

Уравнение сферы



Определение сферы

- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии (R) от данной точки (центра $t.O$).

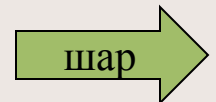
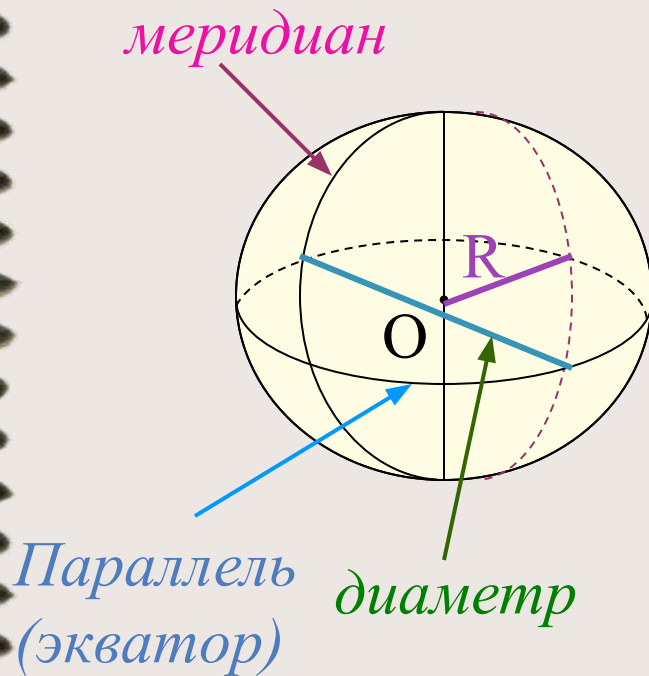
□ Сфера – тело полученное в результате вращения полуокружности вокруг её диаметра.

□ R – радиус сферы – отрезок, соединяющий любую точку сферы с центром.

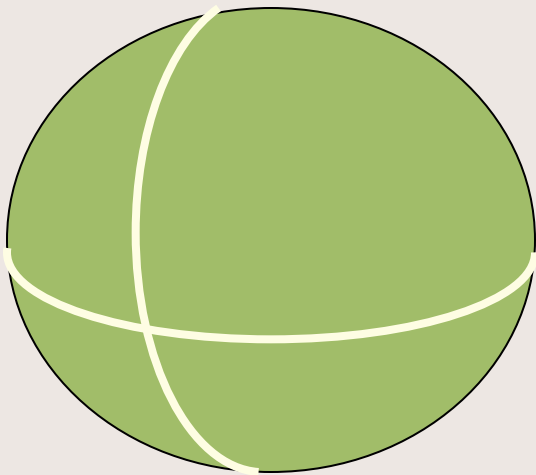
□ $t.O$ – центр сферы

□ D – диаметр сферы – отрезок, соединяющий любые 2 точки сферы и проходящий через центр.

□ $D = 2R$



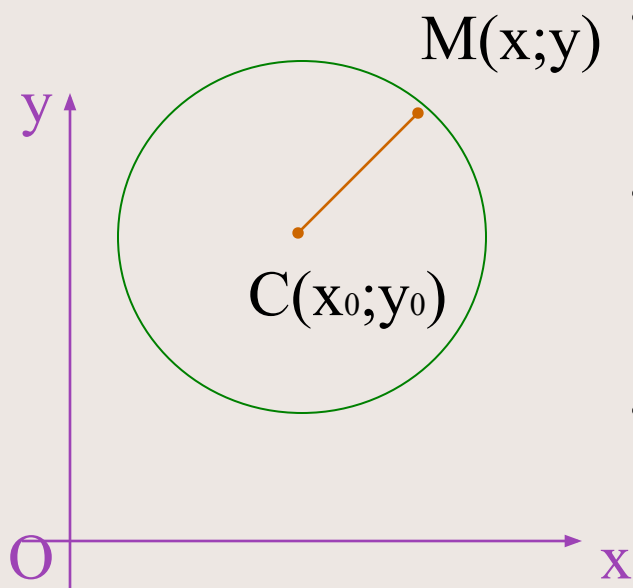
Шар



- Тело, ограниченное сферой, называется шаром.
- Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.
- Шар радиуса R и центром O содержит все точки пространства, которые расположены от $t. O$ на расстоянии, не превышающем R .



Уравнение окружности



- Зададим прямоугольную систему координат Oxy
- Построим окружность с центром в т. C и радиусом r

- Расстояние от произвольной т. $M(x; y)$ до т. C вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$MC = r, \text{ или } MC^2 = r^2$$

следовательно уравнение
окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Задача 1.

Зная координаты центра $C(2;-3;0)$, и радиус сферы $R=5$, записать уравнение сферы.

- Решение

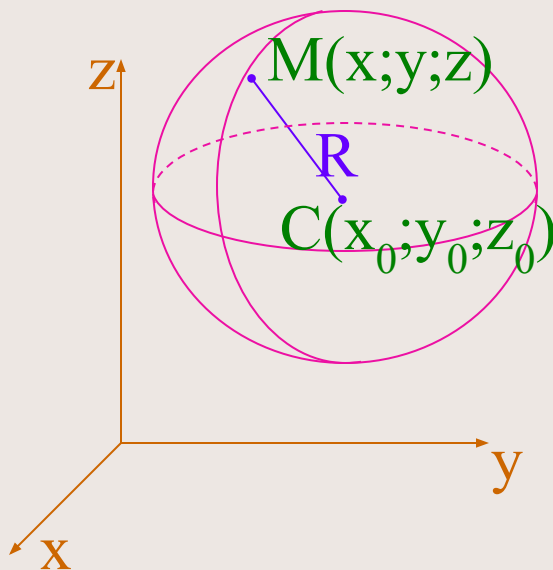
так, как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$, а координаты центра данной сферы $C(2;-3;0)$ и радиус $R=5$, то уравнение данной сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

← Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 25$

→ ур.
сферы

Уравнение сферы

- Зададим прямоугольную систему координат $Oxyz$
- Построим сферу с центром в т. C и радиусом R



$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

- $MC = R$, или $MC^2 = R^2$

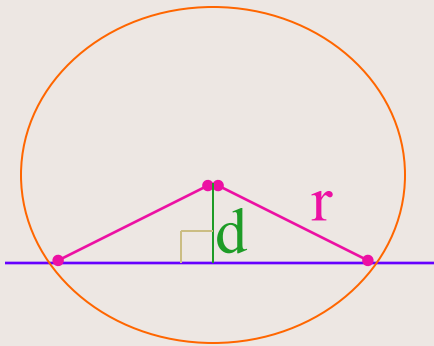
следовательно уравнение

сферы имеет вид:

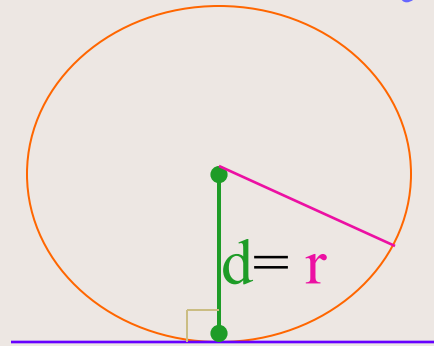
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Взаимное расположение окружности и прямой

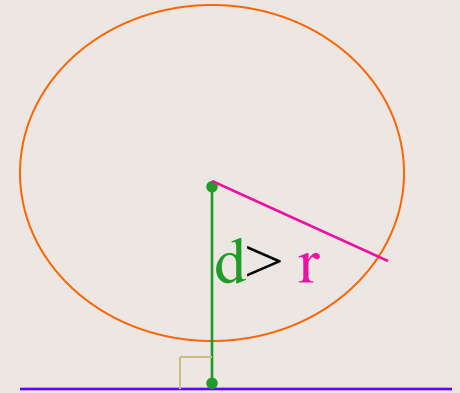
Возможны 3 случая



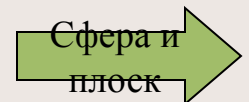
Если $d < r$, то
прямая и
окружность
имеют 2 общие
точки.



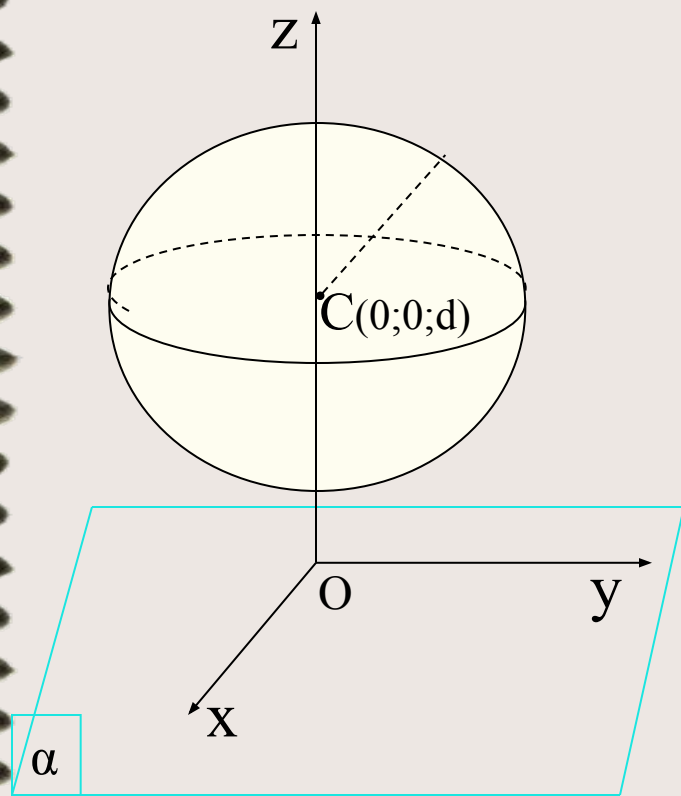
Если $d = r$, то
прямая и
окружность
имеют 1 общую
точку.



Если $d > r$, то
прямая и
окружность не
имеют общих
точек.



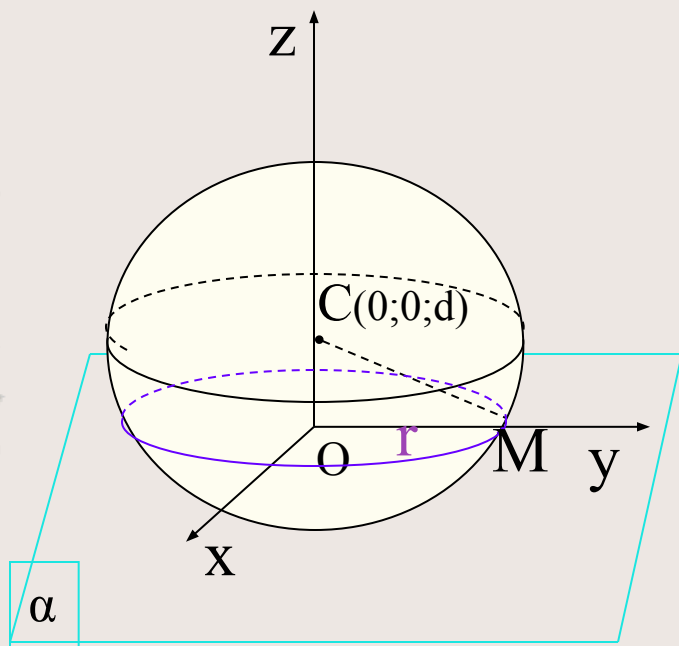
Взаимное расположение сферы и плоскости



- Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$
- Построим плоскость α , совпадающую с плоскостью Oxy
- Изобразим сферу с центром в т.С, лежащей на положительной полуоси Oz и имеющей координаты $(0;0;d)$, где d - расстояние (перпендикуляр) от центра сферы до плоскости α .
- В зависимости от соотношения d и R возможны 3 случая...



Взаимное расположение сферы и плоскости



- Рассмотрим 1 случай
- $d < R$, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность радиусом r .

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

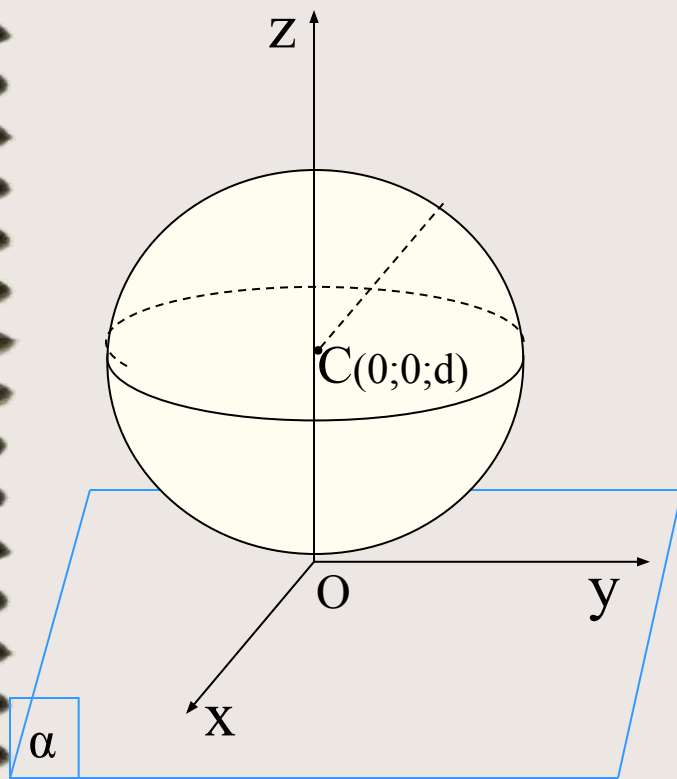
- Сечение шара плоскостью есть круг.
- С приближением секущей плоскости к центру шара радиус круга увеличивается. Плоскость, проходящая через диаметр шара, называется **диаметральной**. Круг, полученный в результате сечения, называется **большим кругом**.



Взаимное расположение сферы и плоскости

Рассмотрим 2 случай

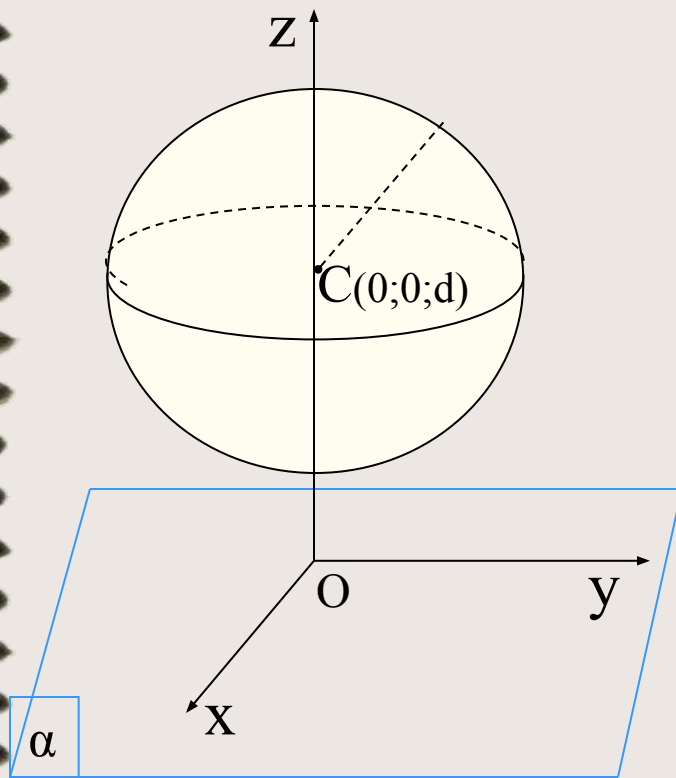
- $d = R$, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют одну общую точку



Взаимное расположение сферы и плоскости

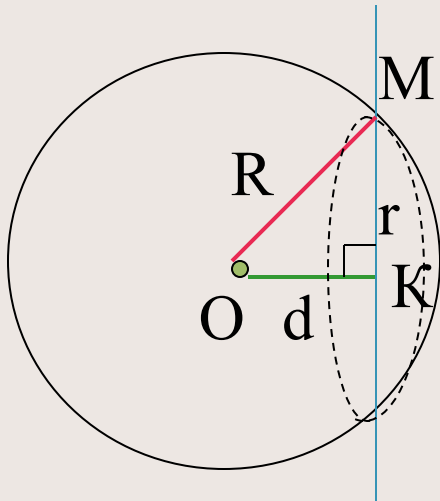
- Рассмотрим 3 случая

- $d > R$, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.



Задача 2.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:

Шар с центром в т.О

$R=41$ дм

α - секущая плоскость

$d = 9$ дм

Найти: $r_{\text{сеч}} = ?$

Решение:

Рассмотрим $\triangle OMK$ – прямоугольный

$OM = 41$ дм; $OK = 9$ дм; $MK = r$, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

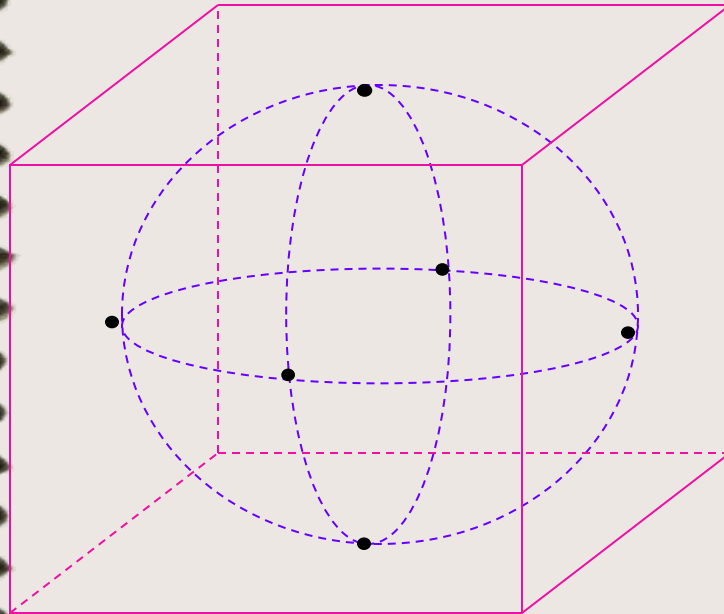
по теореме Пифагора: $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$

отсюда $r_{\text{сеч}} = 40$ дм

Ответ: $r_{\text{сеч}} = 40$ дм

Площадь сферы

- Сферу нельзя развернуть на плоскость.
- Опишем около сферы многогранник, так чтобы сфера касалась всех его граней.
- За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани



Площадь сферы радиуса R :

$$S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$$

т.е.: Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большего круга

$$\frac{S_{\text{шара}}}{S_{\text{круга}}} = 4$$

