

Уравнение сферы



# Определение сферы

- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии ( $R$ ) от данной точки (центра т.О).

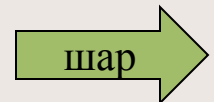
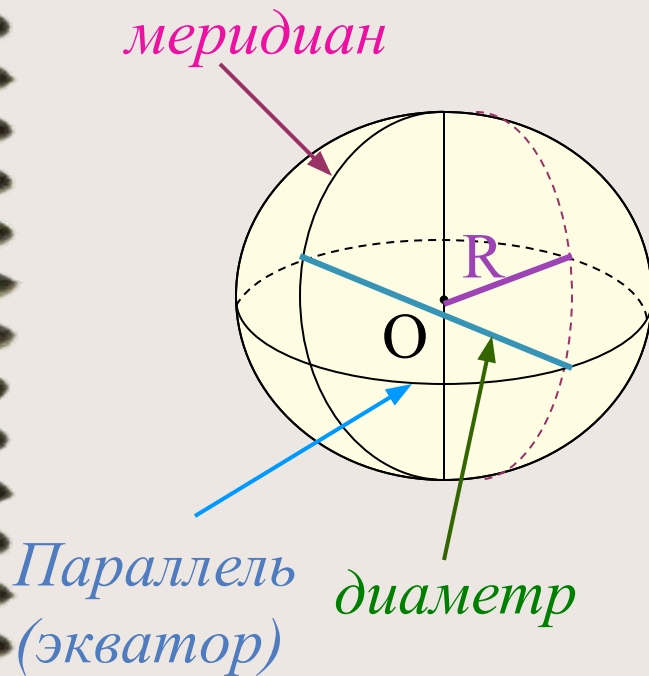
□ Сфера – тело полученное в результате вращения полуокружности вокруг её диаметра.

□  $R$  – радиус сферы – отрезок, соединяющий любую точку сферы с центром.

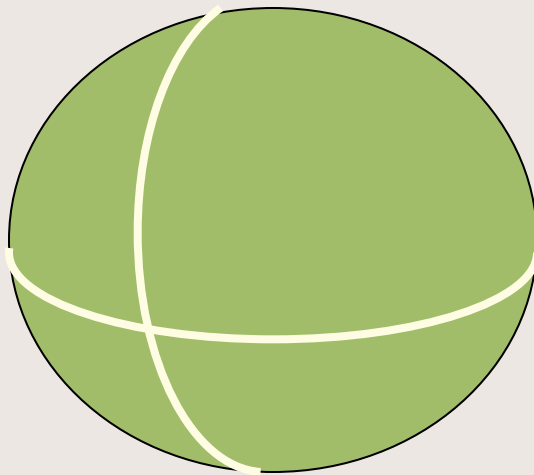
□ т. О – центр сферы

□  $D$  – диаметр сферы – отрезок, соединяющий любые 2 точки сферы и проходящий через центр.

□  $D = 2R$



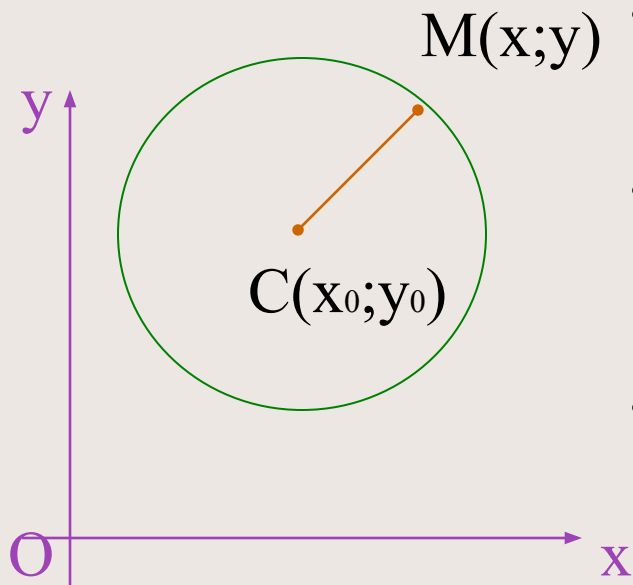
# Шар



- Тело, ограниченное сферой, называется шаром.
- Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.
- Шар радиуса  $R$  и центром  $O$  содержит все точки пространства, которые расположены от  $t. O$  на расстоянии, не превышающем  $R$ .



# Уравнение окружности



- Зададим прямоугольную систему координат  $Oxy$
- Построим окружность с центром в т.  $C$  и радиусом  $r$

- Расстояние от произвольной т.  $M(x; y)$  до т.  $C$  вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$MC = r, \text{ или } MC^2 = r^2$$

следовательно уравнение  
окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

## Задача 1.

Зная координаты центра  $C(2;-3;0)$ , и радиус сферы  $R=5$ , записать уравнение сферы.

- Решение

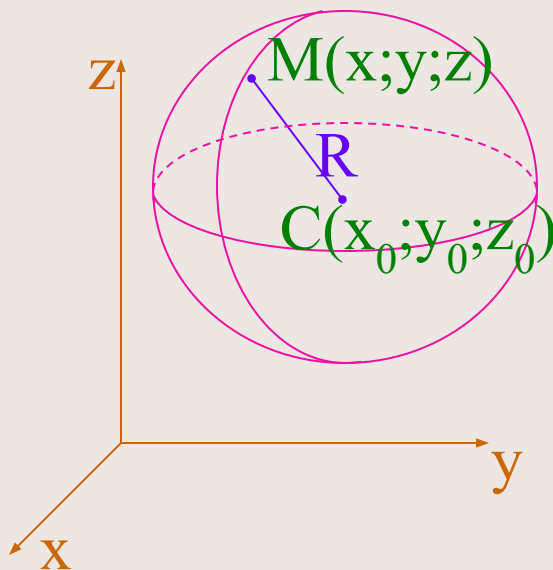
так, как уравнение сферы с радиусом  $R$  и центром в точке  $C(x_0; y_0; z_0)$  имеет вид  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ , а координаты центра данной сферы  $C(2;-3;0)$  и радиус  $R=5$ , то уравнение данной сферы  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

← Ответ:  $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

→ ур.  
сферы

# Уравнение сферы

- Зададим прямоугольную систему координат  $Oxyz$
- Построим сферу с центром в т.  $C$  и радиусом  $R$



$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

- $MC = R$ , или  $MC^2 = R^2$

следовательно уравнение

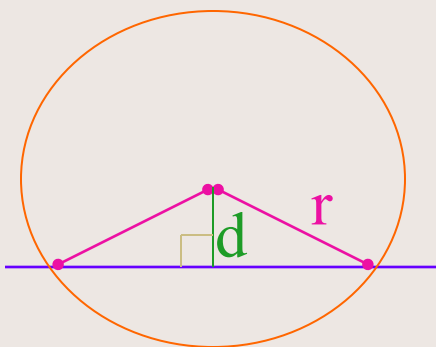
сферы имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

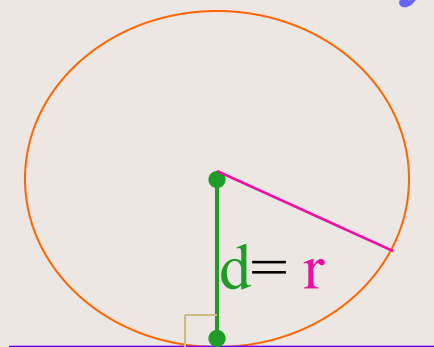


# Взаимное расположение окружности и прямой

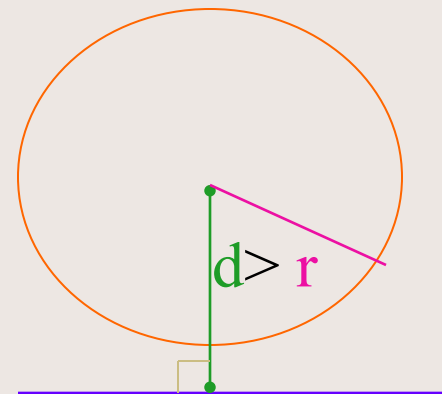
Возможны 3 случая



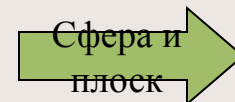
Если  $d < r$ , то  
прямая и  
окружность  
имеют 2 общие  
точки.



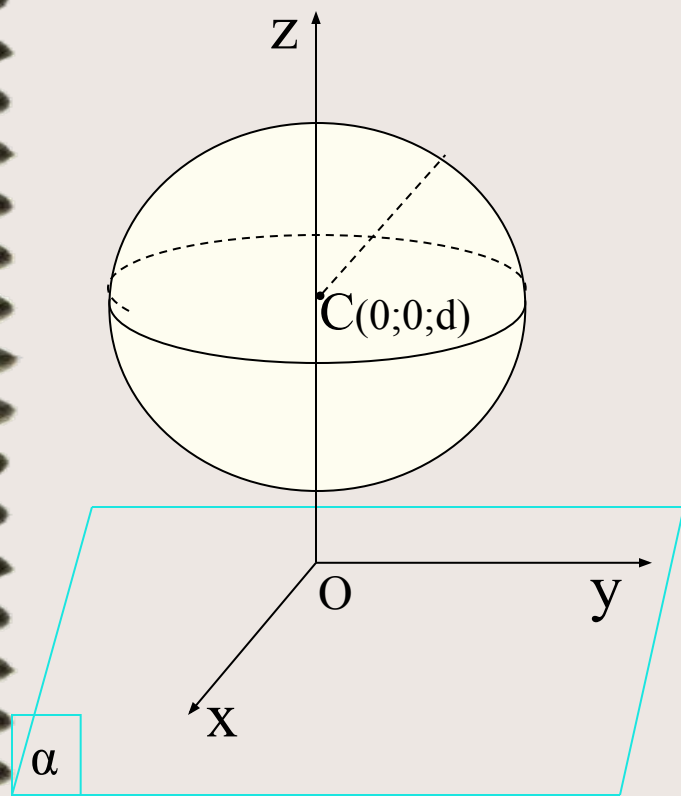
Если  $d = r$ , то  
прямая и  
окружность  
имеют 1 общую  
точку.



Если  $d > r$ , то  
прямая и  
окружность не  
имеют общих  
точек.



# Взаимное расположение сферы и плоскости

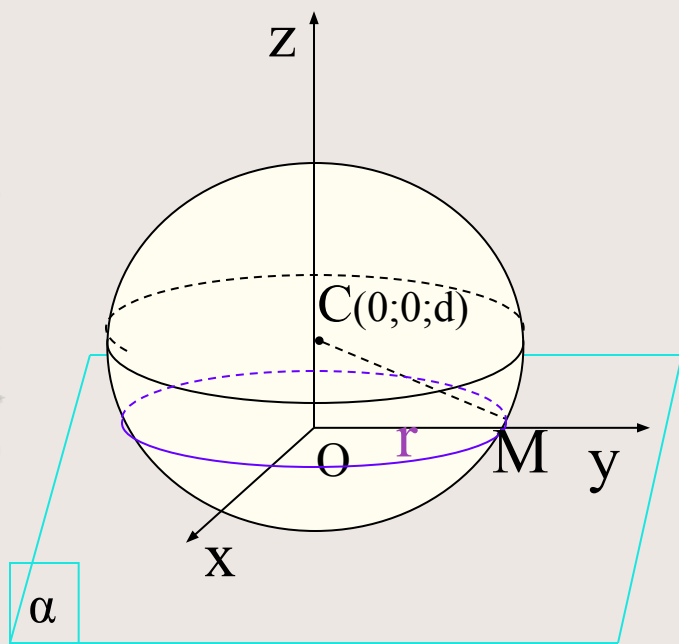


- Введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$
- Построим плоскость  $\alpha$ , совпадающую с плоскостью  $Oxy$
- Изобразим сферу с центром в т.С, лежащей на положительной полуоси  $Oz$  и имеющей координаты  $(0;0;d)$ , где  $d$  - расстояние (перпендикуляр) от центра сферы до плоскости  $\alpha$ .
- В зависимости от соотношения  $d$  и  $R$  возможны 3 случая...





# Взаимное расположение сферы и плоскости



- Рассмотрим 1 случай
- $d < R$ , т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность радиусом  $r$ .

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

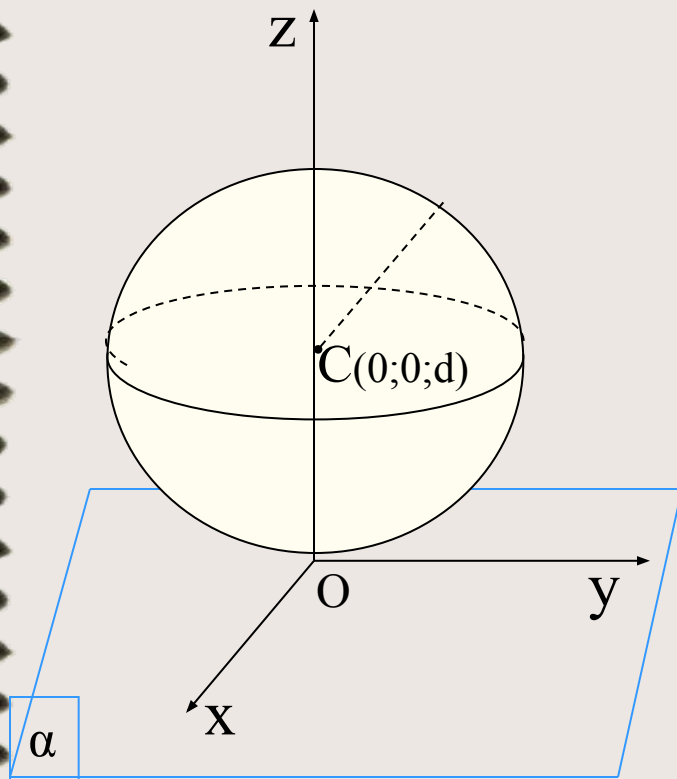
- Сечение шара плоскостью есть круг.
- С приближением секущей плоскости к центру шара радиус круга увеличивается. Плоскость, проходящая через диаметр шара, называется **диаметральной**. Круг, полученный в результате сечения, называется **большим кругом**.



# Взаимное расположение сферы и плоскости

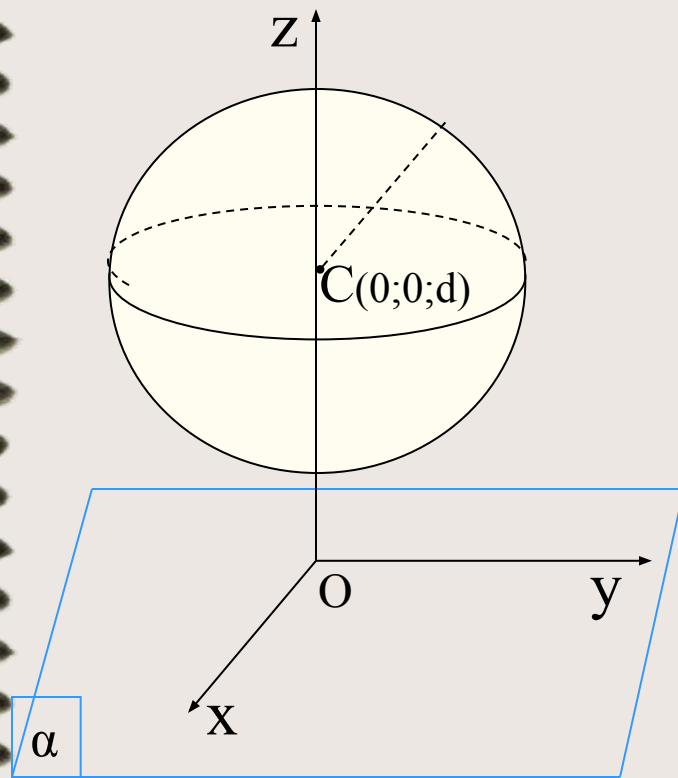
Рассмотрим 2 случай

- $d = R$ , т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют одну общую точку



# Взаимное расположение сферы и плоскости

- Рассмотрим 3 случая

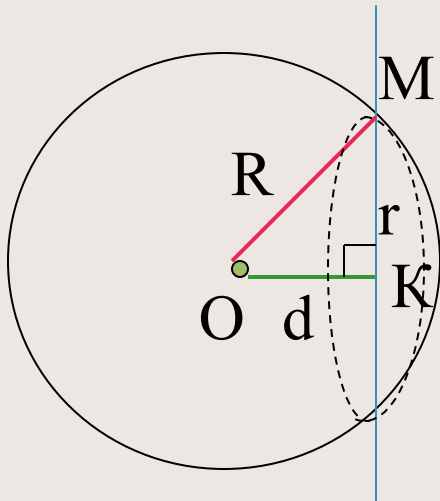


- $d > R$ , т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.



## Задача 2.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



**Дано:**

Шар с центром в т.О

$R=41$  дм

$\alpha$  - секущая плоскость

$d = 9$  дм

**Найти:**  $r_{\text{сеч}} = ?$

**Решение:**

Рассмотрим  $\triangle OMK$  – прямоугольный

$OM = 41$  дм;  $OK = 9$  дм;  $MK = r$ ,  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

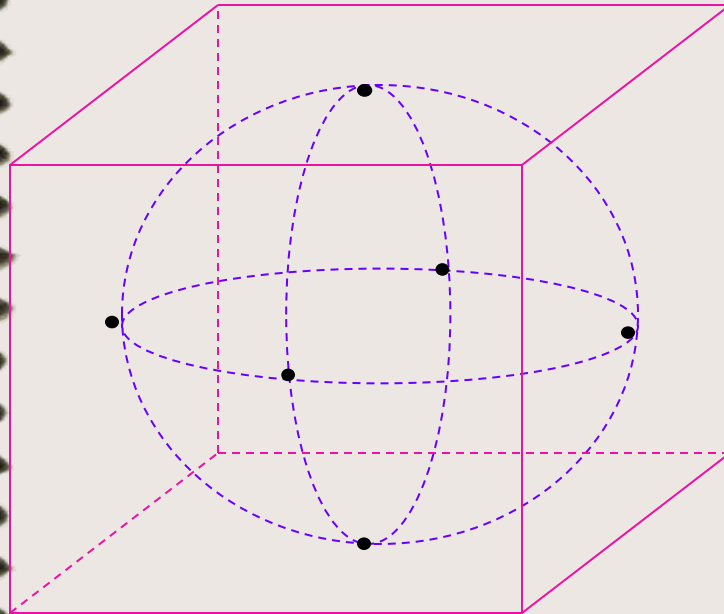
по теореме Пифагора:  $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$

отсюда  $r_{\text{сеч}} = 40$  дм

**Ответ:**  $r_{\text{сеч}} = 40$  дм

# Площадь сферы

- Сферу нельзя развернуть на плоскость.
- Опишем около сферы многогранник, так чтобы сфера касалась всех его граней.
- За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани



Площадь сферы радиуса  $R$ :

$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$$

т.е.: Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большего круга

$$\frac{S_{\text{шара}}}{S_{\text{круга}}} = 4$$

