Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим некоторые случаи нахождения интеграла от тригонометрических функций. Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление неопределенных интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, которая называется ***универсальной***.

Действительно, $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$. Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t. Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он *всегда* приводит к результату.

На практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции. В частности, удобны следующие правила:

1) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\sin x$, т. е. $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл;

2) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *нечетна относительно* $\cos x$, т. е. $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, то делается подстановка $\sin x = t$;

3) если функция $R(\sin x; \cos x)$ *четна относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$ $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} =$$

$$= \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

○ Решение: Так как

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{1+(-\sin x)^2} = \frac{1}{1+\sin^2 x} = R(\sin x; \cos x),$$

то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Отсюда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Поэтому

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \quad ●$$

Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка $\sin x = t$, если n — целое положительное *нечетное* число;

2) подстановка $\cos x = t$, если m — целое положительное *нечетное* число;

3) формулы понижения порядка: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n — целые *неотрицательные четные* числа;

4) подстановка $\operatorname{tg} x = t$, если $m + n$ — есть четное отрицательное целое число.

Пример 3. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$.

Решение: Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ и

$$I = \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (1-t^2)^2 \, dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) \, dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$.

Решение:

$$I = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{16} \int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Пример 5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x \, dx.$$

○ Решение: Здесь $m + n = -4$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ и

$$I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t^3}{(\sqrt{1+t^2})^3}} = \int \frac{1+t^2}{t^3} \, dt = \int t^{-3} \, dt + \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad \bullet$$

Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x \, dx$.

Решение:

$$I = \int \sin 8x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10} \cos 10x - \frac{1}{6} \cos 6x \right) + C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррацио нальные функции.

Интегралы типа

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

называют неопределенными интегралами от квадратичных иррацио нальностей. Их можно найти следующим образом: под радикалом вы делить полный квадрат

$$ax^2+bx+c =$$

$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$

и сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$. При этом первые два интеграла приводятся к табличным, а третий — к сумме двух табличных интегралов.

Пример 1. Найти интегралы $I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$.

Решение: Так как $4x^2 + 2x + 1 = 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right)$, то

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4((x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16})}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x + \frac{1}{4} = t$, $x = t - \frac{1}{4}$, $dx = dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 3/16}} = \frac{1}{2} \ln\left|t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{16}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|x + \frac{1}{4} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}}\right| + C. \quad \bullet$$

Пример 2. Найти интеграл $I = \int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$

❍ Решение: Так как $6 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 6) = -((x+1)^2 - 7) = 7 - (x+1)^2$, то подстановка имеет вид $x + 1 = t$, $x = t - 1$, $dx = dt$. Тогда

$$I = \int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}} + 3\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (7-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(7-t^2) + 3\int \frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - t^2}} =$$

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, λ — также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной x.

Пример 3. Найти интеграл $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$.

❍ Решение:

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{1-2x-x^2} + \lambda \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \equiv A\cdot\sqrt{1-2x-x^2} + (Ax+B)\cdot\frac{-2-2x}{2\sqrt{1-2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2x-x^2}},$$

$$x^2 \equiv A(1-2x-x^2) + (Ax+B)(-1-x) + \lambda,$$
$$x^2 \equiv A - 2Ax - Ax^2 - Ax - B - Ax^2 - Bx + \lambda.$$

Сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 1 = -A - A & \text{при } x^2, \\ 0 = -2A - A - B & \text{при } x^1, \\ 0 = A - B + \lambda & \text{при } x^0. \end{cases}$$

Отсюда $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $\lambda = 2$. Следовательно,

$$I = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}} =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \quad ●$$

Дробно-линейная подстановка

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right) dx$, где a, b, c, d — действительные числа, $\alpha, \beta, \ldots, \delta$, γ — натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, \ldots, \frac{\delta}{\gamma}$

Действительно, из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ следует, что $x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$ и $dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k-a)-(b-dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k-a)^2} dt$, т. е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию от t.

Пример 4. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$.

❍ Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x + 2 = t^6$, $x = t^6 - 2$, $dx = 6t^5\,dt$, $t = \sqrt[6]{x+2}$.

Следовательно,

$$I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt =$$
$$= 6\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C =$$
$$= 3\cdot\sqrt[3]{x+2} + 6\cdot\sqrt[6]{x+2} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2} - 1\right| + C. \quad \bullet$$

Пример 5. Указать подстановку для нахождения интегралов:

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}\,dx, \quad I_2 = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(1-x)^2}.$$

❍ Решение: Для I_1 подстановка $x = t^2$, для I_2 подстановка $\frac{x+1}{x-1} = t^3$.

●

Тригонометрическая подстановка

Интегралы типа

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2})dx, \quad \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2})dx, \quad \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2})dx$$

приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих *тригонометрических подстановок:* $x = a \cdot \sin t$ для первого интеграла; $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ для второго интеграла; $x = \dfrac{a}{\sin t}$ для третьего интеграла.

Пример 6. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

◕ Решение: Положим $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$

$$= C - \arcsin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\left(\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right).$$ ●

Интегралы типа $\int R(x; \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Здесь подынтегральная функция есть рациональная функция относительно x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Выделив под радикалом полный квадрат и сделав подстановку $x + \frac{b}{2a} = t$, интегралы указанного типа приводятся к интегралам уже рассмотренного типа, т. е. к интегралам типа $\int R(t; \sqrt{a^2-t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{a^2+t^2})\,dt$, $\int R(t; \sqrt{t^2-a^2})\,dt$. Эти интегралы можно вычислить с помощью соответствующих тригонометрических подстановок.

Пример 7. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^3}\,dx$.

◯ Решение: Так как $x^2+2x-4 = (x+1)^2-5$, то $x+1=t$, $x=t-1$, $dx = dt$. Поэтому $I = \int \frac{\sqrt{t^2-5}}{t^3}\,dt$. Положим $t = \frac{\sqrt{5}}{\sin z}$, $dt = \frac{-\sqrt{5}\cdot\cos z}{\sin^2 z}\,dz$, $z = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{\frac{5}{\sin^2 z}-5}}{\frac{5\sqrt{5}}{\sin^3 z}}\cdot\frac{(-\sqrt{5})\cos z}{\sin^2 z}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{5}}\int\cos^2 z\,dz =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)\,dz = -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{t}\right)\right)+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}\right)\right)+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{10}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{x+1}+\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2x-4}}{(x+1)^2}\right)+C.$$ ●

Замечание: Интеграл типа $\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ целесообразно находить с помощью подстановки $x=\frac{1}{t}$.

«БЕРУЩИЕСЯ» И «НЕБЕРУЩИЕСЯ» ИНТЕГРАЛЫ

Как уже отмечалось выше, операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Не всегда выбранный путь интегрирования является наилучшим, более коротким, простым. Интегрирование часто может быть выполнено не единственным способом. Многое зависит от знания рекомендуемых многих искусственных приемов интегрирования, от сообразительности, от тренированности. Например, $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ можно найти, не используя рекомендуемую подстановку $\operatorname{tg} x = t$, а применив искусственный прием:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\cos^6 x}\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$$

Вряд ли стоит вычислять интеграл

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)}\, dx,$$

разлагая подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x^2 + 2x + 1)} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Заметив, что числитель $3x^2+4x+1$ является производной знаменателя $x(x^2+2x+1)=x^3+2x^2+x$, легко получить:

$$\int \frac{3x^2+4x+1}{x(x^2+2x+1)}\,dx = \int \frac{d(x^3+2x^2+x)}{x^3+2x^2+x} = \ln|x^3+2x^2+x| + C.$$

На практике при вычислении неопределенных интегралов используют различные справочники, содержащие таблицы особенно часто встречающихся интегралов. В частности, «Таблицы неопределенных интегралов» М. Л. Смолянского.

Изученные методы интегрирования позволяют во многих случаях вычислить неопределенный интеграл, т. е. найти первообразную функцию для подынтегральной функции.

Как известно, *всякая непрерывная функция имеет первообразную.* В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции $f(x)$ является также элементарной функцией, говорят, что $\int f(x)\,dx$ «*берется*», т. е. интеграл выражается через элементарные функции (или интеграл вычисляется). Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «*не берется*» (или «его найти нельзя»).

Так, например, нельзя взять интеграл $\int \sqrt{x} \cdot \cos x\, dx$, так как не существует элементарной функции, производная от которой была бы равна $\sqrt{x}\cos x$. Приведем еще примеры «неберущихся» интегралов, которые имеют большое значение в приложениях:

$\int e^{-x^2}\, dx$ — интеграл Пуассона (теория вероятностей),

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм (теория чисел),

$\int \cos x^2\, dx$, $\int \sin x^2\, dx$ — интегралы Френеля (физика),

$\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$ — интегральные синус и косинус,

$\int \frac{e^x}{x}\, dx$ — интегральная показательная функция.

Первообразные от функции e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\frac{1}{\ln x}$ и других хорошо изучены, для них составлены подробные таблицы значений для различных значений аргумента x.

Задания для самостоятельного решения

1. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. *Отв.* $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$

2. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. *Отв.* $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C.$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. *Отв.* $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. *Отв.* $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

5. $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. *Отв.* $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C.$

6. $\int \sin^3 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

7. $\int \sin^5 x\,dx$. *Отв.* $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$

8. $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C.$

9. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. *Отв.* $\operatorname{cosec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C$.

10. $\int \cos^2 x\,dx$. *Отв.* $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

11. $\int \sin^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

12. $\int \cos^6 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{16}\left(5x + 4\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} + \frac{3}{4}\sin 4x\right) + C$.

13. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. *Отв.* $\frac{3}{5}\cos^{5/3} x + 3\cos^{-1/3} x + C$.

14. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. *Отв.* $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.

15. $\int \sec^8 x\,dx$. *Отв.* $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3\operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$.

16. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$. *Отв.* $\frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C$.

17. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$. *Отв.* $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C$.