

Правила дифференцирования

Давайте повторим:

- Δx – приращение аргумента
- ✓ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции
- ✓ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – определение производной в точке x_0

Обозначим $u(x_0) = u$, $v(x_0) = v$

Производная суммы

$$(u + v)' = u' + v'$$

Доказательство:

1. Приращение суммы функций в точке x_0 :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta(u + v) = (u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x)) - u(x_0) - v(x_0) = \underbrace{(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0))}_{\Delta u} + \underbrace{(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}_{\Delta v} = \Delta u + \Delta v$$

2. Найдем разностное отношение:

$$\frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

3. Найдем $(u + v)'$:

$$(u + v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

Лемма:

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке, то есть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

Доказательство:

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Постоянный множитель

$$(cu)' = c \cdot u'$$

Производная произведения

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Доказательство:

1. Приращение в точке x_0 :

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \overbrace{(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) + u(x_0))}^{\Delta u} \times \\ &\times (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) + v(x_0)) - u(x_0)v(x_0) = (\Delta u + u(x_0))(\Delta v + v(x_0)) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= \underbrace{\Delta u \cdot \Delta v}_{\Delta v} + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= \Delta u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x_0) + \Delta v \cdot u(x_0) \end{aligned}$$

2. Вычислим разностное отношение:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

3. Найдем производную:

$$\begin{aligned} (uv)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v' + v \cdot u' + 0 \cdot v' = u' \cdot v + u \cdot v' \end{aligned}$$

Пример:

● Найти производную функции $f(x) = (5x + 1)(x - 3)$

Решение:

$$(u + v)' = u' + v' \qquad (cu)' = c \cdot u' \qquad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = 5x + 1$$

$$v = x - 3$$

$$u' = (5x)' + 1' = 5x' + 1' = 5 \cdot 1 + 0 = 5$$

$$v' = x' - 3' = 1 + 0 = 1$$

$$f'(x) = 5 \cdot (x - 3) + (5x + 1) \cdot 1 = 5x - 15 + 5x + 1 = 10x - 14$$

Ответ: $f'(x) = 10x - 14$.

Производная частного

Доказательство:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Выведем формулу $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1. Найдем приращение функции $\frac{1}{v}$:

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{-\Delta v}{v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)}$$

2. Определим разностное отношение: $\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)}$

3. Найдем производную функции:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0)} = \frac{-\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0))} = -\frac{v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}$$

• Воспользуемся правилом нахождения производной произведения функций.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Пример:

● Найти производную функции $F(x) = \frac{2x+1}{x+5}$.

Решение:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$$

$$v = x + 5 \Rightarrow v' = 1$$

$$F'(x) = \frac{2 \cdot (x + 5) - 1 \cdot (2x + 1)}{(x + 5)^2} = \frac{2x + 10 - 2x - 1}{(x + 5)^2} = \frac{9}{(x + 5)^2}$$

$$\text{Ответ: } F'(x) = \frac{9}{(x+5)^2}.$$

Докажем, что $(x^n)' = nx^{n-1}$ для любого n и $x > 0$

Известно, что $x' = 1$. Используя правило нахождения производной произведения функций, найдем производные функций:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + 1 \cdot x^3 = 4x^3$$

Докажем, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ справедлива и при других значениях n .

Метод математической индукции

$$n = k - 1, (x^{k-1})' = (k - 1)x^{k-2}$$

$$n = k, (x^k)' = (x^{k-1} \cdot x)' = (x^{k-1})' \cdot x + x^k \cdot x' = (k - 1)x^{k-2} \cdot x + x^{k-1} = k \cdot x^{k-1}$$

Пример:

● Найти производную функции $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.

Решение:

$$(u + v)' = u' + v' \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = (x^3)' - (x^2)' + x' - 3' = 3x^2 - 2x + 1$$

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Пример:

● Найти производную функции $f(x) = x^7$.

Решение:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$n = 7$$

$$f'(x) = (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$$

Ответ: $f'(x) = 7x^6$.

Пример:

● Найти производную функции $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 9x^2 + 7x - 21$.

Решение:

$$(u + v)' = u' + v' \quad (cu)' = c \cdot u' \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^3)' - 9(x^2)' + 7x' - 21' = \frac{3}{4}x^2 - 18x + 7$$

Ответ: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 18x + 7$

Основные правила:

$$✓ (u + v)' = u' + v'$$

$$✓ (cu)' = c \cdot u'$$

$$✓ (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$✓ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$✓ (x^n)' = nx^{n-1}$$