Exerciţii – capitolele 3, 4

✍ Exerciţiul 1

Ştiind că matricea Householder de ordin m, $U = I_m - {}^{\underline{u}\cdot\underline{u}^T}/_{\beta}$ *zerorizează un vector* $\underline{z} \in \Re^{m\times 1}$ *începând cu elementul din linia* $k+2$ *până la ultimul element, să se demonstreze că* $U\cdot\underline{v} = \underline{v}$*, ştiind că* $\underline{v} \in \Re^{m\times 1}$ *şi are structura:*

$$\underline{v} = [v_1 \quad \dots \quad v_j \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T,\ j < k+1$$

Rezolvare:

☞ U zerorizează $\underline{z} \in \Re^{m\times 1}$ *începând cu elementul din linia* $k+2$ *până la ultimul element*

$$\downarrow$$

$$\underline{u} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad u_{k+1} \quad \cdots \quad u_m]^T$$

$$\downarrow$$

$$U\cdot\underline{v} = \left(I_m - {}^{\underline{u}\cdot\underline{u}^T}/_{\beta}\right)\cdot\underline{v} = \underline{v} - \frac{\underline{u}}{\beta}\cdot\underline{u}^T\cdot\underline{v} = \underline{v} - \tau\cdot\underline{u}$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{m}\frac{u_i\cdot v_i}{\beta} = \sum_{i=1}^{k}\frac{u_i\cdot v_i}{\beta} + \sum_{i=k+1}^{m}\frac{u_i\cdot v_i}{\beta} = 0$$

$u_i = 0, i = 1, \dots, k$

$v_i = 0, i = k+1, \dots, m$

$$\boxed{U\cdot\underline{v} = \underline{v}}$$

✍ Exerciţiul 2

Precizaţi argumentat (toate calculele implicate) care sunt matricile Householder de transformare utilizate în cadrul celor două iteraţii ale procedurii de triangularizare ortogonală aplicate matricei: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$*. Calculele se vor realiza cu rotunjire la primele două cifre zecimale.*

Rezolvare:

Iteraţia 1:

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 6.12 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \beta_1 = \frac{\underline{u}_1^T \cdot \underline{u}_1}{2} = 25.25$$

$$U_1 = I_3 - \frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1^T}{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{25.25} \cdot \begin{bmatrix} 6.12 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot [6.12 \quad 3 \quad -2] = \begin{bmatrix} -0.49 & -0.73 & 0.49 \\ -0.73 & 0.64 & 0.24 \\ 0.49 & 0.24 & 0.84 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = U_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -0.49 & -0.73 & 0.49 \\ -0.73 & 0.64 & 0.24 \\ 0.49 & 0.24 & 0.84 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.12 & -1.21 \\ 0 & 4.90 \\ 0 & 4.07 \end{bmatrix}$$

Iteraţia 2:

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 11.26 \\ 4.07 \end{bmatrix} \qquad \beta_2 = \frac{\underline{u}_2^T \cdot \underline{u}_2}{2} = 71.70$$

$$U_2 = I_3 - \frac{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2^T}{\beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{71.70} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 11.26 \\ 4.07 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 11.26 & 4.07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.77 & -0.64 \\ 0 & -0.64 & 0.77 \end{bmatrix}$$

Exercițiul 3

Realizați scriptul MATLAB care permite calcularea coeficienților funcției $f(x) = c_1 / e^{c_2 \cdot x^{-2} + c_3 \cdot sin(2 \cdot x)}$ *pe baza setului de valori* $\{x_i, f(x_i)\}_{i=\overline{1,n}}$, *unde* $n > 3$. *Rezolvarea sistemului supradeterminat rezultat se va face utilizând funcția MATLAB " \ ".*

Rezolvare:

☞ $\ln f(x) = \ln c_1 - c_2 \cdot x^{-2} - c_3 \cdot sin(2 \cdot x)$

☞ structura scriptului:

① citire număr perechi valori, n, cu verificarea condiției n > 3

② citire valori $\{x_i, f(x_i)\}_{i=\overline{1,n}}$

③ formare matrice și termen liber sistem supradeterminat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -x_1^{-2} & -sin(2 \cdot x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -x_n^{-2} & -sin(2 \cdot x_n) \end{bmatrix}_{n \times 3} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} ln f(x_1) \\ \vdots \\ ln f(x_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

④ rezolvare sistem folosind "\"

⑤ calcul coeficienți c_1, c_2 și c_3

⑥ afișare valori calculate pentru coeficienți

✍ Exerciţiul 4

Demonstraţi că matricile şirului QR sunt ortogonal asemenea.

<u>*Rezolvare:*</u>

☞ **şir QR:** $\{A_k\}_{k\geq 0},\ A_0 = A$

$$A_k - \mu_k \cdot I_n = Q_k \cdot R_k, \quad A_{k+1} = R_k \cdot Q_k + \mu_k \cdot I_n$$

$Q_k \in \Re^{n\times n}$ - ortogonală; $R_k \in \Re^{n\times n}$ - superior triunghiulară

$\mu_k \in \Re$ - deplasare (cu rol de accelerare a convergenţei)

☞ $A, A' \in \Re^{n\times n}$, se numesc **ortogonal asemenea**, dacă există o matrice ortogonală, $Q \in \Re^{n\times n}$ astfel încât: $A' = Q^T \cdot A \cdot Q$

$$Q_k^T \cdot (A_k - \mu_k \cdot I_n) = R_k \quad \Rightarrow \quad A_{k+1} = Q_k^T \cdot (A_k - \mu_k \cdot I_n) \cdot Q_k + \mu_k \cdot I_n$$

$$\Downarrow$$

$$A_{k+1} = Q_k^T \cdot A_k \cdot Q_k - \mu_k \cdot \cancel{Q_k^T \cdot I_n \cdot Q_k + \mu_k \cdot I_n} = Q_k^T \cdot A_k \cdot Q_k$$

☞ de demonstrat că oricare două matrici ale şirului QR sunt ortogonal asemenea □ inducţie

METODE NUMERICE – pregătire 2 24.06.2021

✍ Exerciţiul 5

$$\text{Matricea } S = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ este în forma canonică Schur ?Argumentaţi.}$$

Rezolvare:

☞ matrice în formă canonică Schur:

- pătratică;
- cvasi-superior triunghiulară:
    - elemente nule sub sub-diagonala principală;
    - nu există elemente consecutive nenule pe subdiagonala principală;
- blocurile diagonal de ordin 2 au valori propria complex conjugate.

☞ S este pătratică, de ordin 4

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

nu există elemente consecutive nenule pe subdiagonala principală

este forma superior Hessenberg

METODE NUMERICE – pregătire 2 24.06.2021

☞ blocurile diagonal de ordin 2:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \cdot I_2 - M_1) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 10 = 0 \longrightarrow \text{soluţii complexe}$$

$$\det(\lambda \cdot I_2 - M_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 4) = 0 \longrightarrow \text{soluţii reale}$$

Matrice S nu este în formă canonică Schur

✍ Exerciţiul 6

Realizați funcția MATLAB care returnează numărul perechilor de valori proprii complex conjugate ale unei matrici. Parametrul de apel al funcţiei e o matrice în formă canonică Schur.

<u>*Rezolvare:*</u>

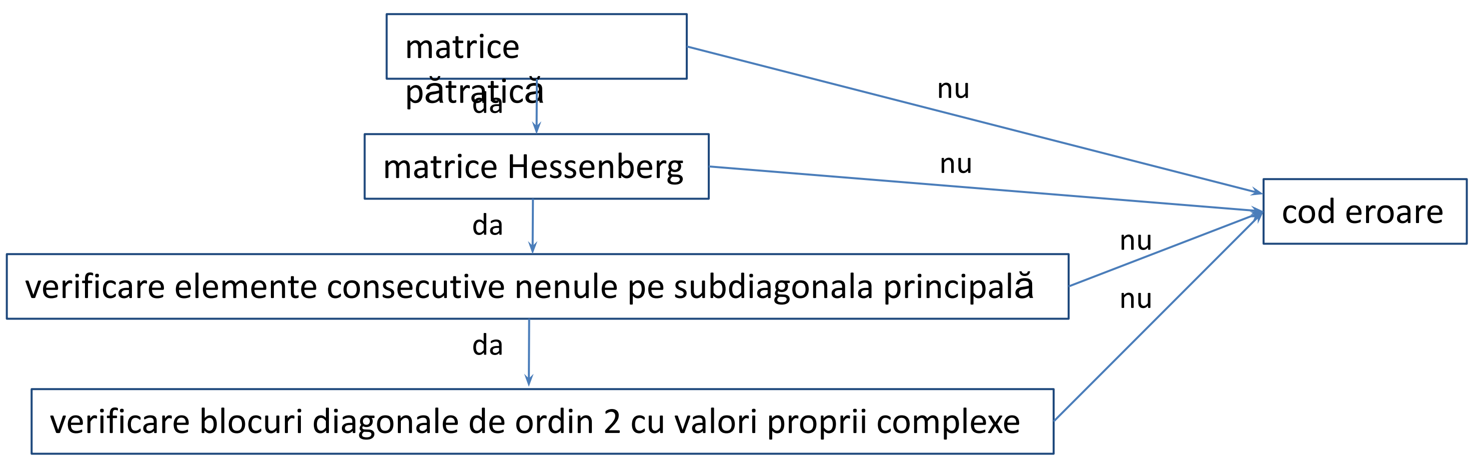
☞parametrii de intrare – ieşire funcție MATLAB:

-intrare: matrice pătratică;

-ieşire: scalar (numărul perechilor de valori proprii complex conjugate sau cod de eroare).

☞structura funcției:

✔verificare parametru de intrare



✔numărare elemente nenule de pe subdiagonala principală → *numărul perechilor de valori proprii complexe*)

✍ Exerciţiul 7

Realizaţi funcţia MATLAB care construieşte matricea de rotație plană Givens de ordin n ce permite zerorizarea elementului din linia k a unui vector coloană cu n elemente.

<u>Rezolvare:</u>

☞parametrii de intrare – ieşire funcție MATLAB:

-intrare: vector cu n componente, index linie element de zerorizat

-ieşire: matrice de rotație plană Givens

☞structura funcției:

✔determinare dimensiuni vector & verificări (dimensiuni nenule)

nu → cod eroare

da ↓

✔calcul elemente matrice de rotație (sinusul şi cosinusul unghiului de rotație)

✔generare matrice unitate de ordin egal cu dimensiunea vectorului

✔modificare elemente din liniile k -1, k şi coloanele k -1, k şi asignare matricii returnate