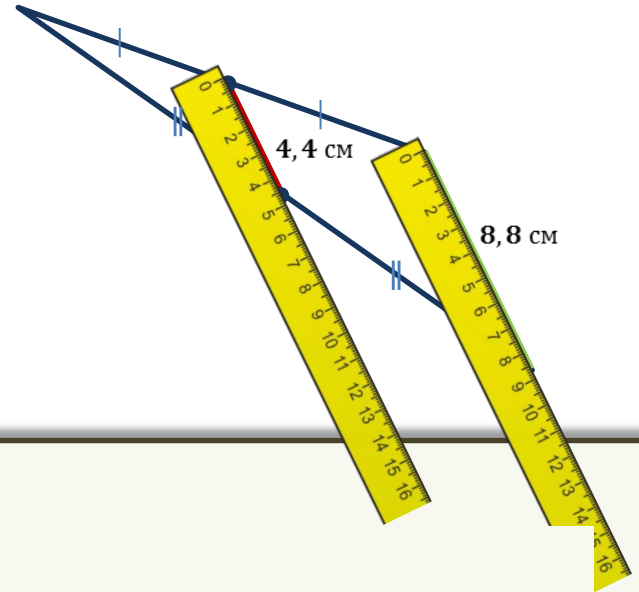
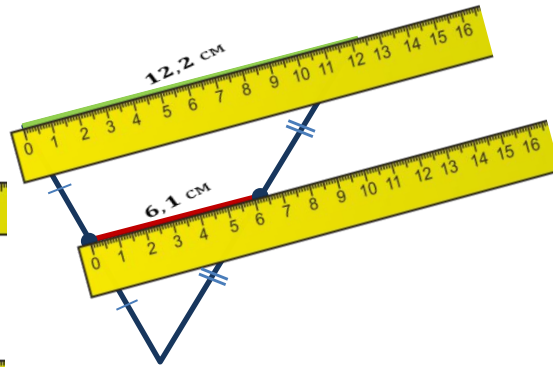
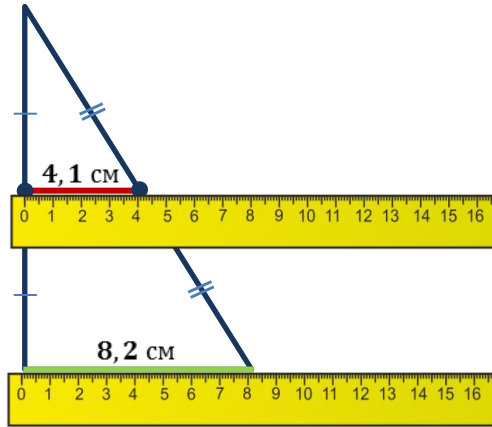


Средняя линия треугольника

Определение. **Средней линией** треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



Теорема.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

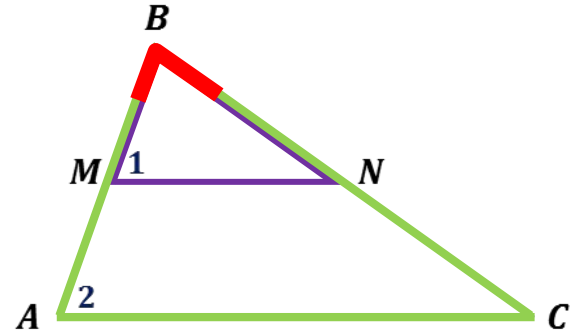
Доказательство.

1. $\triangle ABC$ и $\triangle MBN$: $\angle B$ – общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$.

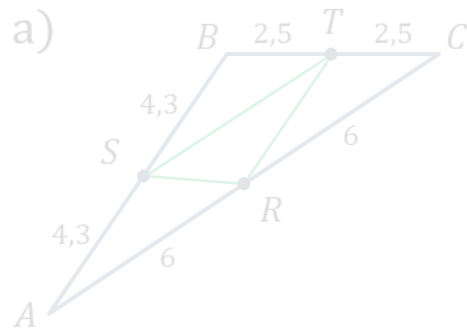
2. $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2, \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$.

3. $\angle 1 = \angle 2$ (соответственные углы при MN и AC , AB – секущая) $\Rightarrow MN \parallel AC$.

4. $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC$.



Задача. Укажите, какие из изображённых отрезков являются средними линиями, и найдите их длину.



б) $\triangle ABC$ – равнобедренный
 AC – основание



Решение.

а) $ST \parallel AC, ST = \frac{1}{2}AC \Rightarrow ST = 6$

$RT \parallel AB, RT = \frac{1}{2}AB \Rightarrow RT = 4,3$

$SR \parallel BC, SR = \frac{1}{2}BC \Rightarrow SR = 2,5$

б) $AB = BC$

$AE = BE = BF = FC$

$EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow EF = 5$

в)

$KL \parallel AC, KL = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow KL = 3,75$

Задача. Дан треугольник, стороны которого соответственно равны 5 см, 13 см и 10 см. Найти периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

Решение.

$$P_{\Delta KLM} = KL + LM + KM$$

KL – средняя линия: $KL \parallel AC, KL = \frac{1}{2}AC$

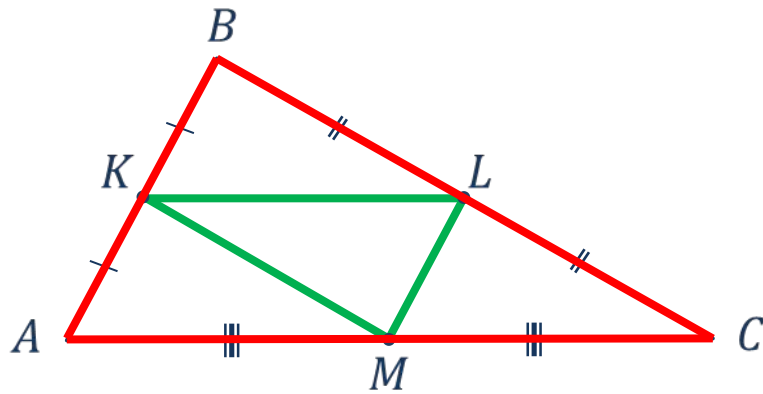
ML – средняя линия: $ML \parallel AB, ML = \frac{1}{2}AB$

KM – средняя линия: $KM \parallel BC, KM = \frac{1}{2}BC$

$$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AC + AB + BC) = \frac{1}{2}P_{\Delta ABC}$$

$$P = \frac{1}{2}(5 + 13 + 10) = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14(\text{см})$$

Ответ: 14 см.



Задача. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении два к одному, считая от вершины.

Доказательство.

1. $A_1B_1 \parallel AB$

$$\begin{array}{l} \text{внутренние} \\ \text{накрест лежащие} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \angle 1 = \angle 2 \text{ (секущая } AA_1) \\ \angle 3 = \angle 4 \text{ (секущая } BB_1) \end{array} \right.$$

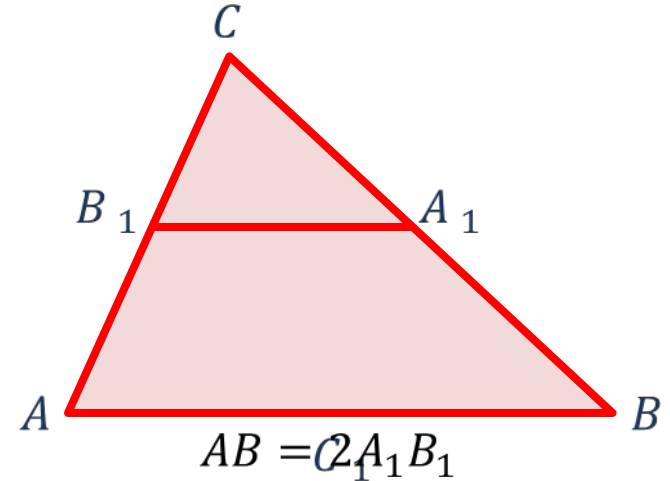
2. $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = 2$$

3. $AO:OA_1 = BO:OB_1 = 2:1$

4. Аналогично п. 1-3: $BM:MB_1 = CM:MC_1 = 2:1$

5. Точка M совпадает с точкой $O \Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$



Задача. В треугольнике ABC , через точки K и M — середины отрезков AB и BC соответственно, проведена прямая KM .

$AK = 4$ см, $BM = 6$ см, $P_{\triangle ABC} = 36$ см. Найти KM и AC .

Решение.

1. KM — средняя линия (по определению)

2. $AB = 8$ см, $BC = 12$ см

3. $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$

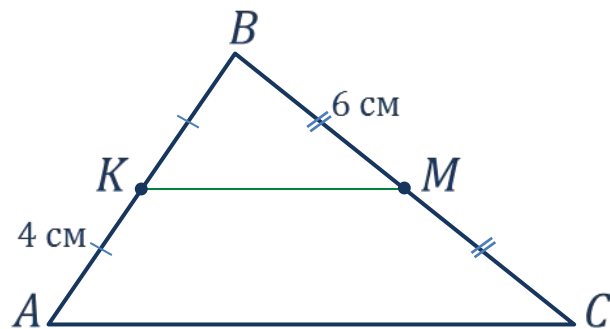
$$\Rightarrow AC = P_{\triangle ABC} - AB - BC$$

$$AC = 36 - 8 - 12 = 16 \text{ (см)}$$

4. $KM = \frac{1}{2}AC$ (свойство средней линии треугольника)

$$KM = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \text{ (см)}$$

Ответ: 8 см, 16 см.



Задача. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M , N , P и Q являются серединами сторон AB , BC , CD и AD соответственно. Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм.

Решение.

$\triangle ABC$: MN — средняя линия $\Rightarrow MN \parallel AC$

$\triangle ACD$: PQ — средняя линия $\Rightarrow PQ \parallel AC$

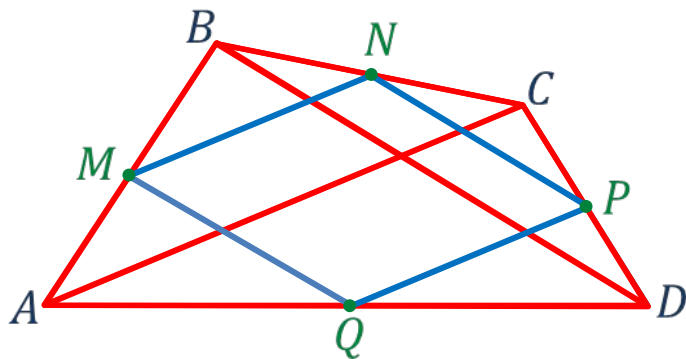
$\Rightarrow MN \parallel PQ$

$\triangle BCD$: NP — средняя линия $\Rightarrow NP \parallel BD$

$\triangle ABD$: MQ — средняя линия $\Rightarrow MQ \parallel BD$

$\Rightarrow NP \parallel MQ$

Значит, $MNPQ$ — параллелограмм (по определению).

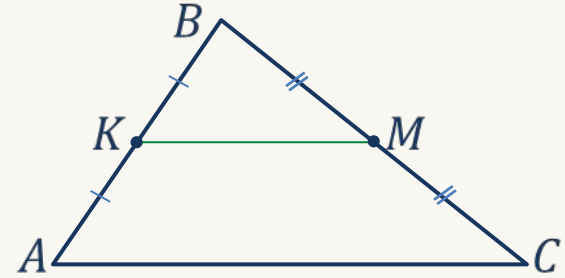


Определение.

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема.

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



$$KM \parallel AC$$

$$KM = \frac{1}{2}AC$$

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

$$AO:OA_1 = BO:OB_1 = CO:OC_1 = 2:1$$

