

• Уравнения математической физики

1. **Пример 1.** Найти функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую

дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$

Решение. Интегрируя, получим $z = x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — произвольная функция. Это—общее решение данного дифференциального уравнения.

1. Найти функцию $z=z(x,y)$, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^7 - 5$$

1. **Пример 2.** Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, где $z = z(x, y)$.

Решение. Дважды интегрируя по y , получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x), \quad z = y^3 + y \cdot \varphi(x) + \psi(x), \quad \text{где } \varphi(x) \text{ и } \psi(x) \text{ —}$$

произвольные функции.

ДУ с ЧП называется линейным относительно старших производных, если старшие производные входят в него в первой степени (линейно). Например,

$$\underbrace{a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}} = F\left(\underbrace{x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{младшая часть}}\right)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Классификация уравнения производится по знаку дискриминанта $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$.

Определение – классификация ДУ (4). ДУ (4) принадлежит:
гиперболическому типу, если $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) > 0$
(примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение);
параболическому типу, если $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0$
(примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности);
эллиптическому типу, если $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) < 0$
(примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа).

1. Определить тип уравнения

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 5u = 0.$$

Решение.

Здесь $a = 3$, $2b = -10$, $b = -5$, $c = 3$, $b^2 - ac = 25 - 9 = 16 > 0$, следовательно, это — уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости.

1. Определить типы уравнений

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 5u = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8\frac{\partial u}{\partial y} - 4u = 0$$

Определить тип следующих дифференциальных уравнений в частных производных

Пример 1.
$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x + 2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

Пример 2.
$$(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

Пример 3.
$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 5u = 0.$$

Определить типы следующих ДУ в частных производных.

ПРИМЕР 1).
$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

главная часть

ПРИМЕР 2).
$$(2 + 3 \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

главная часть

ПРИМЕР 3).
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

главная часть

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА

Свободные колебания $u = u(x, t)$ бесконечной однородной струны описываются уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

которое называется волновым уравнением.

Для определения движения струны необходимо задать начальные условия: ее форму в начальный момент времени

$$u|_{t=0} = f(x), \quad (2)$$

и начальную скорость точек

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (3)$$

Решение уравнения (1) с начальными условиями (2)-(3) может быть найдено методом Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z) dz. \quad (4)$$

1. **Пример 1.** Используя формулу Даламбера, найти решения $u(x, t)$ следующих задач Коши $(-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$:

а) Найти форму бесконечной струны, определяемую уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в

момент времени $\frac{\pi}{2}$ при начальных условиях $u(x, 0) = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos x$.

Решение. Исходя из условий задачи $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$, найдем форму струны в момент времени t :

$$u(x, t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos \tau d\tau = \sin x \cos t + \frac{1}{2} \sin \tau \Big|_{x-t}^{x+t} = \\ = \sin x \cos t + \sin t \cos x = \sin(x+t).$$

Полагая $t = \frac{\pi}{2}$, получаем $u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Пример 2. Найти уравнение $u = u(x, t)$ формы однородной бесконечной струны, определенной уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u|_{t=0} = \frac{\sin x}{x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение. Решение данной задачи, описывающее форму однородной бесконечной струны, находим методом Даламбера по формуле (6.4). Здесь $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $F(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Отсюда

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x-at)}{x-at} + \frac{\sin(x+at)}{x+at} \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{z}{1+z^2} dz =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x+at)(\sin x \cos at - \cos x \sin at) + (x-at)(\sin x \cos at + \cos x \sin at)}{(x-at)(x+at)} +$$

$$+ \frac{1}{4a} \ln(1+z^2) \Big|_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \frac{x \sin x \cos at - at \cos x \sin at}{x^2 - a^2 t^2} + \frac{1}{4a} \ln \frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}.$$

Пример 3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при

начальных условиях $u|_{t=0} = x$ и $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x$.

Решение. Искомое решение найдем из формулы (6.4) при $f(x) = x$ и $F(x) = \sin x$. При этом получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{x - at + x + at}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \sin z dz = x - \frac{1}{2a} \cos z \Big|_{x-at}^{x+at} = \\ &= x - \frac{\cos(x+at) - \cos(x-at)}{2a} = \\ &= x - \frac{\cos x \cos at - \sin x \sin at - \cos x \cos at - \sin x \sin at}{2a} = \\ &= x + \frac{\sin x \sin at}{a}. \end{aligned}$$

а) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях

$$u(x, 0) = \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Ответ: $\left(u(x, t) = \frac{x \sin x \cos at - at \cos x \sin at}{x^2 - a^2 t^2} \right).$