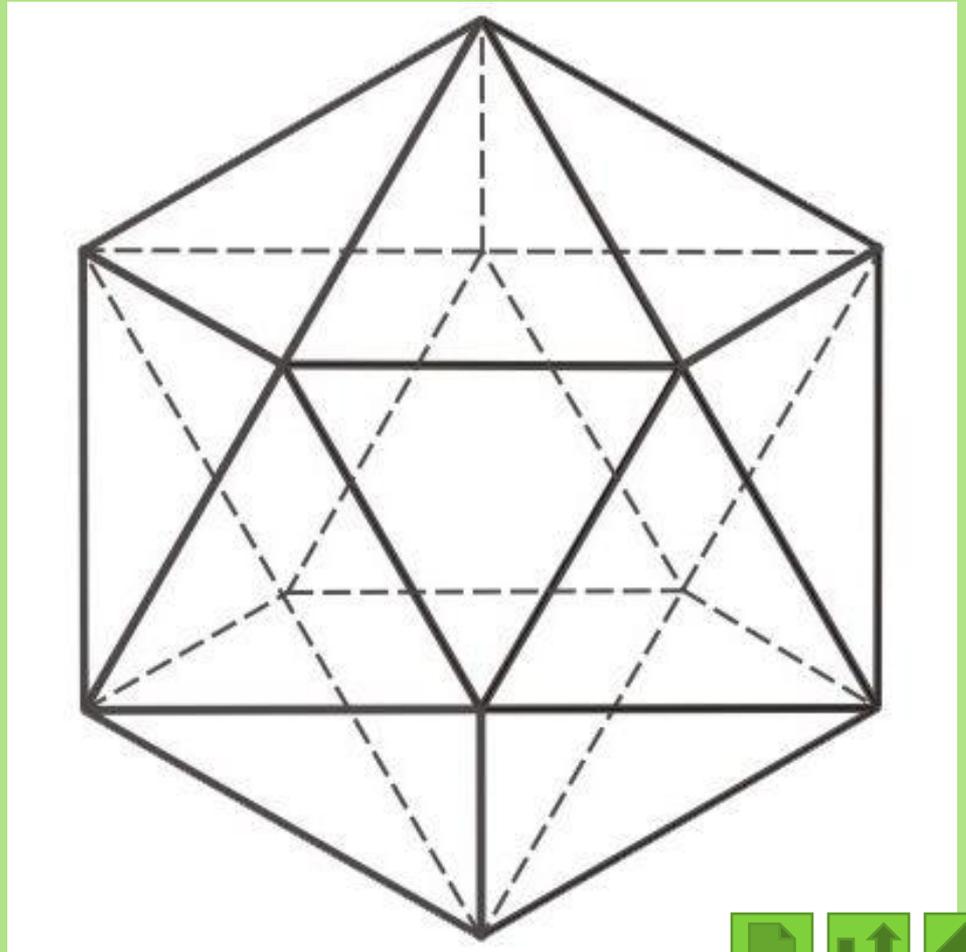
ПРАВИЛЬНЫЙ ДОДЕКАЭДР

У додекаэдра грани –
правильные пятиугольники. В
каждой вершине сходится по
три ребра.



ПРАВИЛЬНЫЙ ИКОСАЭДР

У икосаэдра грани –
правильные треугольники, но в
отличие от тетраэдра и
октаэдра в каждой вершине
сходится по пять ребер.



Теорема Эйлера

- › Если V — число вершин выпуклого многогранника, R — число его ребер и G — число граней, то верно равенство:

$$V - R + G = 2$$

Призма

— многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, которые лежат в разных плоскостях и совмещаются параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники, о которых шла речь, называются **основаниями** призмы, а отрезки, соединяющие их соответствующие вершины – **боковыми рёбрами** призмы.

- [Свойства призмы](#)
- [Треугольная призма](#)
- [Прямая призма \(наклонная, правильная\)](#)



Свойства призмы

- › Основания призмы равны и лежат в параллельных плоскостях.
- › Боковые рёбра призмы равны и параллельны.
- › Поверхность призмы состоит из двух оснований и боковой поверхности.
- › Боковая поверхность любой призмы состоит из параллелограммов, у каждого из которых две стороны являются соответствующими сторонами оснований, а две другие – соседними боковыми рёбрами.
- › Высотой призмы называется любой из перпендикуляров, проведённых из точки одного основания к плоскости другого основания призмы.
- › Призма называется n -угольной, если её основание – n -угольник.



ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

$ABCA_1B_1C_1$ – треугольная
призма;

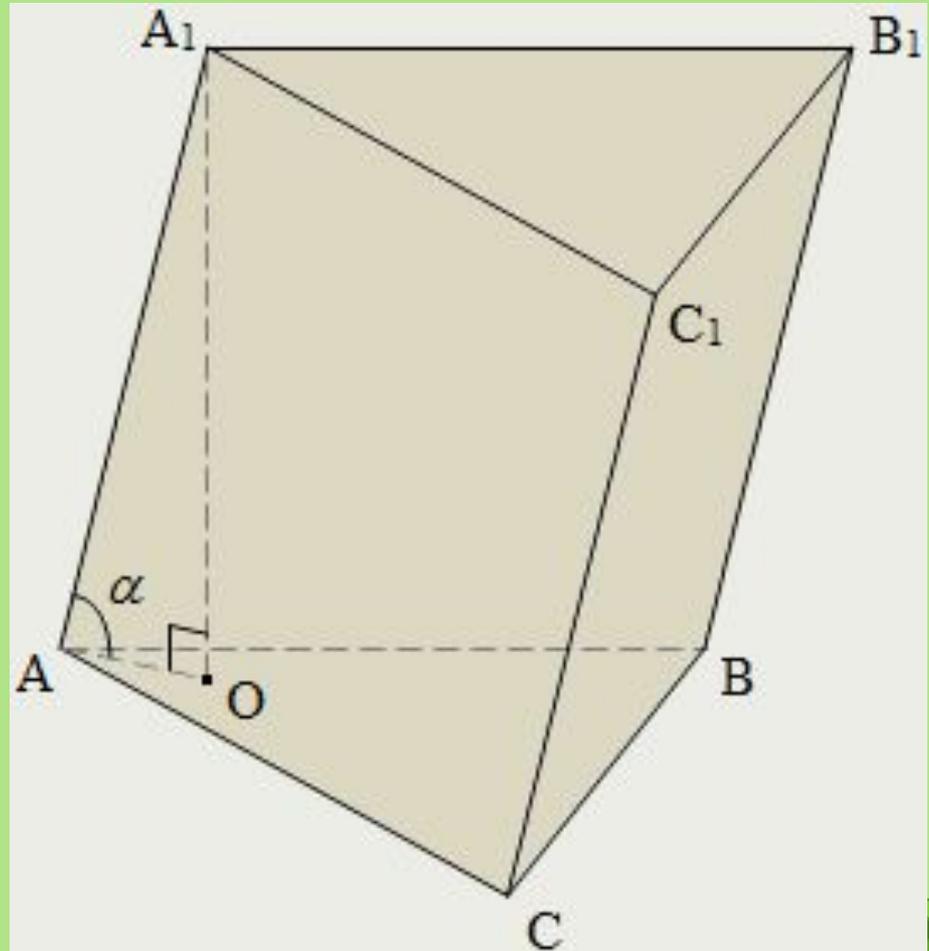
$\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ – основания;

AA_1 , BB_1 , CC_1 – боковые
рёбра;

AA_1B_1B , AA_1C_1C , BB_1C_1C –
боковые грани;

A_1O – высота призмы;

α – угол наклона бокового
ребра к основанию призмы.



ПРЯМАЯ ПРИЗМА

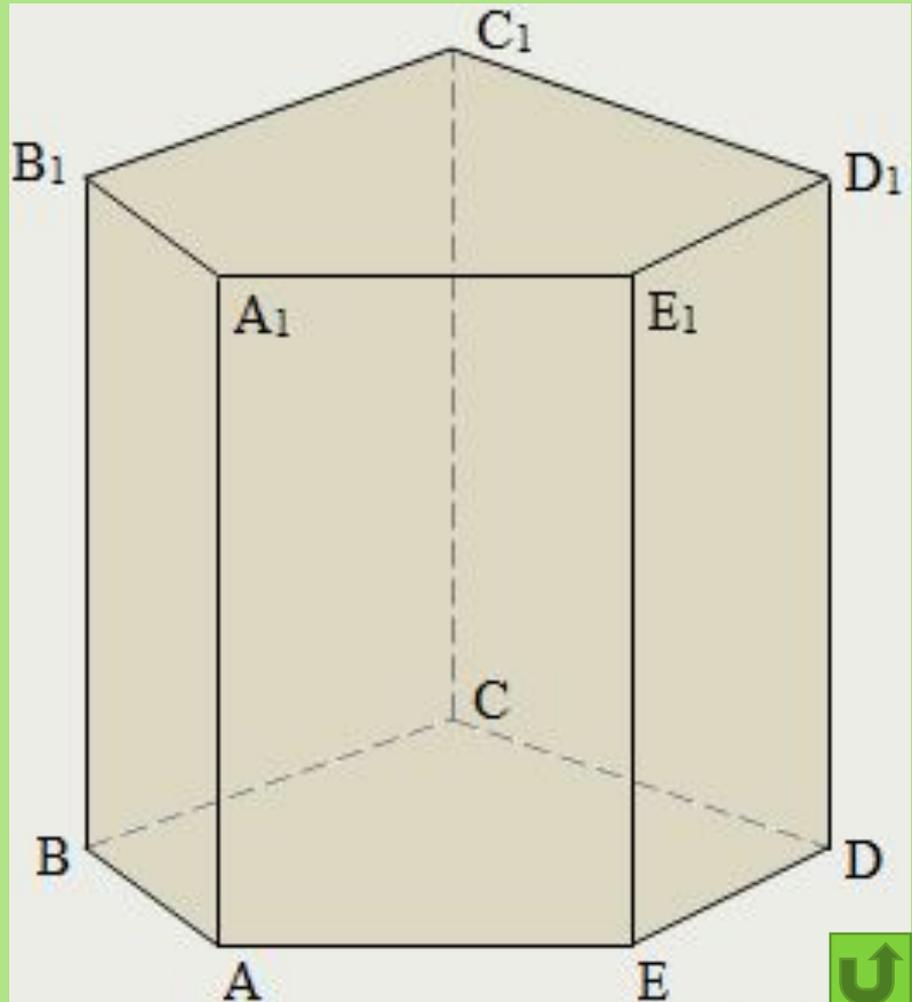
Призма называется прямой, если её рёбра перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае призма называется **наклонной**.

Свойства:

- ✓ Боковые грани прямой призмы – прямоугольники.
- ✓ Боковое ребро прямой призмы является её высотой.
- ✓ Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1.$$

- ✓ Прямая призма называется **правильной**, если её основания являются правильными многоугольниками.



Параллелепипед

— призма, в основании которой лежит параллелограмм.

- [Свойства параллелепипеда](#)
- [Прямоугольный параллелепипед](#)
- [Куб](#)
- [Плоскости симметрии](#)

Свойства параллелепипеда

- › У параллелепипеда все грани – параллелограммы.
- › Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противоположными.
- › У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.
- › Диагональю параллелепипеда, как и многогранника вообще, называется отрезок, соединяющий вершины параллелепипеда, не лежащие в одной его грани.
- › Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
- › Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

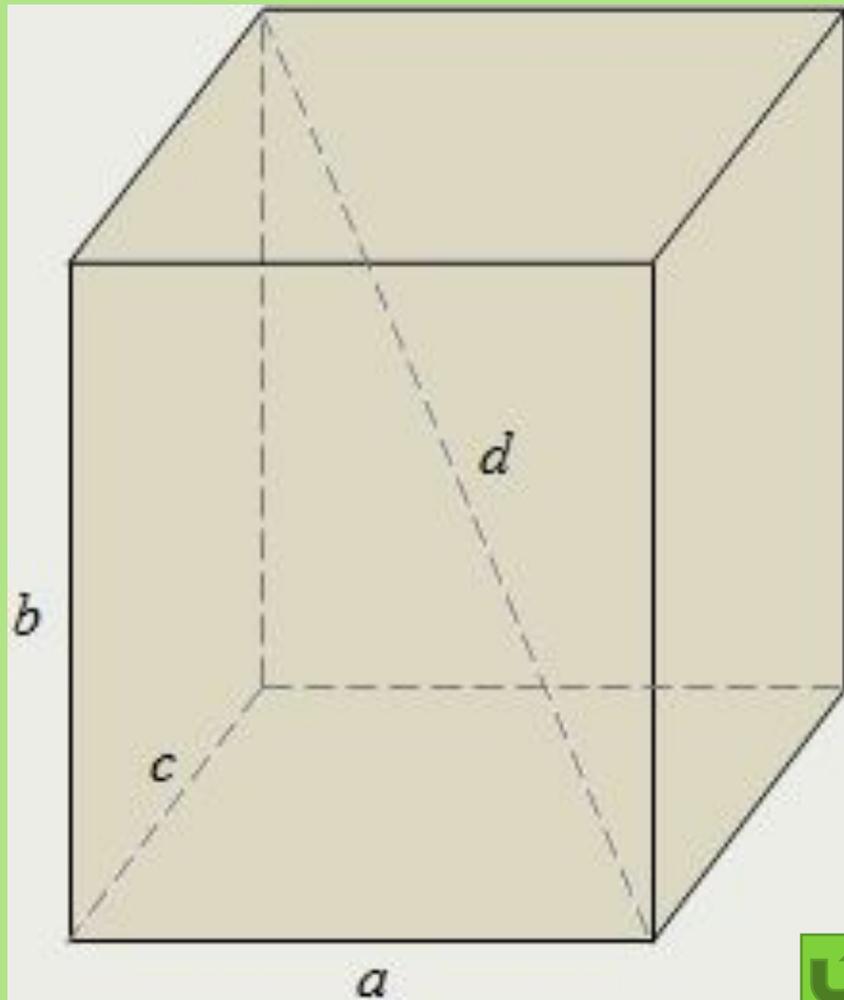


ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Прямоугольным параллелепипедом называется такой прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник.

Свойства:

- ✓ Все грани прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольниками.
- ✓ Длины рёбер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются его измерениями или линейными размерами.
- ✓ У прямоугольного параллелепипеда три измерения.
- ✓ В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- ✓ Площадь полной поверхности:
 $S_{\text{п}} = 2 \cdot (ab + bc + ac)$;
- ✓ Объём: $V = abc$.



КУБ

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.

Диагональ куба в квадратный корень из трёх раз больше его стороны:

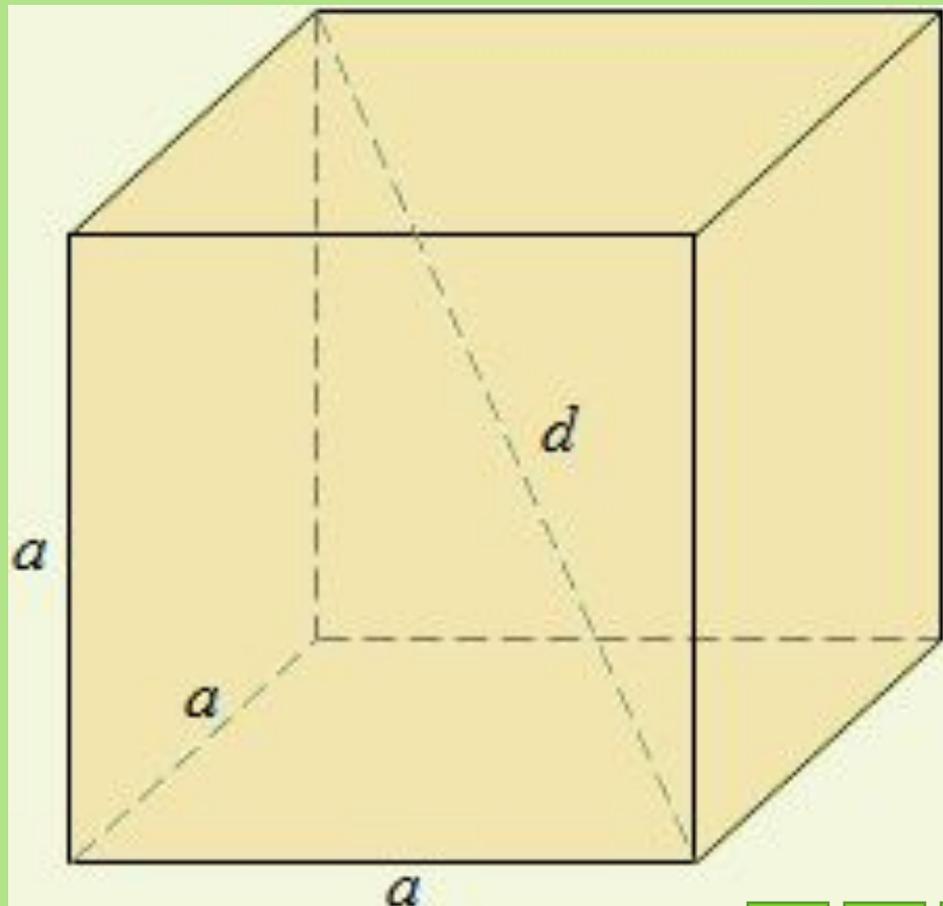
$$d = a\sqrt{3}.$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{п}} = 6 \cdot a^2, \quad S_{\text{п}} = 2 \cdot d^2$$

Объем:

$$V = a^3, \quad V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}.$$



Плоскости симметрии

- › В прямоугольном параллелепипеде, как и во всяком параллелепипеде, есть центр симметрии – точка пересечения его диагоналей. У него есть также три плоскости симметрии, проходящие через центр симметрии параллельно парам противоположащих граней. На [рисунке №1](#) показана одна из таких плоскостей. Она проходит через середины четырех параллельных ребер параллелепипеда.
- › Если у параллелепипеда все линейные размеры разные, то у него нет других плоскостей симметрии, кроме тех, что на [рисунке №2](#).
- › Если же у параллелепипеда два линейных размера равны, то есть он является правильной четырёхугольной призмой, то у него есть еще две плоскости симметрии. Это плоскости диагональных сечений, показанные на [рисунке №3](#).



π

Рисунок 11.4

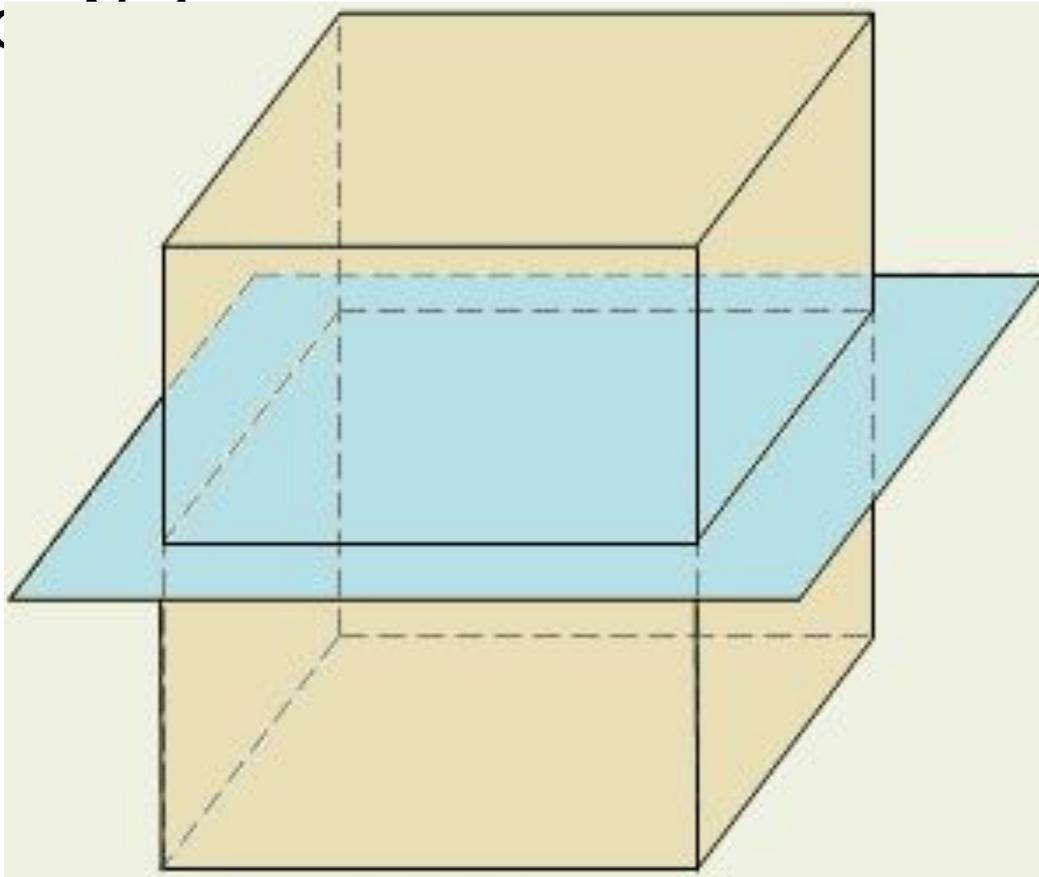
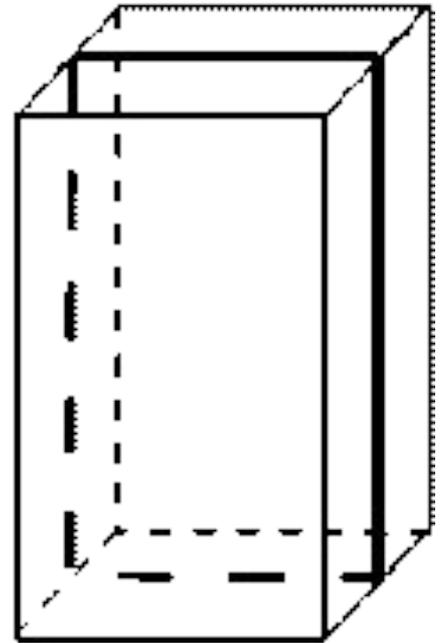
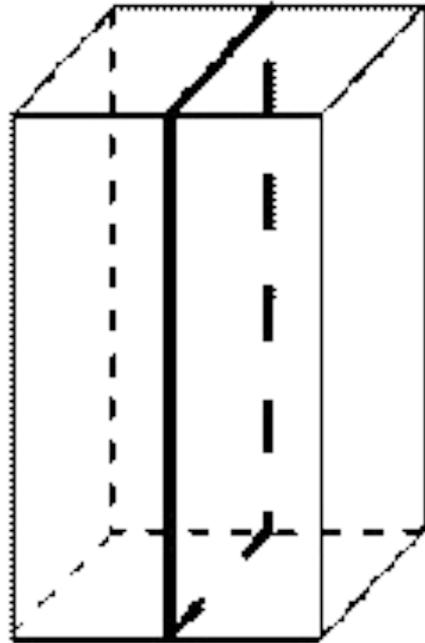
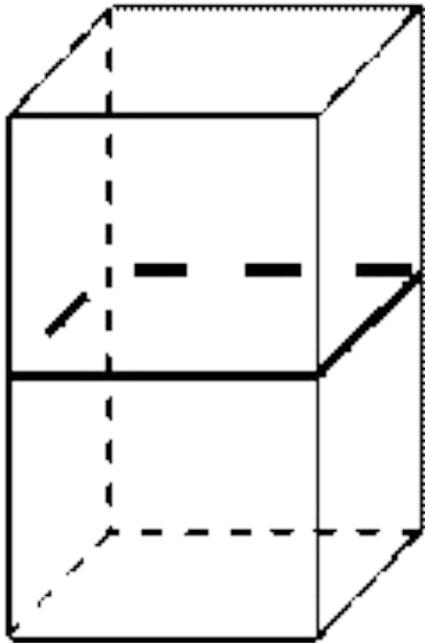
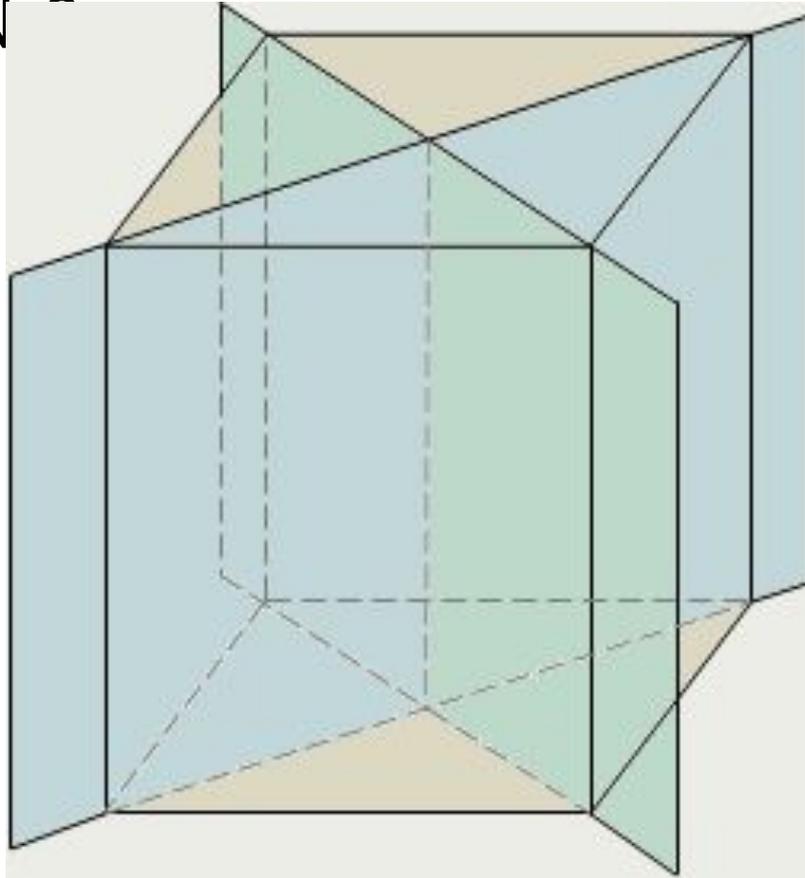


Рисунок №2



π

Рисунок № 2



Пирамида

— многогранник, одна из граней которого (называемая **основанием**) — произвольный многоугольник, а остальные грани (называемые **боковыми гранями**) — треугольники, имеющие общую вершину.

- [Основные понятия](#)
- [Основание центр описанной окружности](#)
- [Основание центр вписанной окружности](#)
- [Правильная пирамида](#)
- [Усеченная пирамида](#)



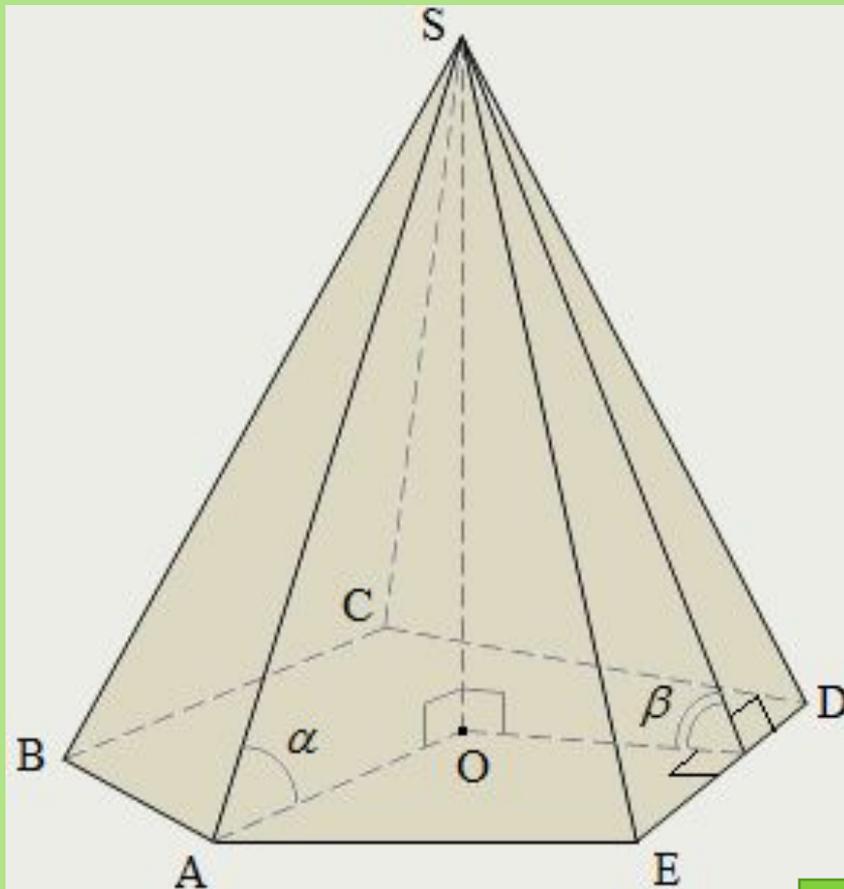
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Высотой пирамиды (SO) называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется n -угольной, если её основанием является n -угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

α – угол наклона бокового ребра SA пирамиды к плоскости её основания;

β – угол наклона боковой грани (SED) пирамиды к плоскости её основания.



Основание центр описанной окружности

- основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:
 - › все боковые ребра равны;
 - › боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы;
 - › боковые ребра образуют равные углы с высотой пирамиды.



Основание центр вписанной окружности

- Основание высоты пирамиды является центром окружности, вписанной в основание пирамиды, тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:
- › боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом;
 - › высоты боковых граней равны;
 - › боковые грани образуют равные углы с высотой пирамиды.

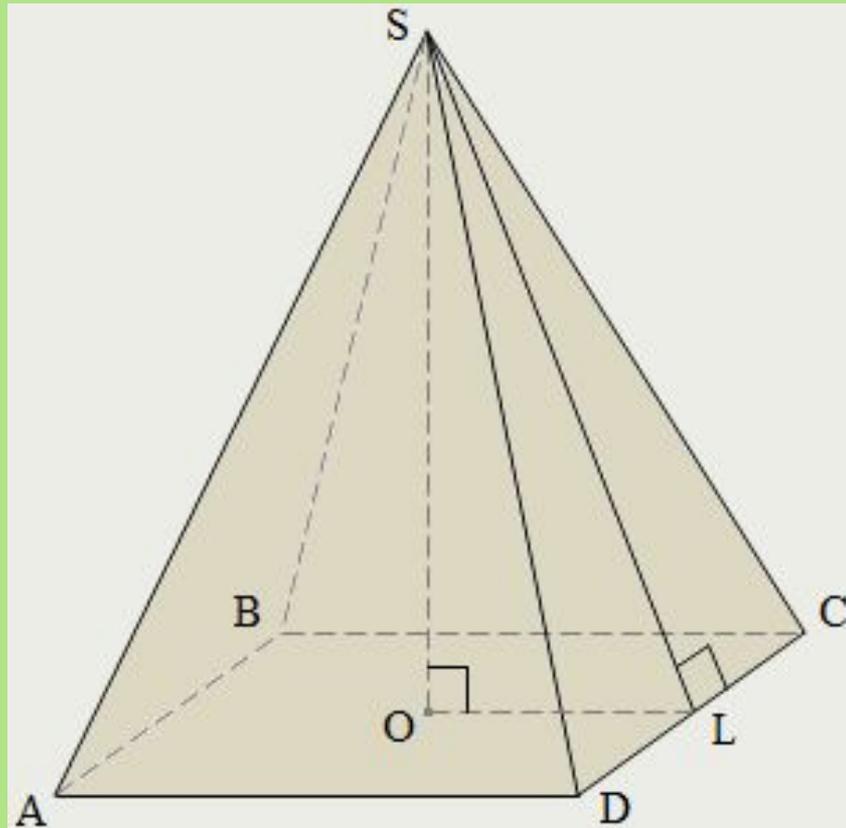


ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (O - центр описанной и вписанной окружностей основания).

Свойства:

- ✓ Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.
- ✓ Боковые ребра правильной пирамиды равны.
- ✓ Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.
- ✓ Высота боковой грани правильной пирамиды (SL), проведенная из ее вершины к стороне основания, называется апофемой.
- ✓ Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему:
$$S_{\text{б}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot SL.$$



УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

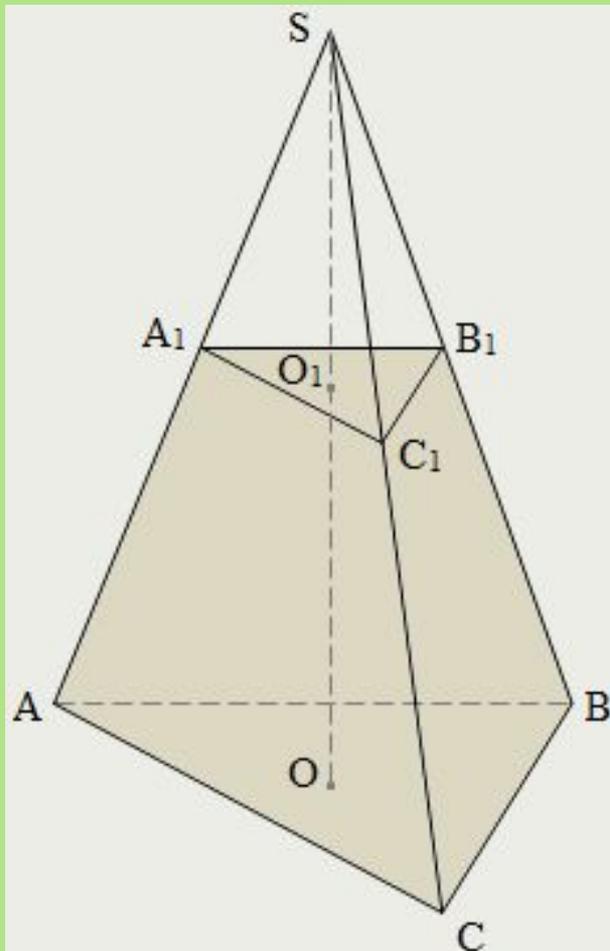
Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части: пирамиду, подобную данной и многогранник, называемый усеченной пирамидой.

Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются основаниями, остальные грани называются боковыми гранями.

Свойства:

- ✓ Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.
- ✓ Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.
- ✓ Если S_1 и S_2 – площади оснований усеченной пирамиды и h – её высота, то для объёма усеченной пирамиды верно:

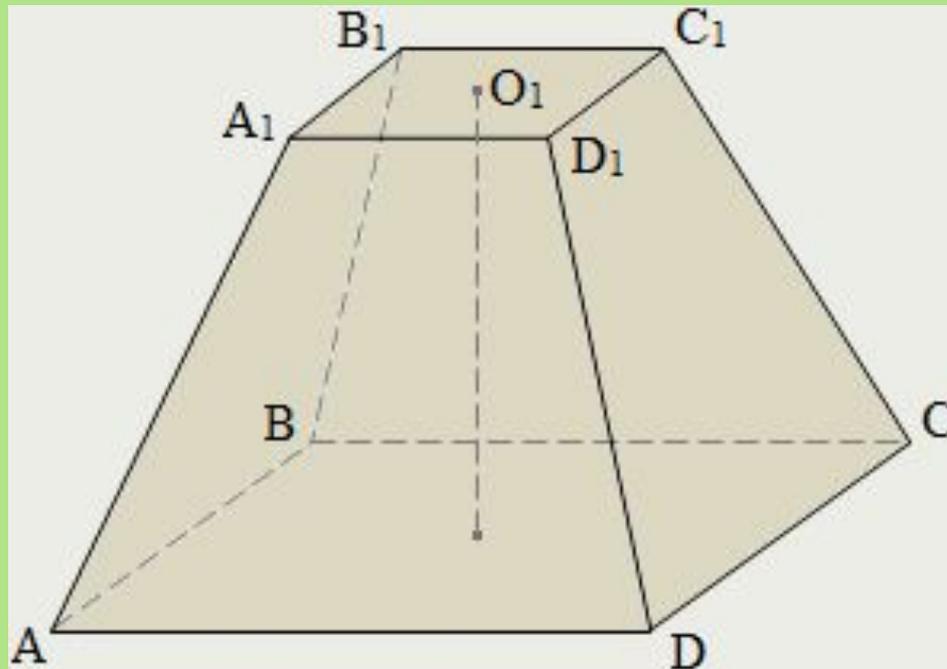
$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$



ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Усеченная пирамида (например, $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$), которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды ($AA_1 B_1 B$, $AA_1 C_1 C$, $DD_1 C_1 C$, $AA_1 D_1 D$) – равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.



Многоугольник

- это замкнутая линия, которая образовывается, если взять n каких-либо точек A_1, A_2, \dots, A_n и соединить их последовательно отрезками.

Выпуклый многоугольник

- это многоугольник, не имеющий самопересечений и каждый его внутренний угол меньше 180° .



Определитель

Что такое определитель?

Простой определитель

Для определителей третьего порядка



Способ столбцов и строк (ССС)

Правило Саррюса

Правило треугольника



Определитель матрицы.

Определитель (детерминант) матрицы - выражение, составленное из матрицы, с помощью которого находят решение систем линейных уравнений.

Определитель матрицы A обозначается как: $\det(A)$, $|A|$ или ΔA .

Матрица A :

Определитель матрицы A



Вычисление определителей

Определители вычисляются только для квадратных матриц (т.е. для матриц, в которых количество строк равно количеству столбцов).

1) Определить матрицы 1 порядка равен элементу матрицы.

$$\Delta A = |a_{11}| = a_{11}$$

2) Определитель матрицы второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{11} * \mathbf{a}_{22} - a_{21} * a_{12}$$



Вычисление определителя матрицы 3-го порядка

1) Разложение по элементам строк и столбцов:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} * a_{33} - a_{32} * a_{23}) - a_{12}(a_{21} * a_{33} - a_{31} * a_{23})$$

$$+ a_{13}(a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22})$$



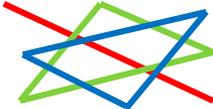
Правило Саррюса

2) **Правило Саррюса:** Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, умножают на 1 ; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, умножают на (-1):

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$



Правило треугольника: значение определителя равно сумме произведений элементов главной диагонали и произведений элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной главной диагонали, из которой вычитается произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов лежащих на треугольниках с гранью параллельной побочной диагонали.

<i>Умноженное на 1</i>	<i>Умноженное на (-1)</i>
	

Система координат

— комплекс определений, реализующий метод координат, то есть способ определять положение и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов.

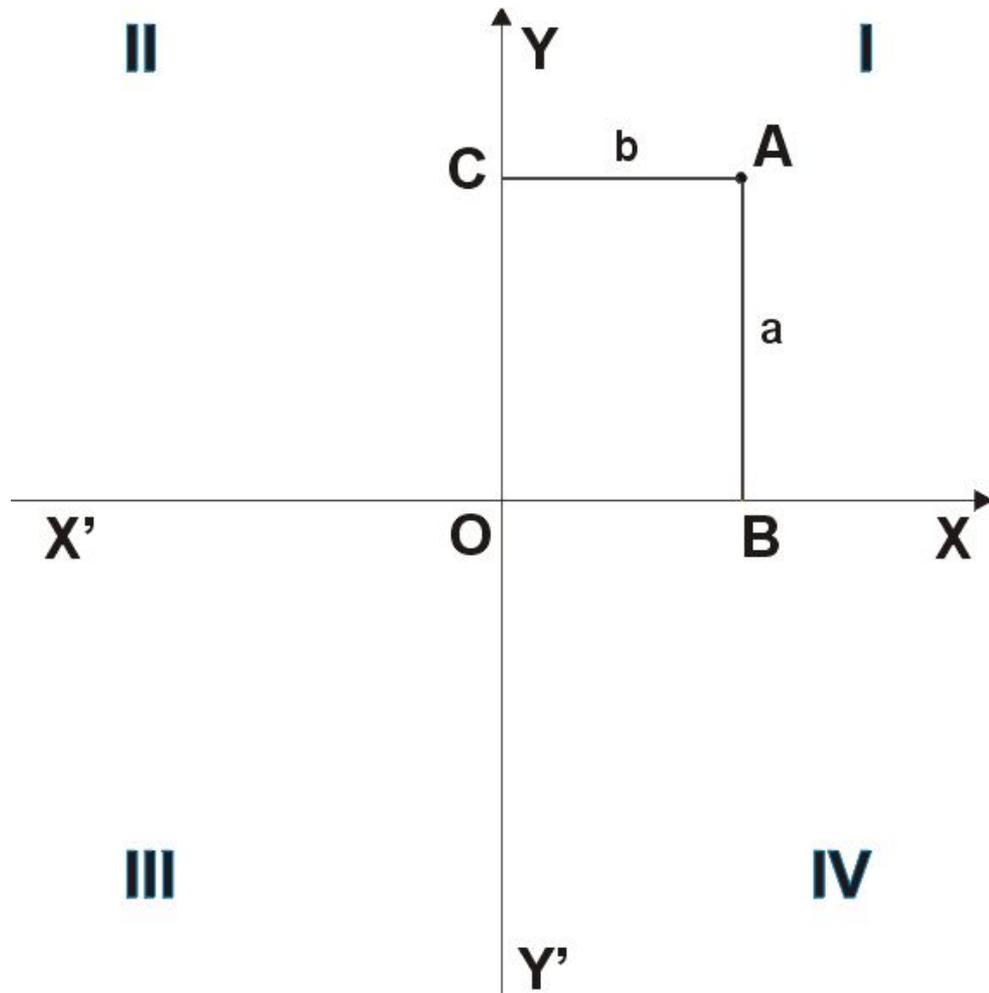
Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется **координатами** этой точки.

- Прямоугольная система координат на плоскости
- Прямоугольная система координат в пространстве



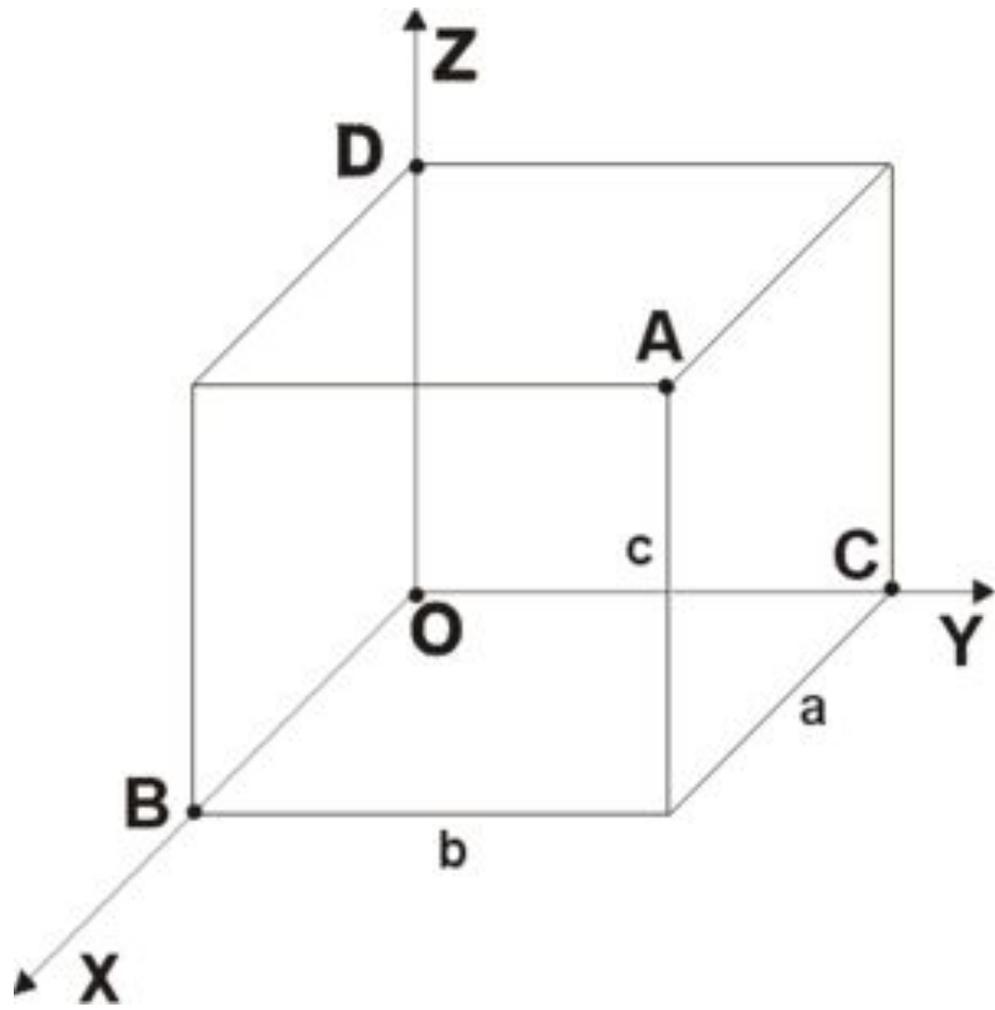
Прямоугольная система координат на плоскости(декартова)

- образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ox (ось абсцисс) и Oy (ось ординат). Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей.



Прямоугольная система координат в пространстве

- образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат) и Oz (ось аппликат). Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей.



Система

— это совокупность элементов или отношений, закономерно связанных друг с другом в единое целое.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – переменные

a_{ij} – коэффициент

i – номер строки

j – номер столбца

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_p$ – свободные члены

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} + \dots + x_n a_{1n} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} + \dots + x_n a_{2n} = b_2 \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 a_{33} + \dots + x_n a_{3n} = b_3 \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + x_3 a_{n3} + \dots + x_n a_{nn} = b_n \end{cases}$$



Стереометрия

— отдел геометрии, изучающий фигуры, не лежащие в одной плоскости.



Используемая литература:

- › <http://math4school.ru/mnogogranniki.html>
- › https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_координат
- › [плоскости симметрии прямоугольного параллелепипеда](#)
- › [https://ru.wikipedia.org/wiki/Пирамида_\(геометрия\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Пирамида_(геометрия))
- › http://mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html
- › <https://slovo.ws/urok/geometr/10/007/084.html>
- › Учебник по геометрии 10-11 класс (Серия «МГУ – школе» основана в 1999 году, авторы: Л.С. Анатасян, В.Ф. Бутузов и другие; издательство «Просвещение», 2006 год, с изменениями)