Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) 2 порядка с постоянными коэффициентами

Проверка ДЗ

$$y'' = 36x + 12$$

$$\mathrm{y}' = 18\mathrm{x}^2 + 12\mathrm{x} + \mathrm{C}_1$$

$$y = 6x^3 + 6x^2 + C_1x + C_2$$

Проверка ДЗ

$$y'' = \cos x$$

$$\mathrm{y}' = \sin \mathrm{x} + \mathrm{C}_1$$

$$y = -\cos x + C_1 x + C_2$$

Проверка ДЗ

$$y' - y = e^x$$

$$y = U \cdot V \quad y' = U'V + V'U$$

$$U'V + V'U - U \cdot V = e^x$$

$$U'V + U(V' - V) = e^x \quad (***)$$

$$V' - V = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{V} = dx$$

$$\ln V = x$$

$$V = e^x$$

$$U' \cdot e^x = e^x \quad (***)$$

$$U' = 1$$

$$U = x + C$$

$$y = (x + C) \cdot e^x$$

Решите квадратные уравнения

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4;1$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$D = 36 - 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

ЛОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид:

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + g \cdot y = f(x)}$$

***y* – искомая функция; *p*, *g* – постоянные величины**

Если f(x)=0, то уравнение называется линейным однородным (мы будем рассматривать данный вид уравнения).

Если f (x) не равно 0, то уравнение называется линейным неоднородным.

ЛОДУ 2 порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + g \cdot y = 0$$

Алгоритм:

1) Заменяем $y = e^{kx}$ ***k*** **- некоторое число**

2) Находим производные $y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$

3) Подставляем в уравнение

$$\underbrace{k^2 \cdot e^{kx}}_{y''} + p \cdot \underbrace{k \cdot e^{kx}}_{y'} + g \cdot \underbrace{e^{kx}}_{y} = 0$$

4) Приводим уравнение к виду

$$k^2 + p \cdot k + g = 0$$

<u>характеристическое уравнение</u>

5) Решаем квадратное уравнение, находим k_1 и k_2

корни характеристического уравнения

Если $k_1 \neq k_2$ ***(действительные числа),***

то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

Если $k_1 = k_2 = k$ ***(действительные числа)***

то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}}$$

Если $k_1 = \alpha + i \cdot \beta;$ $k_2 = \alpha - i \cdot \beta$ ***(комплексные числа)***

то общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}$$

Пример 1: Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

(Заменяем)

$$y = e^{kx} \qquad y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} - 5 \cdot k \cdot e^{kx} + 4 \cdot e^{kx} = 0$$

(Подставляем в уравнение)

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

(Решаем квадратное уравнение)

$$D = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4;1$$

$$k_1 = 4$$

$$k_2 = 1$$

(Подставляем в общий вид решения, в зависимости от К)

$$k_1 \neq k_2 \qquad \boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}}$$

Пример 2: Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

(Заменяем)

$$y = e^{kx} \qquad y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} - 6 \cdot k \cdot e^{kx} + 9 \cdot e^{kx} = 0$$

(Подставляем в уравнение)

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

(Решаем квадратное уравнение)

$$D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$k_1 = k_2 = k = 3$$

(Подставляем в общий вид решения, в зависимости от К)

$$k_1 = k_2 = k$$

$$\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}}$$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot x \cdot e^{3x}}$$

Пример 3: Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

(Заменяем)

$$y = e^{kx} \qquad y' = k \cdot e^{kx} \qquad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

$$k^2 \cdot e^{kx} - 2 \cdot k \cdot e^{kx} + 2 \cdot e^{kx} = 0$$ **(Подставляем в уравнение)**

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$ **(Решаем квадратное уравнение)**

$$D = 4 - 8 = -4 \qquad \sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i \qquad k_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$k_1 = 1 + i$$

$$k_2 = 1 - i$$

(Подставляем в общий вид решения, в зависимости от К)

$$k_1 = \alpha + i \cdot \beta; \qquad k_2 = \alpha - i \cdot \beta$$

$$\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 1$$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} \cdot \cos x + C_2 e^{x} \cdot \sin x}$$

Домашнее задание

Решите уравнения:

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$ Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$ Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}$

3. $y'' - 6y' + 13y = 0$ Ответ:

$$y = C_1 e^{3x} \cdot \cos 2x + C_2 e^{3x} \cdot \sin 2x$$

$$\alpha = 3$$

$$\beta = 2$$