• Уравнения математической физики

1. **Пример 1.** Найти функцию $z = z\left(x, y\right)$, удовлетворяющую

дифференциальному уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$

Решение. Интегрируя, получим $z = x + \varphi\left(y\right)$, где $\varphi\left(y\right)$ — произвольная функция. Это—общее решение данного дифференциального уравнения.

1. Найти функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^7 - 5$$

1. **Пример 2.** Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, где $z = z(x, y)$.

Решение. Дважды интегрируя по y, получаем

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x)$, $z = y^3 + y \cdot \varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ —

произвольные функции.

ДУ с ЧП называется линейным относительно старших производных, если старшие производные входят в него в первой степени (линейно). Например,

$$\underbrace{a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}}=\underbrace{F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{младшая часть}}$$

$(x,y)\in R^2.$

Классификация уравнения производится по знаку дискриминанта $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)$.

Определение – классификация ДУ (4). ДУ (4) принадлежит:
гиперболическому типу, если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$ (примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение);
параболическому типу, если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$ (примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности);
эллиптическому типу, если $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$ (примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа).

1. Определить тип уравнения

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 5u = 0.$$

Решение.

Здесь $a = 3$, $2b = -10$, $b = -5$, $c = 3$, $b^2 - ac = 25 - 9 = 16 > 0$, следовательно, это — уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости.

1. Определить типы уравнений

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}-5u=0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial u}{\partial y}-4u=0$$

Определить тип следующих дифференциальных уравнений в частных производных

Пример 1. $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(x+2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;$$

Пример 2. $$\left(1+x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0;$$

Пример 3. $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+5u=0.$$

Определить типы следующих ДУ в частных производных.

ПРИМЕР 1).
$$\underbrace{x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}}+3x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ПРИМЕР 2).
$$\underbrace{\left(2+3\sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-6\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}}=0$$

ПРИМЕР 3).
$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}}=0$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ МЕТОДОМ ДАЛАМБЕРА

Свободные колебания $u = u(x,t)$ бесконечной однородной струны описываются уравнением в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

которое называется волновым уравнением.

Для определения движения струны необходимо задать начальные условия: ее форму в начальный момент времени

$$u\big|_{t=0} = f(x), \tag{2}$$

и начальную скорость точек

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{3}$$

Решение уравнения (1) с начальными условиями (2)-(3) может быть найдено методом Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)dz. \tag{4}$$

1. **Пример 1.** Используя формулу Даламбера, найти решения $u(x,t)$ следующих задач Коши $(-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$:

а) Найти форму бесконечной струны, определяемую уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент времени $\frac{\pi}{2}$ при начальных условиях $u(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos x$.

Решение. Исходя из условий задачи $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$, найдем форму струны в момент времени t:

$$u(x,t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos\tau\, d\tau = \sin x \cos t + \frac{1}{2}\sin\tau\Big|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= \sin x \cos t + \sin t \cos x = \sin(x+t).$$

Полагая $t = \frac{\pi}{2}$, получаем $u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Пример 2. Найти уравнение $u = u(x,t)$ формы однородной бесконечной струны, определенной уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u\Big|_{t=0} = \dfrac{\sin x}{x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Решение. Решение данной задачи, описывающее форму однородной бесконечной струны, находим методом Даламбера по формуле (6.4). Здесь $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $F(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Отсюда

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-at)}{x-at} + \frac{\sin(x+at)}{x+at}\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{z}{1+z^2} dz =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x+at)(\sin x\cos at-\cos x\sin at)+(x-at)(\sin x\cos at+\cos x\sin at)}{(x-at)(x+at)}+$$

$$+\frac{1}{4a}\ln(1+z^2)\Big|_{x-at}^{x+at}=$$

$$=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2}+\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}.$$

Пример 3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u\big|_{t=0}=x$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x$.

Решение. Искомое решение найдем из формулы (6.4) при $f(x)=x$ и $F(x)=\sin x$. При этом получаем

$$u(x,t)=\frac{x-at+x+at}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin z dz=x-\frac{1}{2a}\cos z\Big|_{x-at}^{x+at}=$$

$$=x-\frac{\cos(x+at)-\cos(x-at)}{2a}=$$

$$=x-\frac{\cos x\cos at-\sin x\sin at-\cos x\cos at-\sin x\sin at}{2a}=$$

$$=x+\frac{\sin x\sin at}{a}.$$

а) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u(x,0)=\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$.

Ответ: $\left(u(x,t)=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2}\right)$.