

Exerciții – capitolele 3, 4

Exercițiul 1

Știind că matricea Householder de ordin m , $U = I_m - \frac{\underline{u} \cdot \underline{u}^T}{\beta}$ zerorizează un vector $\underline{z} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ începând cu elementul din linia $k + 2$ până la ultimul element, să se demonstreze că $U \cdot \underline{v} = \underline{v}$, știind că $\underline{v} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ și are structura:

$$\underline{v} = [v_1 \quad \dots \quad v_j \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T, \quad j < k + 1$$

Rezolvare:

☞ U zerorizează $\underline{z} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ începând cu elementul din linia $k + 2$ până la ultimul element

↓

$$\underline{u} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad u_{k+1} \quad \dots \quad u_m]^T$$


↓

$$U \cdot \underline{v} = \left(I_m - \frac{\underline{u} \cdot \underline{u}^T}{\beta} \right) \cdot \underline{v} = \underline{v} - \frac{\underline{u}}{\beta} \cdot \underline{u}^T \cdot \underline{v} = \underline{v} - \tau \cdot \underline{u}$$

$$\tau = \sum_{i=1}^m \frac{u_i \cdot v_i}{\beta} = \sum_{i=1}^k \frac{u_i \cdot v_i}{\beta} + \sum_{i=k+1}^m \frac{u_i \cdot v_i}{\beta} = 0$$

$$u_i = 0, i = 1, \dots, k$$

$$v_i = 0, i = k + 1, \dots, m$$



$$U \cdot \underline{v} = \underline{v}$$

✍ Exercițiul 2

Precizați argumentat (toate calculele implicate) care sunt matricile Householder de transformare utilizate în cadrul celor două iterații ale procedurii de triangularizare ortogonală aplicate matricii:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Calculele se vor realiza cu rotunjire la primele două cifre zecimale.}$$

Rezolvare:

Iterația 1:

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 6.12 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \beta_1 = \frac{\underline{u}_1^T \cdot \underline{u}_1}{2} = 25.25$$

$$U_1 = I_3 - \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1^T}{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{25.25} \cdot \begin{bmatrix} 6.12 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot [6.12 \quad 3 \quad -2] = \begin{bmatrix} -0.49 & -0.73 & 0.49 \\ -0.73 & 0.64 & 0.24 \\ 0.49 & 0.24 & 0.84 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = U_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -0.49 & -0.73 & 0.49 \\ -0.73 & 0.64 & 0.24 \\ 0.49 & 0.24 & 0.84 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.12 & -1.21 \\ 0 & 4.90 \\ 0 & 4.07 \end{bmatrix}$$

Iterația 2:

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 11.26 \\ 4.07 \end{bmatrix} \quad \beta_2 = \frac{\underline{u}_2^T \cdot \underline{u}_2}{2} = 71.70$$

$$U_2 = I_3 - \frac{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2^T}{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{71.70} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 11.26 \\ 4.07 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 11.26 \quad 4.07] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.77 & -0.64 \\ 0 & -0.64 & 0.77 \end{bmatrix}$$

✍ Exercițiul 3

Realizați scriptul MATLAB care permite calcularea coeficienților funcției $f(x) = c_1/e^{c_2 \cdot x^{-2} + c_3 \cdot \sin(2 \cdot x)}$ pe baza setului de valori $\{x_i, f(x_i)\}_{i=1, \dots, n}$, unde $n > 3$. Rezolvarea sistemului supradeterminat rezultat se va face utilizând funcția MATLAB “\”.

Rezolvare:

☞ $\ln f(x) = \ln c_1 - c_2 \cdot x^{-2} - c_3 \cdot \sin(2 \cdot x)$

☞ structura scriptului:

- ① citire număr perechi valori, n, cu verificarea condiției $n > 3$
- ② citire valori $\{x_i, f(x_i)\}_{i=1, \dots, n}$
- ③ formare matrice și termen liber sistem supradeterminat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -x_1^{-2} & -\sin(2 \cdot x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -x_n^{-2} & -\sin(2 \cdot x_n) \end{bmatrix}_{n \times 3} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \ln f(x_1) \\ \vdots \\ \ln f(x_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

- ④ rezolvare sistem folosind “\”
- ⑤ calcul coeficienți c_1, c_2 și c_3
- ⑥ afișare valori calculate pentru coeficienți

Exercițiul 4

Demonstrați că matricile șirului QR sunt ortogonal asemenea.

Rezolvare:

👉 **Șir** $\{A_k\}_{k \geq 0}$, $A_0 = A$ $A_k - \mu_k \cdot I_n = Q_k \cdot R_k$, $A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \cdot I_n$
QR:

$$Q_k \in \mathfrak{R}^{n \times n} - \text{ortogonală}; \quad R_k \in \mathfrak{R}^{n \times n} - \text{superior triunghiulară}$$

$$\mu_k \in \mathfrak{R} - \text{deplasare (cu rol de accelerare a convergenței)}$$

👉 $A, A' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, se numesc **ortogonal asemenea**, dacă există o matrice ortogonală, $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ astfel încât: $A' = Q^T \cdot A \cdot Q$

$$Q_k^T \cdot (A_k - \mu_k \cdot I_n) = R_k \Rightarrow A_{k+1} = Q_k^T \cdot (A_k - \mu_k \cdot I_n) \cdot Q_k + \mu_k \cdot I_n$$



$$A_{k+1} = Q_k^T \cdot A_k \cdot Q_k - \cancel{\mu_k \cdot Q_k^T \cdot I_n \cdot Q_k} + \cancel{\mu_k \cdot I_n} = Q_k^T \cdot A_k \cdot Q_k$$

👉 de demonstrat că oricare două matrici ale șirului QR sunt ortogonal asemenea \square inducție

 **Exercițiul 5**

Matricea $S = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ este în forma canonică Schur ? Argumentați.

Rezolvare:

☞ matrice în formă canonică Schur:

- pătratică;
- cvasi-superior triunghiulară:
 - elemente nule sub sub-diagonala principală;
 - nu există elemente consecutive nenule pe subdiagonala principală;
- blocurile diagonal de ordin 2 au valori propria complex conjugate.

☞ S este pătratică, de ordin 4

nu există elemente consecutive nenule pe subdiagonala principală

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

este forma superior Hessenberg

☞ blocurile diagonal de ordin 2:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I_2 - M_1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 10 = 0 \rightarrow \text{soluții complexe}$$

$$\det(\lambda \cdot I_2 - M_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 4) = 0 \rightarrow \text{soluții reale}$$



Matrice S nu este în formă canonică Schur

Exercițiul 6

Realizați funcția MATLAB care returnează numărul perechilor de valori proprii complex conjugate ale unei matrici. Parametrul de apel al funcției e o matrice în formă canonică Schur.

Rezolvare:

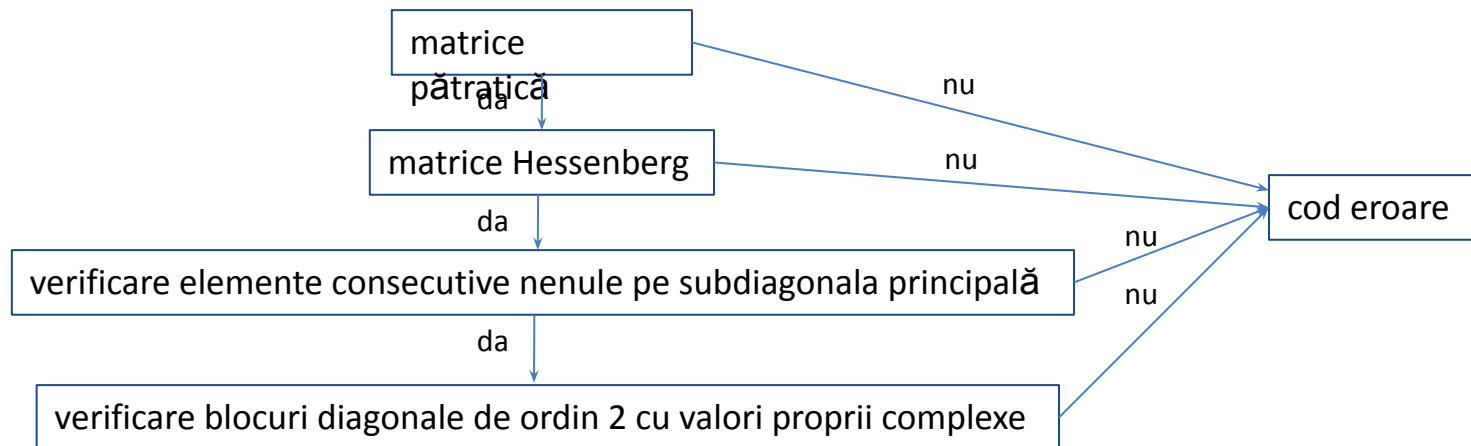
parametrii de intrare – ieșire funcție MATLAB:

-intrare: matrice pătratică;

-ieșire: scalar (numărul perechilor de valori proprii complex conjugate sau cod de eroare).

structura funcției:

✓verificare parametru de intrare



✓numărare elemente nenule de pe subdiagonala principală → numărul perechilor de valori proprii complexe)

Exercițiul 7

Realizați funcția MATLAB care construiește matricea de rotație plană Givens de ordin n ce permite zerorizarea elementului din linia k a unui vector coloană cu n elemente.

Rezolvare:

 parametri de intrare – ieșire funcție MATLAB:

-intrare: vector cu n componente, index linie element de zerorizat

-ieșire: matrice de rotație plană Givens

 structura funcției:

✓ determinare dimensiuni vector & verificări (dimensiuni nenule)

da



nu

cod eroare

✓ calcul elemente matrice de rotație (sinusul și cosinusul unghiului de rotație)

✓ generare matrice unitate de ordin egal cu dimensiunea vectorului

✓ modificare elemente din liniile $k-1$, k și coloanele $k-1$, k și asignare matricii returnate