Правила дифференцирования

Давайте повторим:

- ✓ Δx – приращение аргумента

✓ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции

✓ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – определение производной в точке x_0

Обозначим $u(x_0) = u$, $v(x_0) = v$

Производная суммы

$$(u+v)' = u' + v'$$

Доказательство:

1. Приращение суммы функций в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta(u+v) = \big(u(x_0+\Delta x) + v(x_0+\Delta x)\big) - u(x_0) - v(x_0) = \underbrace{\big(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)\big)}_{\Delta u} +$$

$$+\underbrace{\big(v(x_0+\Delta x) - v(x_0)\big)}_{\Delta v} = \Delta u + \Delta v$$

2. Найдем разностное отношение:

$$\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

3. Найдем $(u+v)'$:

$$(u+v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

Лемма:

- Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Доказательство:

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Постоянный множитель

$$(cu)' = c \cdot u'$$

Производная произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Доказательство:

1. Приращение в точке x_0:

$$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \Big(\overbrace{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}^{\Delta u} + u(x_0)\Big) \times$$

$$\times \Big(\underbrace{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}_{\Delta v} + v(x_0)\Big) - u(x_0)v(x_0) = \big(\Delta u + u(x_0)\big)\big(\Delta v + v(x_0)\big) - u(x_0)v(x_0) =$$

$$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$$

$$= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0)$$

2. Вычислим разностное отношение:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

3. Найдем производную:

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v' + v \cdot u' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Пример:

- Найти производную функции $f(x) = (5x + 1)(x - 3)$

Решение:

$(u + v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(cu)' = c \cdot u'$ $\qquad$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u = 5x + 1$

$v = x - 3$

$u' = (5x)' + 1' = 5x' + 1' = 5 \cdot 1 + 0 = 5$

$v' = x' - 3' = 1 + 0 = 1$

$f'(x) = 5 \cdot (x - 3) + (5x + 1) \cdot 1 = 5x - 15 + 5x + 1 = 10x - 14$

Ответ: $f'(x) = 10x - 14$.

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Доказательство:

Выведем формулу $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

1. Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{\overbrace{v(x_0)-v(x_0+\Delta x)}^{-\Delta v}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$$

2. Определим разностное отношение: $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}$

3. Найдем производную функции:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)} = \frac{-\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\big(v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)\big)} = -\frac{v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}$$

- Воспользуемся правилом нахождения производной произведения функций.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Пример:

- Найти производную функции $F(x) = \frac{2x+1}{x+5}$.

Решение:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$$

$$v = x + 5 \Rightarrow v' = 1$$

$$F'(x) = \frac{2 \cdot (x+5) - 1 \cdot (2x+1)}{(x+5)^2} = \frac{2x + 10 - 2x - 1}{(x+5)^2} = \frac{9}{(x+5)^2}$$

Ответ: $F'(x) = \frac{9}{(x+5)^2}$.

Докажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого n и $x > 0$

Известно, что $x' = 1$. Используя правило нахождения производной произведения функций, найдем производные функций:

$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$

$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$

Докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n.

Метод математической индукции

$n = k - 1, \left(x^{k-1}\right)' = (k-1)x^{k-2}$

$n = k, \left(x^k\right)' = \left(x^{k-1} \cdot x\right)' = \left(x^{k-1}\right)' \cdot x + x^k \cdot x' = (k-1)x^{k-2} \cdot x +$
$+x^{k-1} = k \cdot x^{k-1}$

Пример:

- Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$(u+v)' = u' + v'$ $\qquad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Пример:

- Найти производную функции $f(x) = x^7$.

Решение:

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$n = 7$

$f'(x) = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$

Ответ: $f'(x) = 7x^6$.

Пример:

- Найти производную функции $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 9x^2 + 7x - 21$.

Решение:

$(u + v)' = u' + v' \qquad (cu)' = c \cdot\ u' \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^3)' - 9(x^2)' + 7x' - 21' = \frac{3}{4}x^2 - 18x + 7$$

Ответ: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 18x + 7$

Основные правила:

- ✓ $(u+v)' = u' + v'$
- ✓ $(cu)' = c \cdot u'$
- ✓ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- ✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- ✓ $(x^n)' = nx^{n-1}$