

21.12.20.

Тема:

Основные тригонометрические  
тождества.

Преобразование тригонометрических  
выражений.

*Учащиеся должны освоить теоретическую  
часть, прислать ответы на вопросы и решение  
задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/TI38g42WKc8>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

### **Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента**

---

В этом параграфе установим тождества, связывающие значения тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Координаты любой точки  $P(x; y)$  единичной окружности удовлетворяют уравнению  $x^2 + y^2 = 1$ . Поскольку  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол поворота, в результате которого из точки  $P_0(1; 0)$  была получена точка  $P$ , то

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Обратим внимание на то, что точка  $P$  на единичной окружности выбрана произвольно. Поэтому равенство (1) справедливо для любого  $\alpha$ . Его называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Используя основное тригонометрическое тождество, найдём зависимость между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом.

Пусть  $\cos \alpha \neq 0$ . Разделим обе части равенства (1) на  $\cos^2 \alpha$ . Получим:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \text{ Отсюда}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Это тождество верно для всех  $\alpha$ , при которых  $\cos \alpha \neq 0$ , то есть при  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .

Пусть  $\sin \alpha \neq 0$ . Разделим обе части равенства (1) на  $\sin^2 \alpha$ . Получим:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \text{ Отсюда}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Это тождество верно для всех  $\alpha$ , при которых  $\sin \alpha \neq 0$ , то есть при  $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbf{Z}$ .

Связь между тангенсом и котангенсом можно установить с помощью равенств  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  и  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ . Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Это тождество верно для всех  $\alpha$ , при которых  $\sin \alpha \neq 0$  и  $\cos \alpha \neq 0$ , то есть при  $\alpha \neq \pi k$  и  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Заметим, что эти два ограничения для  $\alpha$  можно объединить в одно:  $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Пример 1.** Найдите  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{7}{25}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**Решение.** Имеем:  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$ .

Так как  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , то  $\cos \alpha < 0$ , следовательно,  $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{24}{7}. \quad \blacksquare$$

## Практическая часть.

### Ответить на вопросы

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
2. Какое тождество связывает тангенс и косинус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
3. Какое тождество связывает котангенс и синус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
4. Какое тождество связывает тангенс и котангенс одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?

**458** Вычислить:

1)  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;

2)  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**459** По значению одной из тригонометрических функций ( $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ ) найти значения остальных трёх:

1)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;      2)  $\sin \alpha = 0,8$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;

3)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;      4)  $\operatorname{ctg} \alpha = -3$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

5)  $\cos \alpha = 0,8$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;      6)  $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

7)  $\operatorname{tg} \alpha = -2,4$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;      8)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .