

**«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)**

Оптимальное проектирование диска компрессора

Дипломная работа

студента группы ФН2-121

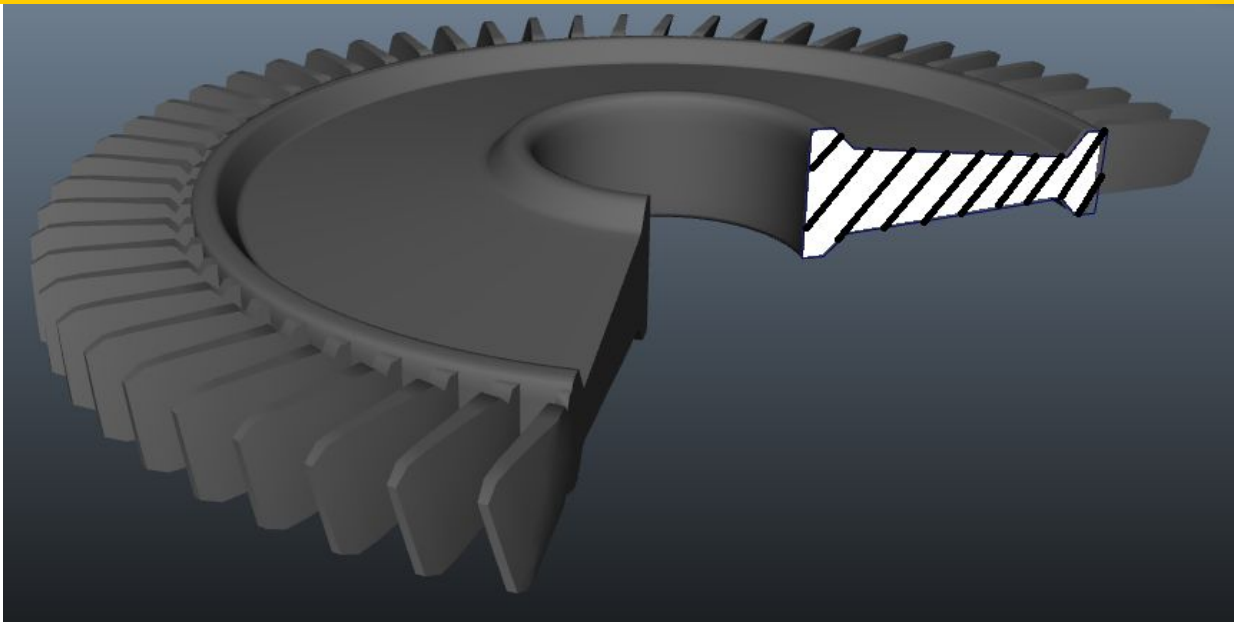
Николаева Евгения Юрьевича

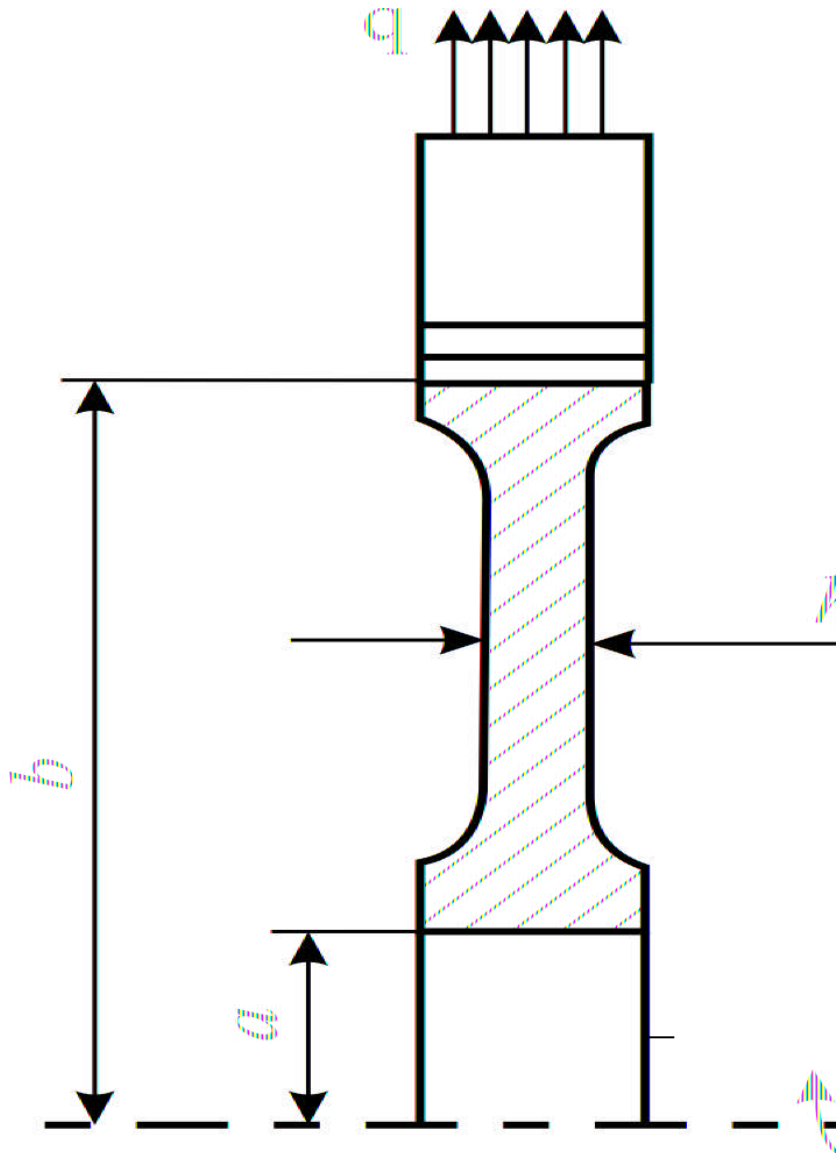


Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Темис Юрий Моисеевич

Москва, 2012

- Постановка задачи оптимизации диска
- Основные уравнения
- Метод чувствительности
- Результаты расчетов
- Заключение





Цель оптимизации:

$$F[h] = 2\pi \int_a^b \rho h(r) r dr \rightarrow \min$$

Ограничения:

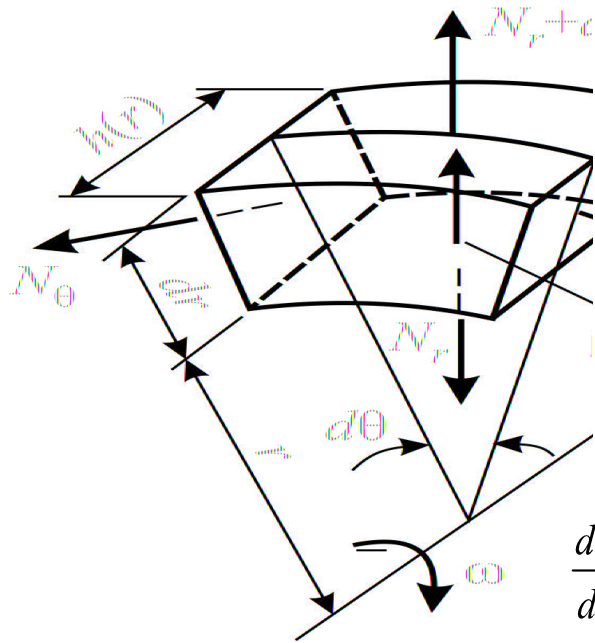
$$h_{\min}(r) \leq h(r) \leq h_{\max}(r)$$

$$\sigma_i(r) \leq [\sigma]$$

$$\forall r \in [a, b];$$

$[\sigma]$ - допустимые напряжения

Равновесие элемента диска:

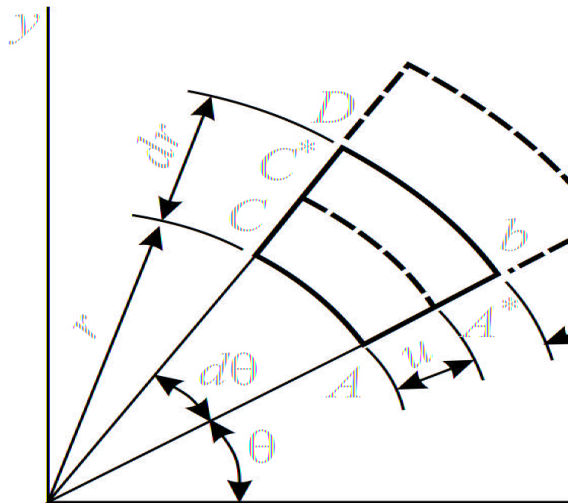


$$-N_r r d\theta + (N_r + dN_r)(r + dr)d\theta - 2N_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \rho \omega^2 h r^2 dr d\theta = 0$$

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \rho \omega^2 h r = 0$$

Уравнение равновесия в перемещениях:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h(r)} \frac{dh}{dr} \right) \frac{du}{dr} + \left(\frac{\mu}{rh(r)} \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) u = -\frac{(1-\mu^2)\rho\omega^2 r}{E} + \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{d}{dr} \alpha T + \frac{dh}{dr} \alpha T \right)$$



$$Q = \sigma_r h r$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{\mu}{r} u + \frac{1-\mu^2}{Er} \frac{1}{h} Q + \alpha(1+\mu)T;$$

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{E}{r} h u + \frac{\mu}{r} Q + (-E\alpha T - \rho\omega^2 r^2) h.$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 Q(a) = \eta_1$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 Q(b) = \eta_2$$

Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Исходная задача:

$$[J] \begin{Bmatrix} u \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha(1 + \mu) \\ (-E\alpha T - q_r r)h \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 Q(a) = \eta_1$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 Q(b) = \eta_2$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{\mu}{r} & -\frac{1 - \mu^2}{Erh} \\ -\frac{Eh}{r} & \frac{d}{dr} - \frac{\mu}{r} \end{bmatrix};$$

$$F_1[h] = \int_a^b \left(\text{Max} \left[\left(\frac{\sigma_i(r)}{[\sigma]} \right)^2 - 1, 0 \right] \right)^2 dr = 0$$

$$F_1[h] = \int_a^b Z(u, Q, h, r) dr = 0$$

Уравнение в вариациях:

$$h_2 = h_1 + v$$

$$[J] \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta Q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{Bmatrix} \delta h = 0$$

$$\alpha_1 \delta u(a) + \beta_1 \delta Q(a) = 0$$

$$\alpha_2 \delta u(b) + \beta_2 \delta Q(b) = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial h} [J] \begin{Bmatrix} u \\ Q \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial h} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

$$\delta F_1[v] = F_1[h_1 + v] - F_1[h_1] \approx \int_a^b \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1} \delta u + \frac{\partial Z}{\partial x_2} \delta Q + \frac{\partial Z}{\partial h} v \right) dr$$

$$\int_a^b \{\psi\}^T \left[[J] \{\delta x\} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{Bmatrix} v \right] dr = 0$$

$$\int_a^b \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta Q \end{Bmatrix}^T [J]^* \{\psi\} dr + \int_a^b \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h} & \frac{\partial f_2}{\partial h} \end{bmatrix} \{\psi\} v dr + \{\psi\}^T \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta Q \end{Bmatrix} \Big|_a^b = 0,$$

$$[J]^* \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial Q} \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} -\beta_1 \psi_1(a) + \alpha_1 \psi_2(a) &= 0 \\ -\beta_2 \psi_1(b) + \alpha_2 \psi_2(b) &= 0 \end{aligned}$$

Сопряженная задача:

$$\delta F_1[v] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial h} \psi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial h} \psi_2 + \frac{\partial Z}{\partial h} \right\} v(r) dr = \int_a^b w_1(r) v(r) dr$$

Метод чувствительности на примере задачи оптимизации вращающегося диска

Задача нахождения минимума линейного функционала:

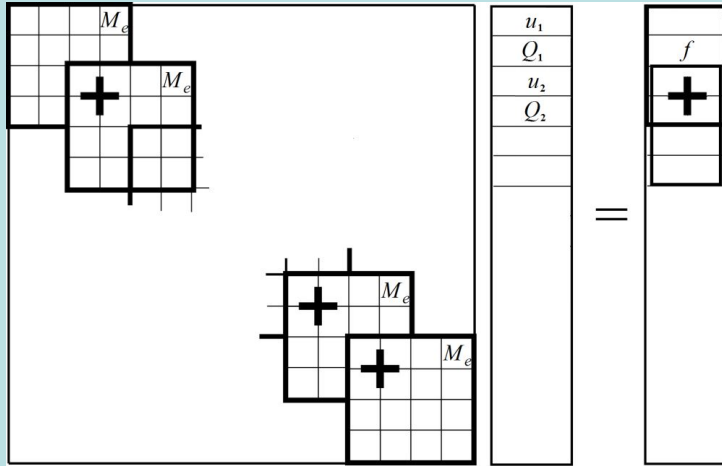
$$F[h_1] + \delta F[v] = 2\pi \int_a^b \rho h_1(r) r dr + \int_a^b w(r) v(r) dr = C + \int_a^b w(r) v(r) dr \rightarrow \min,$$
$$F_1[h_1 + v] = F_1[h_1] + \int_a^b w_1(r) v(r) dr = 0, \quad \int_a^b (v(r))^2 dr - \varepsilon^2 = 0,$$

$$L[v] = C + \int_a^b w(r) v(r) dr - \lambda \left\{ F_1 + \int_a^b w_1(r) v(r) dr \right\} + \frac{\gamma}{2} \left\{ \int_a^b (v(r))^2 dr - \varepsilon^2 \right\}$$

$$v(r) = S \left(-w + \frac{\int_a^b w w_1 dr}{\int_a^b w_1^2 dr} w_1 \right) - \frac{F_1}{\int_a^b w_1^2 dr} w_1, \quad S = \frac{1}{\gamma}$$

МКЭ

$$\sum_{e=1}^N \{\omega\} \int_e^{e+1} [N]^T [N] dr [T] - \sum_{e=1}^N \{\omega\} \int_e^{e+1} [N]^T [D][N] dr [T] = - \sum_{e=1}^N \{\omega\} \int_e^{e+1} [N]^T [f] dr$$



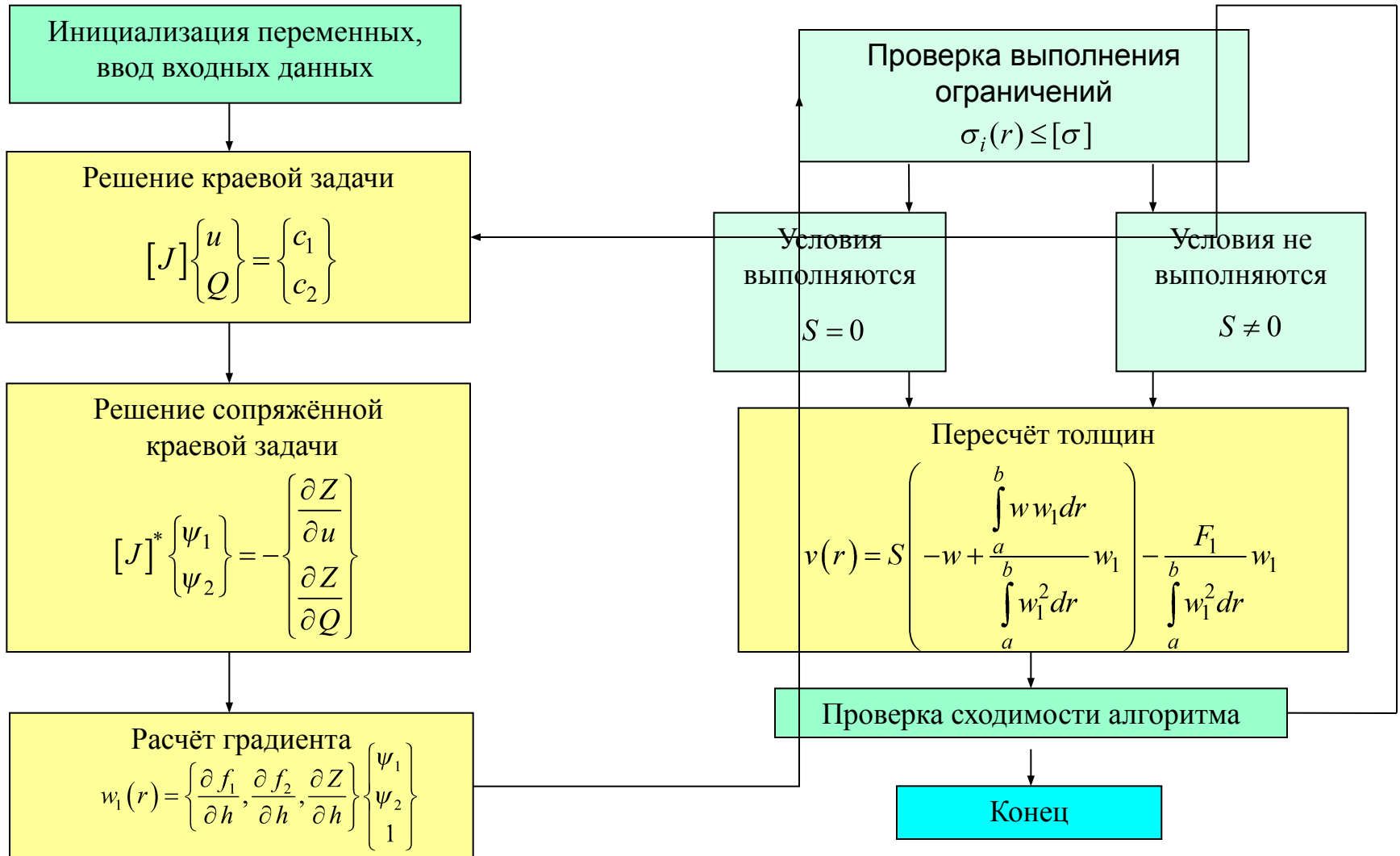
$$\int_a^b R\{\omega\} = \int_a^b \left([J] \begin{Bmatrix} u \\ Q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \right) \{\omega\} dr = 0$$

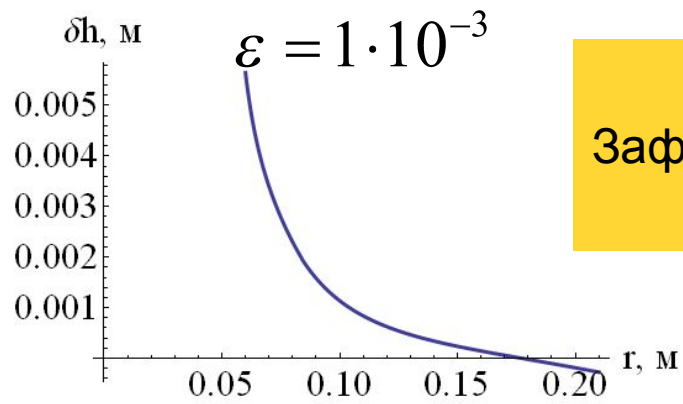
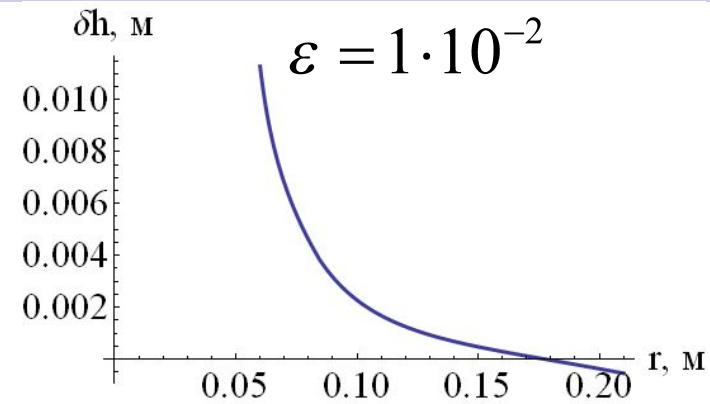
МКР

$$\frac{du}{dr} \approx \frac{u(r_{e+1}) - u(r_e)}{\delta r}$$

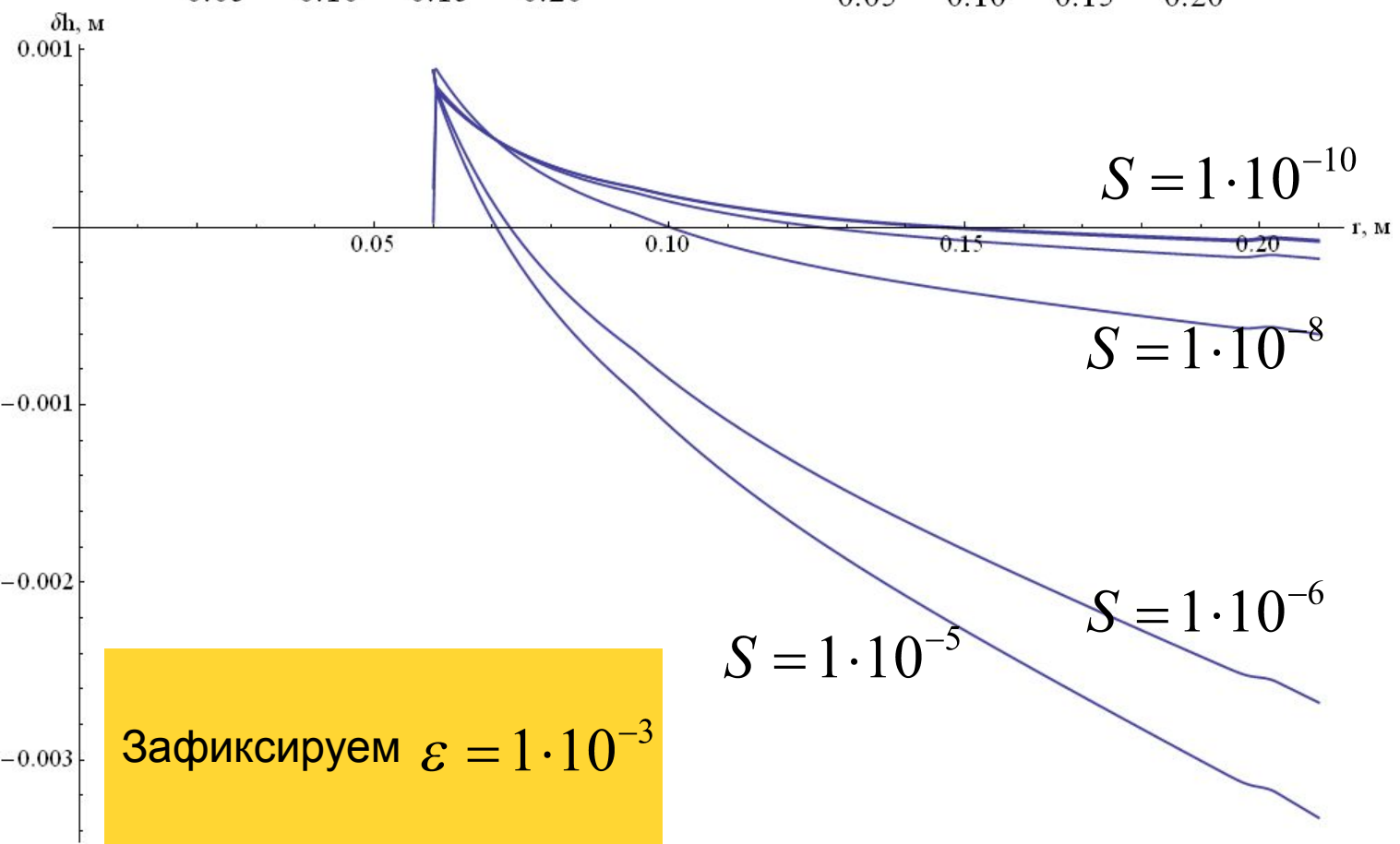
$$\begin{Bmatrix} u \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(r) \\ Q(r) \end{Bmatrix}^{(0)} + \sum_{k=1}^2 C_k \begin{Bmatrix} u(r) \\ Q(r) \end{Bmatrix}^{(k)}$$

Блок-схема алгоритма

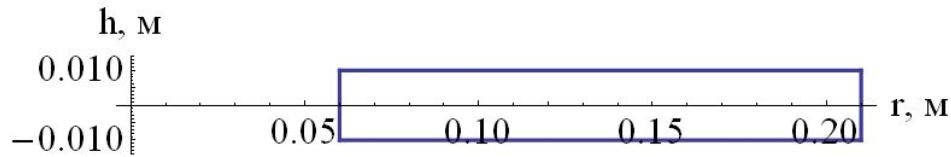




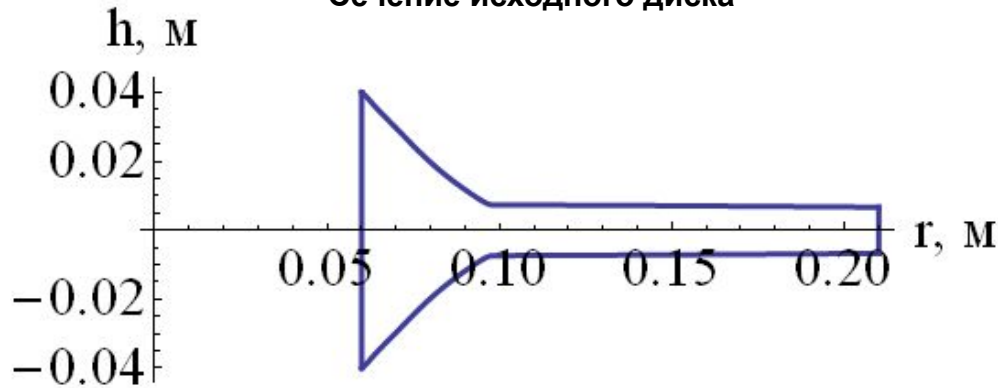
Зафиксируем $S = 2 \cdot 10^{-8}$



Зафиксируем $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-3}$



Сечение исходного диска

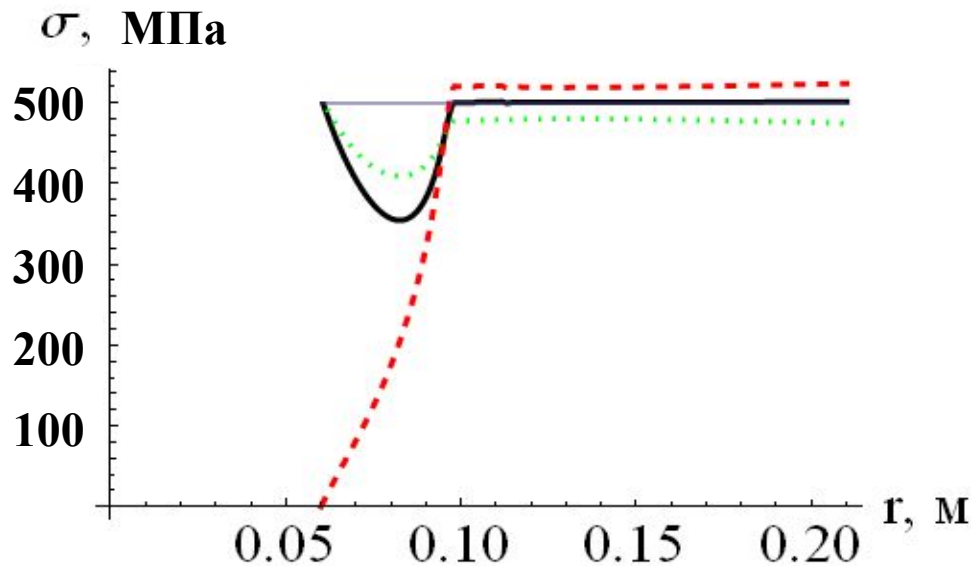


Сечение оптимального диска

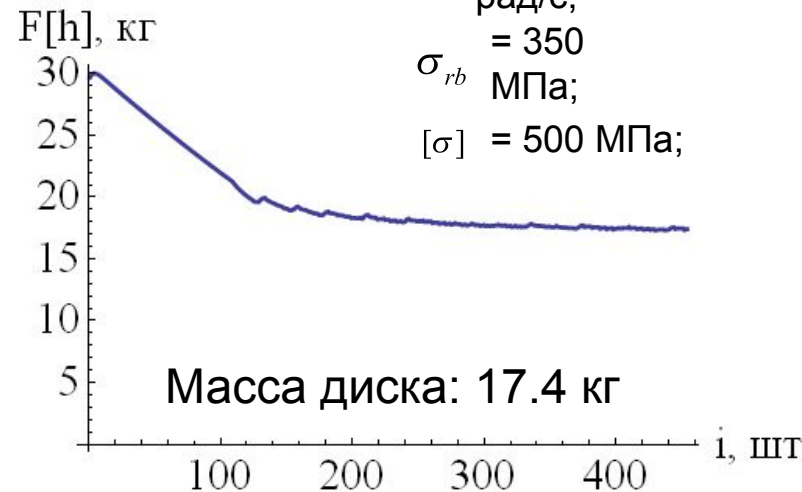
Расчет диска с ограничением по величине напряжений

Параметры диска

- $\mu = 0.28;$
- $E = 210$ ГПа;
- $h_0 = 0.02$ м;
- $\rho = 7700$ кг/м³;
- $\omega = 1000$ рад/с;
- $\sigma_{rb} = 350$ МПа;
- $[\sigma] = 500$ МПа;

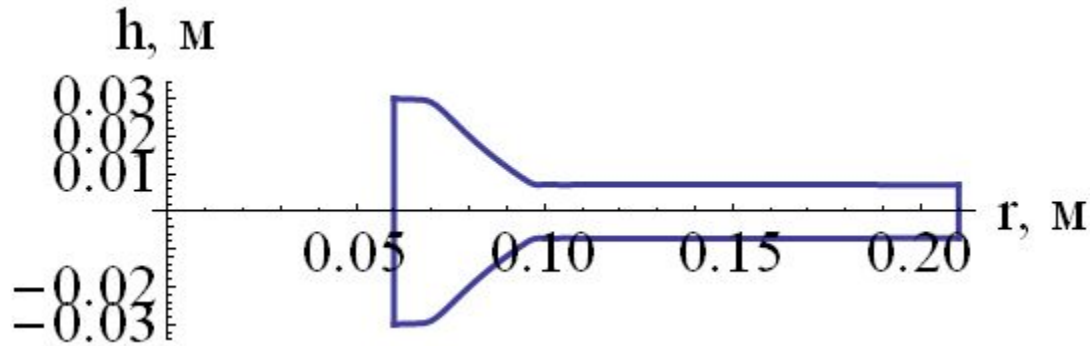


Распределение напряжений в оптимальном диске



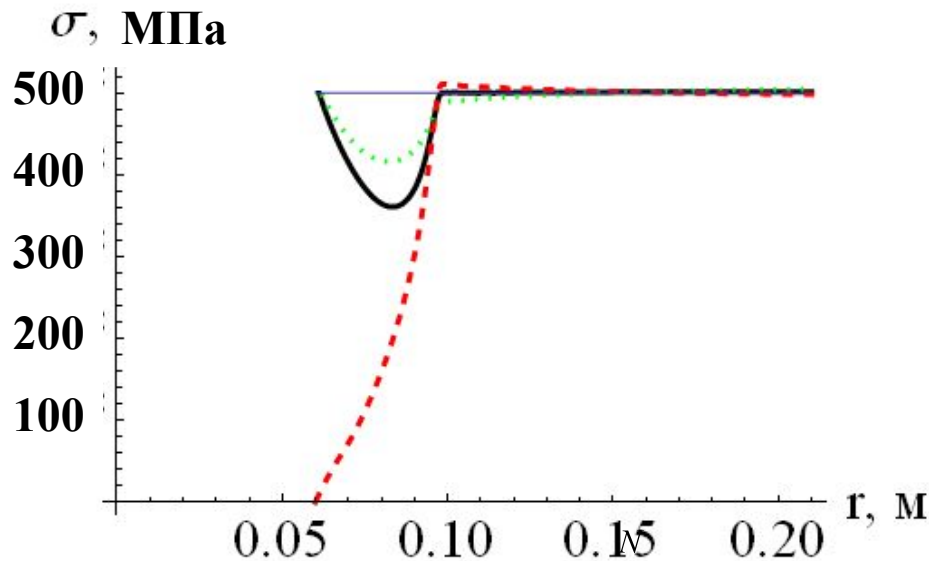
Масса диска: 17.4 кг

Зависимость массы диска от итерации



Сечение оптимального диска

Расчет диска с ограничением по величине напряжений и толщине диска

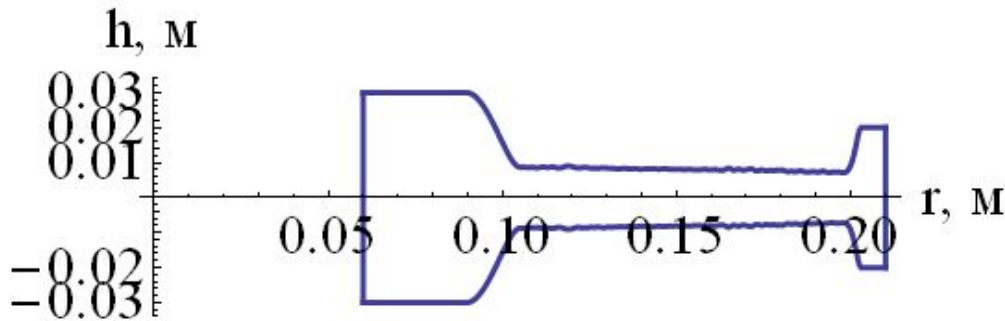


Распределение напряжений в оптимальном диске

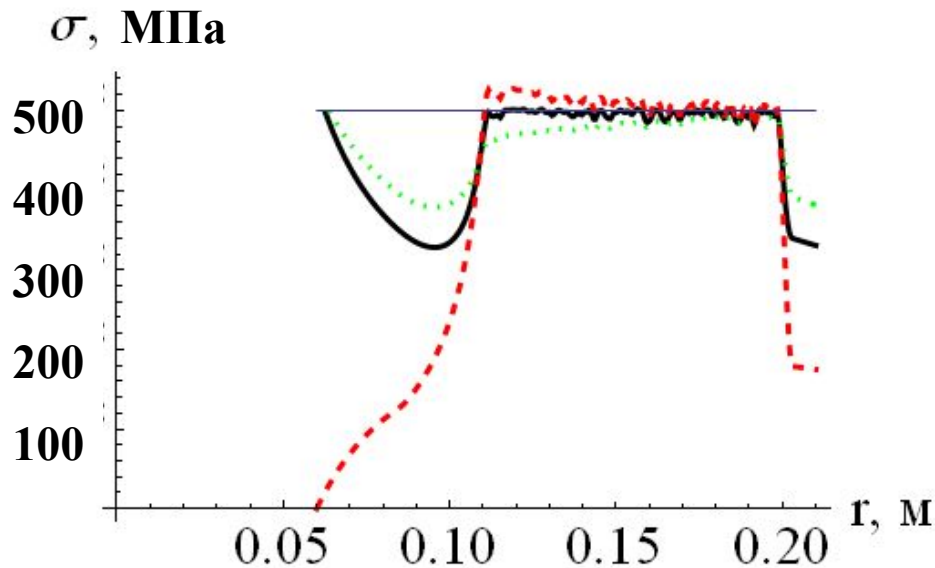
Параметры диска

- $\mu = 0.28;$
- $E = 210$
ГПа;
- $h_0 = 0.02$ м;
- $\rho = 7700$ кг/м³;
- $\omega = 1000$
рад/с;
- $\sigma_{rb} = 350$
МПа;
- $[\sigma] = 500$ МПа;

Масса диска: 17.8 кг



Сечение оптимального диска



Распределение напряжений в оптимальном диске

Расчет диска с ограничением по величине напряжений и толщине диска с фиксированной ободной частью

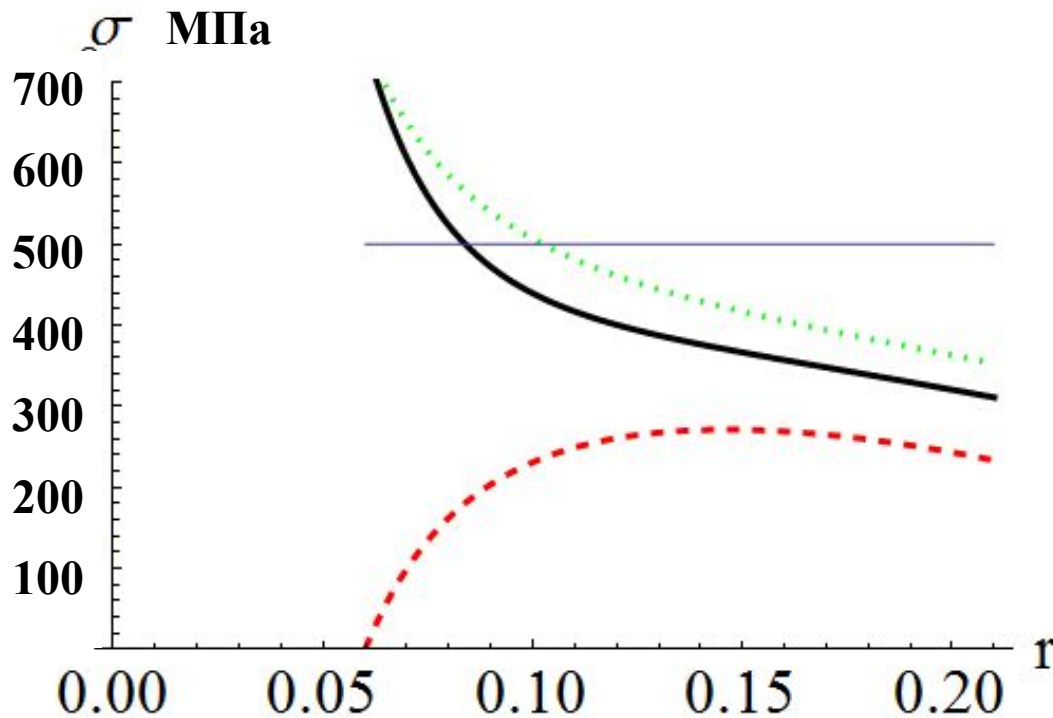
Параметры диска

- $\mu = 0.28;$
- $E = 210$
ГПа;
- $h_0 = 0.02$ м;
- $\rho = 7700$ кг/м³;
- $\omega = 1000$
рад/с;
- $\sigma_{rb} = 350$
МПа;
- $[\sigma] = 500$ МПа;

Масса диска: 20.5 кг



Изменение сечения диска



Изменение напряжений в сечении диска

Работа алгоритма по итерациям для диска с фиксированным ободом

- Решена задача оптимизации вращающегося осесимметричного диска методом чувствительности, что позволило сократить время расчета градиентов в задаче оптимального проектирования.
- Реализован алгоритм метода чувствительности, метода конечных элементов и метода конечных разностей.
- Решена задача оптимизации диска с введением дополнительных ограничений на максимальную (или минимальную) толщину диска.
- В ходе выполнения работы написана программа для оптимизации формы диска методом чувствительности.

Спасибо за внимание!