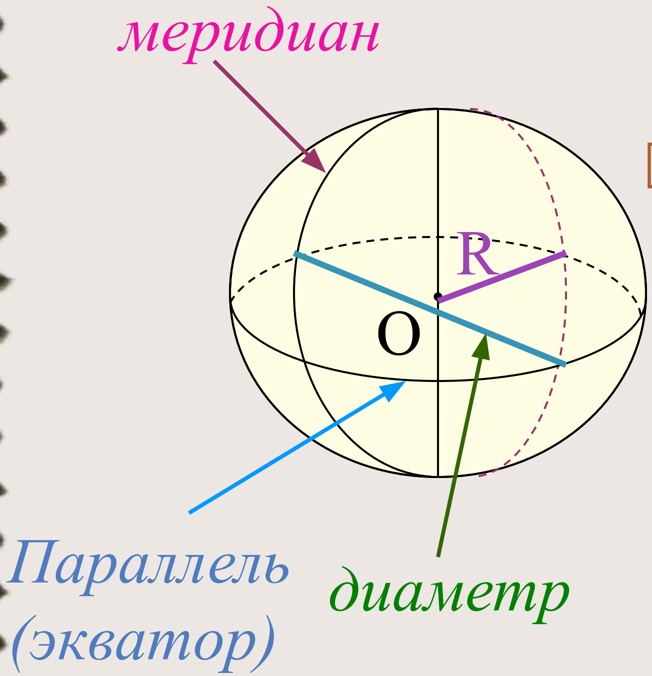
Уравнение сферы

Определение сферы

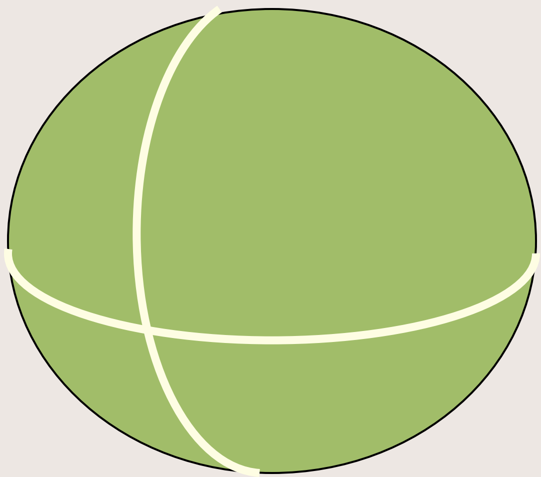
- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии (R) от данной точки (центра т.О).



- Сфера – тело полученное в результате вращения полуокружности вокруг её диаметра.
- R – радиус сферы – отрезок, соединяющий любую точку сферы с центром.
- т. О – центр сферы
- D – диаметр сферы – отрезок, соединяющий любые 2 точки сферы и проходящий через центр.
- D = 2R

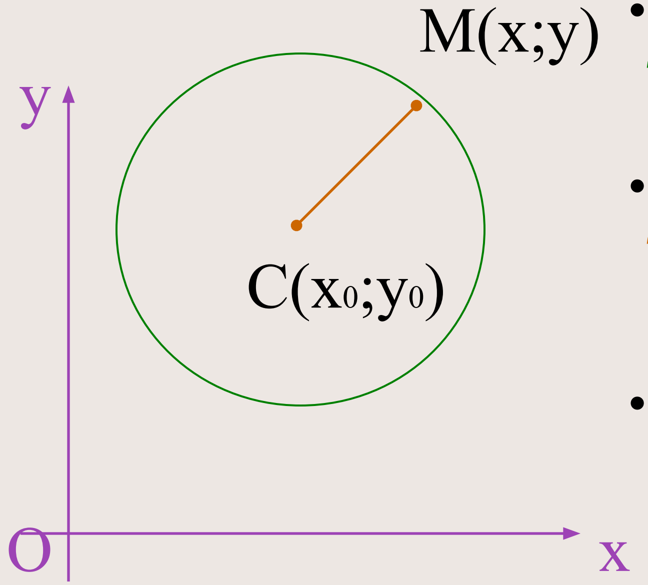
шар

Шар



- Тело, ограниченное сферой, называется шаром.
- Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.
- Шар радиуса R и центром O содержит все точки пространства, которые расположены от т. O на расстоянии, не превышающем R.

Уравнение окружности



- Зададим прямоугольную систему координат *Oxy*
- Построим окружность с центром в т. С и радиусом r
- Расстояние от произвольной т. М (x;y) до т.С вычисляется по формуле:
- $MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$MC = r$, или $MC^2 = r^2$

следовательно уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Задача 1.

Зная координаты центра C(2;-3;0), и радиус сферы R=5, записать уравнение сферы.

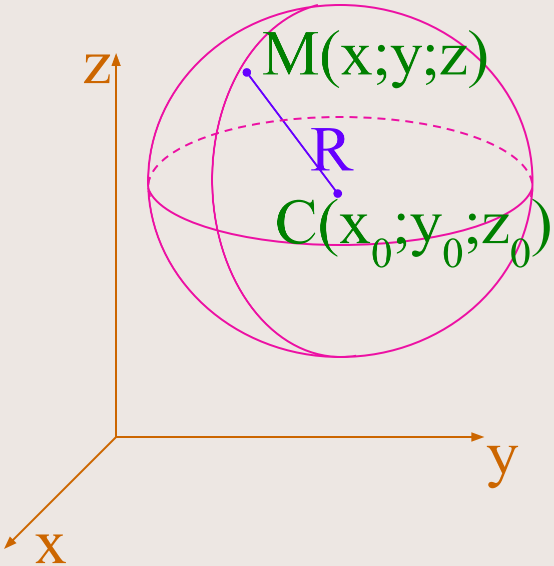
- Решение

так, как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2=R^2$, а координаты центра данной сферы C(2;-3;0) и радиус R=5, то уравнение данной сферы
$(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

ур. сферы

Уравнение сферы



- Зададим прямоугольную систему координат *Oxyz*

- Построим сферу с центром в т. C и радиусом R

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

- $MC = R$, или $MC^2 = R^2$

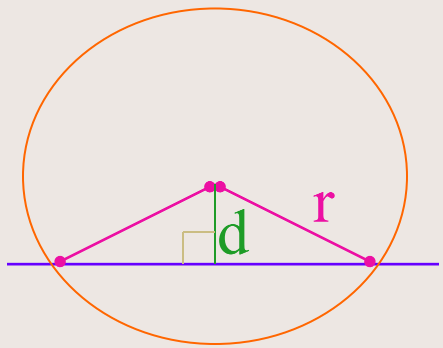
следовательно уравнение

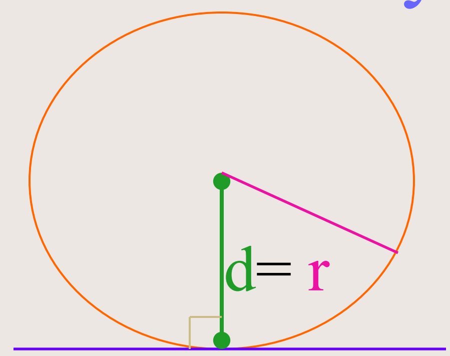
сферы имеет вид:

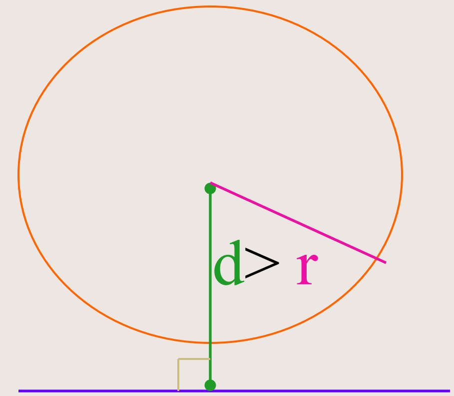
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Взаимное расположение окружности и прямой

Возможны 3 случая







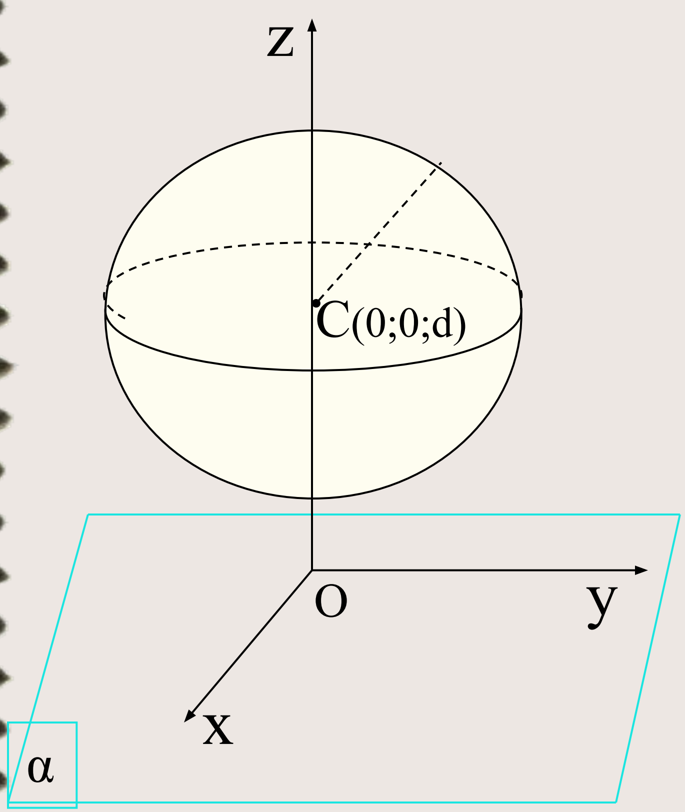
Если d < r, то прямая и окружность имеют 2 общие точки.

Если d = r, то прямая и окружность имеют 1 общую точку.

Если d > r, то прямая и окружность не имеют общих точек.

Сфера и плоск

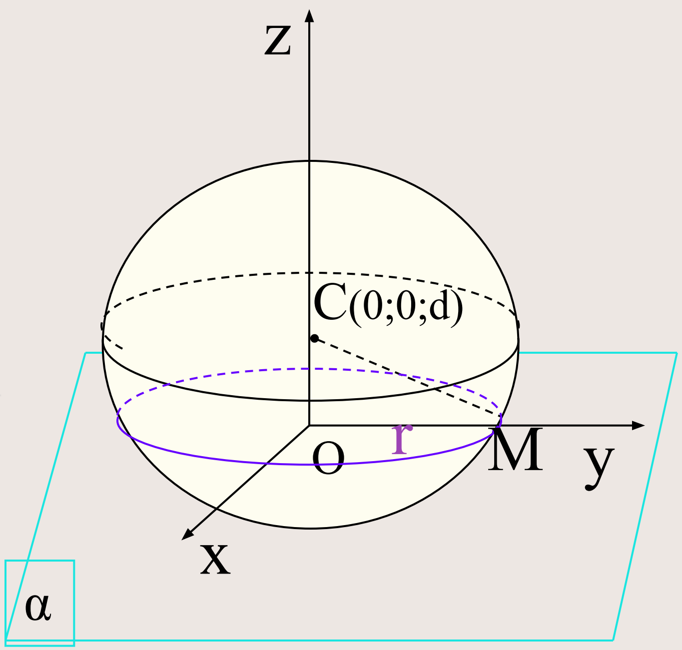
Взаимное расположение сферы и плоскости



- Введем прямоугольную систему координат Oxyz
- Построим плоскость α, сов-падающую с плоскостью Oxy
- Изобразим сферу с центром в т.С, лежащей на положительной полуоси Oz и имеющей координаты (0;0;d), где d - расстояние (перпендикуляр) от центра сферы до плоскости α .

- В зависимости от соотношения d и R возможны 3 случая…

Взаимное расположение сферы и плоскости



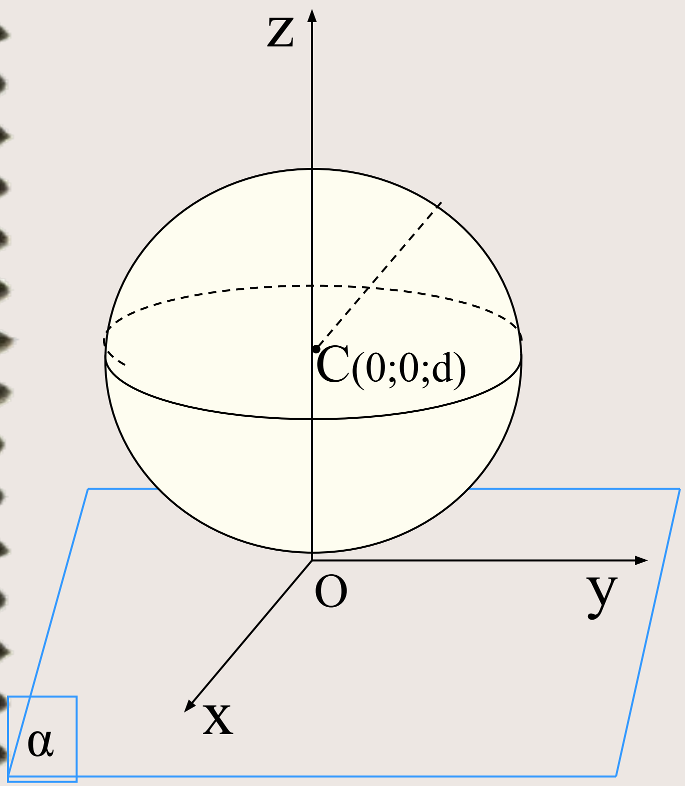
- Рассмотрим 1 случай
- d < R, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность радиусом r.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

- Сечение шара плоскостью есть круг.

- С приближением секущей плоскости к центру шара радиус круга увеличивается. Плоскость, проходящая через диаметр шара, называется **диаметральной**. Круг, полученный в результате сечения, называется **большим кругом.**

Взаимное расположение сферы и плоскости

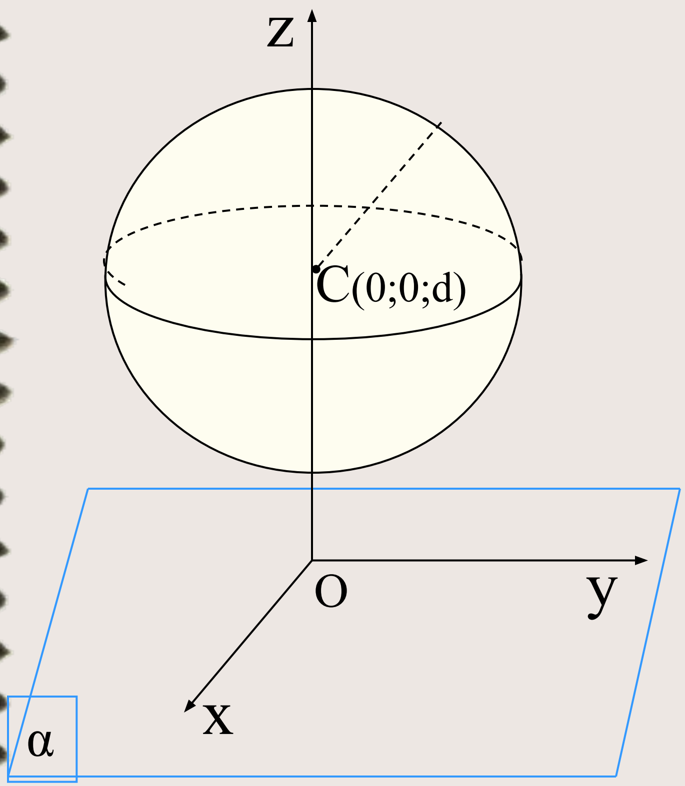


Рассмотрим 2 случай

- d = R, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, то сфера и плоскость имеют одну общую точку

Взаимное расположение сферы и плоскости

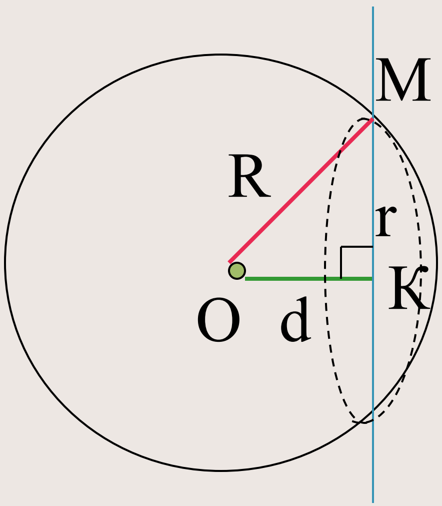
- Рассмотрим 3 случай



- d > R, т.е. если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Задача 2.

Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:

Шар с центром в т.О

R=41 дм

α - секущая плоскость

d = 9 дм

Найти: $r_{сеч} = ?$

Решение:

Рассмотрим ΔОМК – прямоугольный

ОМ = 41 дм; ОК = 9 дм; МК = r, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

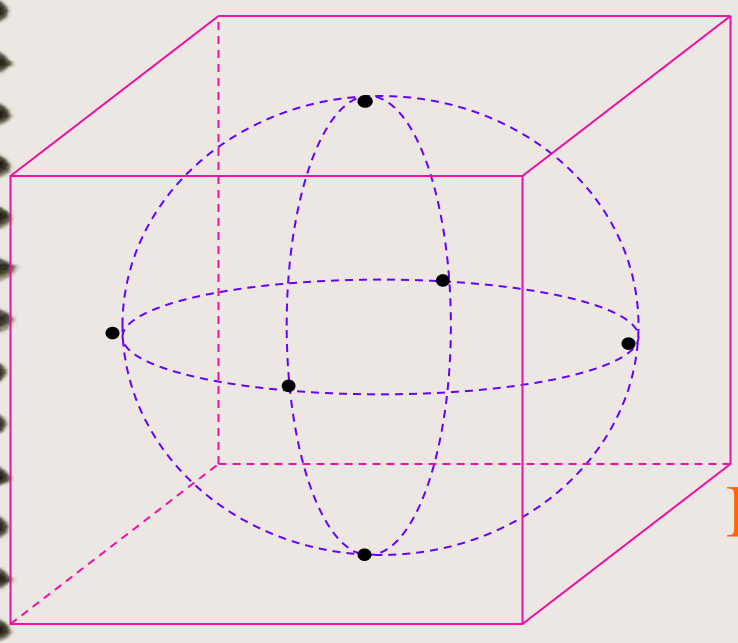
по теореме Пифагора: $МК^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$

отсюда $r_{сеч} = 40$ дм

Ответ: $r_{сеч} = 40$ дм

Площадь сферы

- Сферу нельзя развернуть на плоскость.
- Опишем около сферы многогранник, так чтобы сфера касалась всех его граней.
- За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани



Площадь сферы радиуса R:

$$S_{сф}=4\pi R^2$$

т.е.: Площадь поверхности шара равна учетверенной площади большего круга

$$S_{шара}=4S_{круга}$$