



***ТЕМА УРОКА:***

**«Плоская система  
сходящихся сил.  
Определение  
равнодействующей  
аналитическим способом»**

# Проекция силы на ось

- Проекция силы на ось определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора (рис. 3.1).

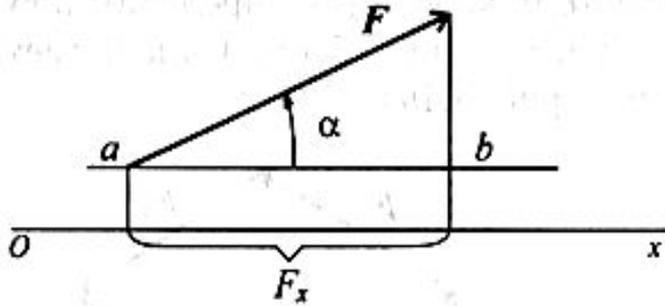
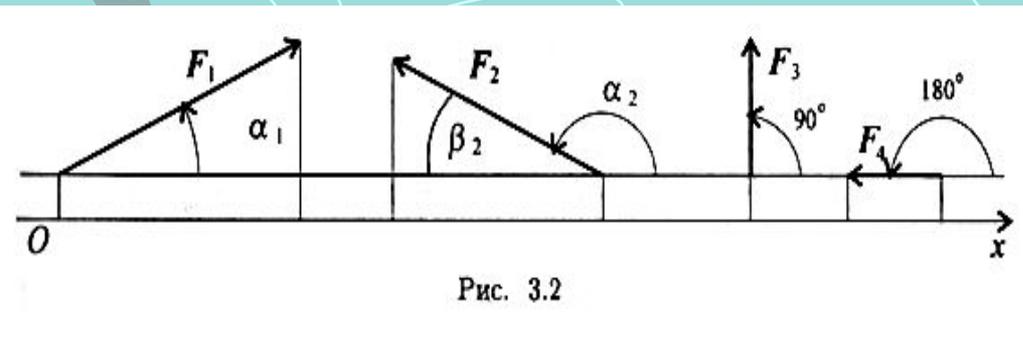


Рис. 3.1

$$F_x = F \cos \alpha.$$



$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 > 0; F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \beta_2;$$

$$\cos \alpha_2 = \cos (180^\circ - \beta_2) = -\cos \beta_2$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0; F_{4x} = F_4 \cos 180^\circ = -F_4.$$

- Величина проекции силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и **положительным направлением** оси. Таким образом, проекция имеет знак: **положительный** при одинаковом направлении вектора силы и оси и **отрицательный** при направлении в сторону **отрицательной полуоси** (рис. 3.2).

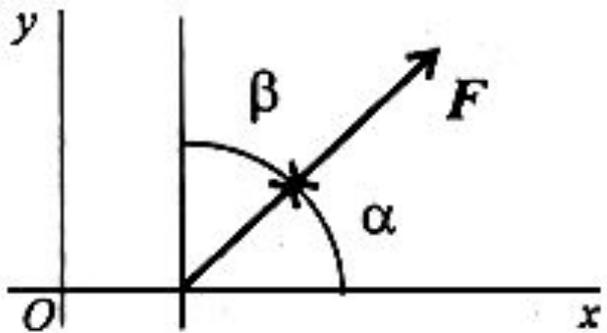


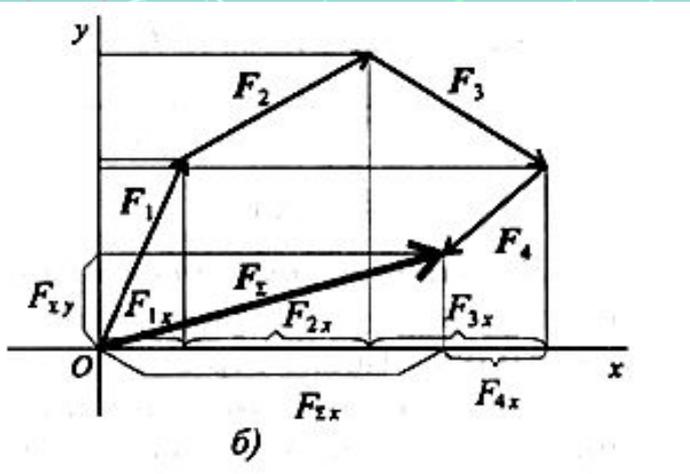
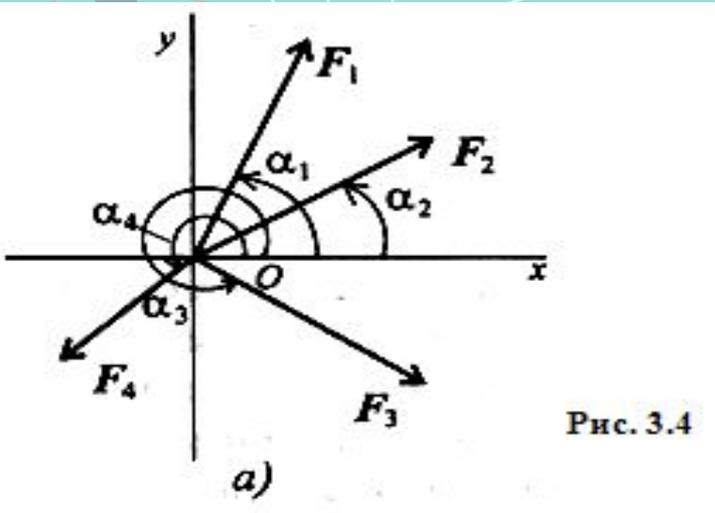
Рис. 3.3

- Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси (рис. 3.3).

$$F_x = F \cos \alpha > 0;$$

$$F_y = F \cos \beta = F \sin \alpha > 0.$$

# Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом



- Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом.
- Выберем систему координат, определим пропорции всех заданных векторов на эти оси (рис. 3.4, а).
- Складываем проекции всех векторов на оси  $x$  и  $y$  (рис. 3.4, б).

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \quad F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y};$$

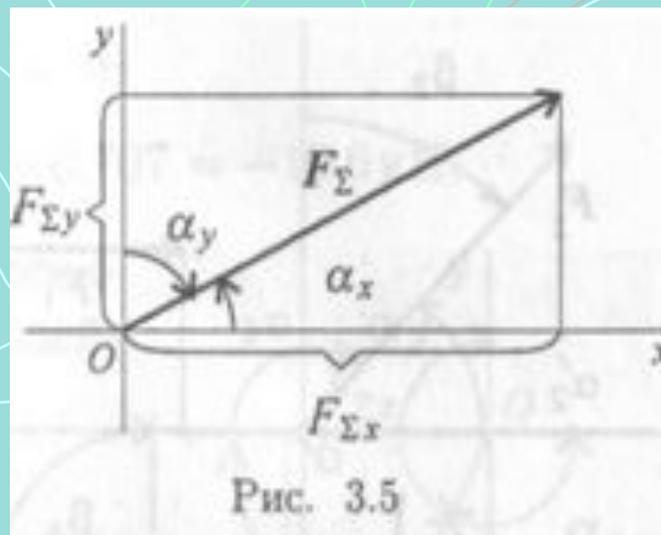
$$F_{\Sigma x} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum_0^n F_{ky}.$$

- Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}.$$

- Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 3.5).

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}};$$
$$\cos \alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}.$$

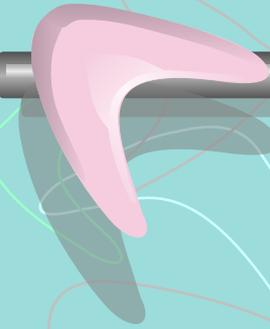


## Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

- Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \Rightarrow \begin{aligned} F_{\Sigma x} &= \sum F_{kx} = 0; \\ F_{\Sigma y} &= \sum F_{ky} = 0. \end{aligned}$$

$F_{\Sigma} = 0.$



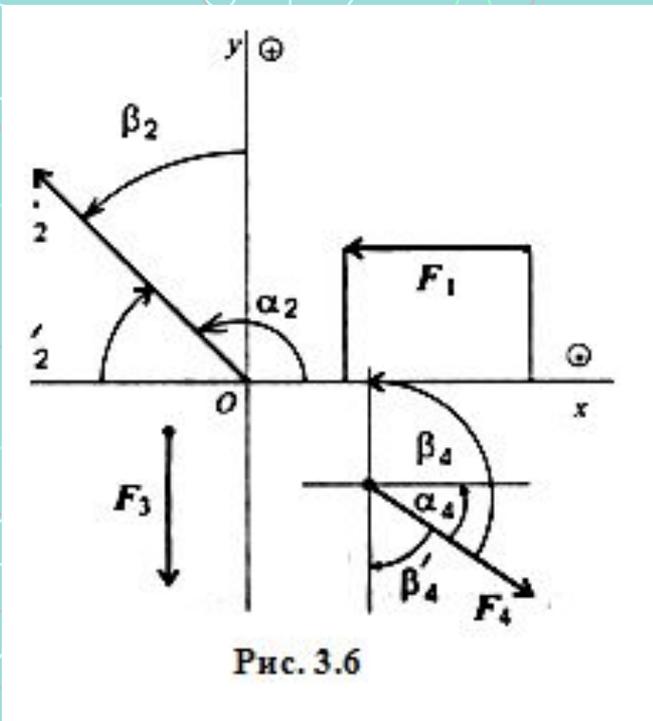
*Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.*

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=0}^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

# Пример 1. Определить величины и знаки проекций представленных на рис. 3.6 сил.



*Решение/*

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1; \quad F_{1x} = -F_1 \cos 0^\circ < 0;$$

$$F_{1y} = F_1 \cos \beta_1; \quad F_{1y} = F_1 \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \alpha'_2;$$

$$\alpha'_2 = 180^\circ - \alpha_2; \quad F_{2x} < 0;$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \beta_2 > 0;$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{3y} = F_3 \cos \beta_3 = F_3 \cos 180^\circ;$$

$$F_{3y} = -F_3 < 0;$$

$$F_{4x} = F_4 \cos \alpha_4 > 0;$$

$$F_{4y} = F_4 \cos \beta_4 = -F_4 \cos \beta'_4;$$

$$F_{4y} < 0.$$

**Пример 2.** Определить величину и направление равнодействующей плоской системы сходящихся сил аналитическим способом.

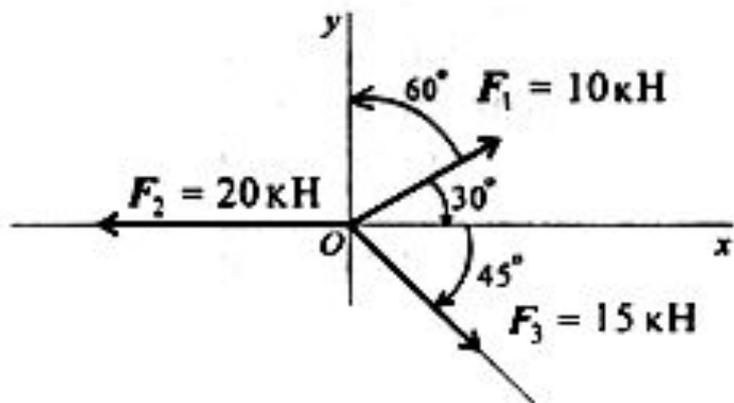


Рис. 3.7а

- 1. Определяем проекции всех сил системы на  $Ox$  (рис. 3.7, а):

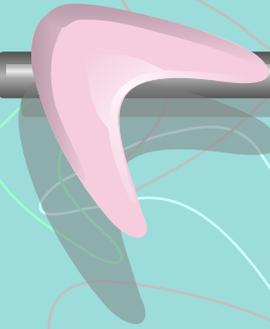
$$F_{1x} = 10 \cdot \cos 30^\circ;$$

$$F_{1x} = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$F_{2x} = 20 \cdot \cos 180^\circ = -20 \text{ кН};$$

$$F_{3x} = 15 \cdot \cos 45^\circ;$$

$$F_{3x} = 15 \cdot 0,707 = 10,6 \text{ кН}.$$

- 
- Сложив алгебраически проекции, получим проекцию равнодействующей на ось  $Ox$ .

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$$F_{\Sigma x} = 8,66 - 20 + 10,6 = - 0,735 \text{ кН}$$

Знак говорит о том, что равнодействующая направлен влево.

2. Определяем проекции всех сил на ось  $Oy$  значения проекций, получим величину проекции  $Oy$ .

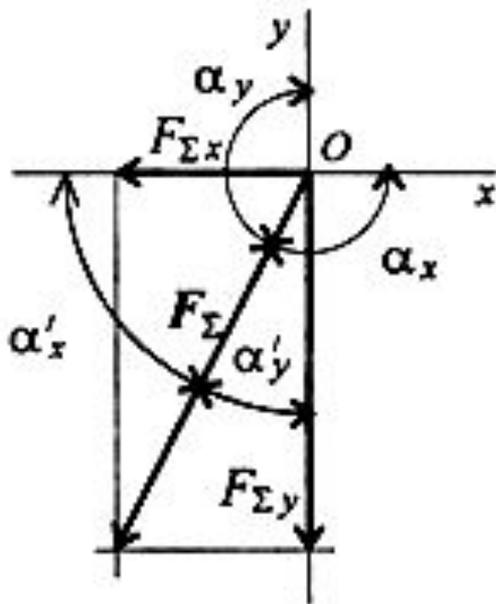


Рис. 3.76

$$F_{1y} = 10 \cdot \cos 60^\circ; \quad F_{1y} = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$F_{2y} = 20 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{3y} = 15 \cdot \cos 135^\circ; \quad F_{3y} = -15 \cdot 0,707 = -10,6 \text{ кН}.$$

- Сложив алгебраически значения проекций, получим величину проекции равнодействующей на ось  $Oy$ .

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$

$$F_{\Sigma y} = 5 - 10,6 \text{ кН} = -5,6 \text{ кН}.$$

- Знак проекции соответствует направлению вниз. Следовательно, равнодействующая направлена влево и вниз (рис. 3.76).

3. Определяем модуль равнодействующей по величинам проекций:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2};$$

$$F_{\Sigma} = \sqrt{0,735^2 + 5,6^2} = 5,65 \text{ кН.}$$

4. Определяем значение угла равнодействующей с осью  $Ox$ :

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}}; \quad \cos \alpha_x = \frac{-0,735}{5,65} = -0,13; \quad \alpha'_x = 82^{\circ}30'$$

и значение угла с осью  $Oy$ :

$$\cos \alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}; \quad \cos \alpha_y = \frac{-5,6}{5,65} = -0,991; \quad \alpha'_y = 7^{\circ}30';$$

$$\alpha_x = 180^{\circ} - \alpha'_x = 97^{\circ}30'; \quad \alpha_y = 180^{\circ} - \alpha'_y = 172^{\circ}30'.$$

**Пример 3.** Система трех сил находится в равновесии.

Известны проекции двух сил системы на взаимно перпендикулярные оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$F_{1x} = 10 \text{ кН}; F_{2x} = 5 \text{ кН};$$

$$F_{1y} = -2 \text{ кН}; F_{2y} = 6 \text{ кН}.$$

Определить, чему равна и как направлена третья сила системы.

### ***Решение***

1. Из уравнений равновесия системы определяем:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; & F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0; & 10 + 5 + F_{3x} = 0; & F_{3x} = -15 \text{ кН}. \\ \sum F_{ky} = 0; & F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0; & -2 + 6 + F_{3y} = 0; & F_{3y} = -4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2. По полученным величинам проекций определяем модуль силы:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2}; \quad F_3 = \sqrt{15^2 + 4^2} = 15,52 \text{ кН.}$$

Направление вектора силы относительно оси  $Ox$  (рис. 3.8):

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{3x}}{F_3}; \quad \cos \alpha_x = -\frac{15}{15,52} = -0,966 \Rightarrow \alpha'_x = 14^\circ 50'.$$

Угол с осью  $Ox$  будет равен

$$\alpha_x = 180^\circ - \alpha'_x = 165^\circ 10'.$$

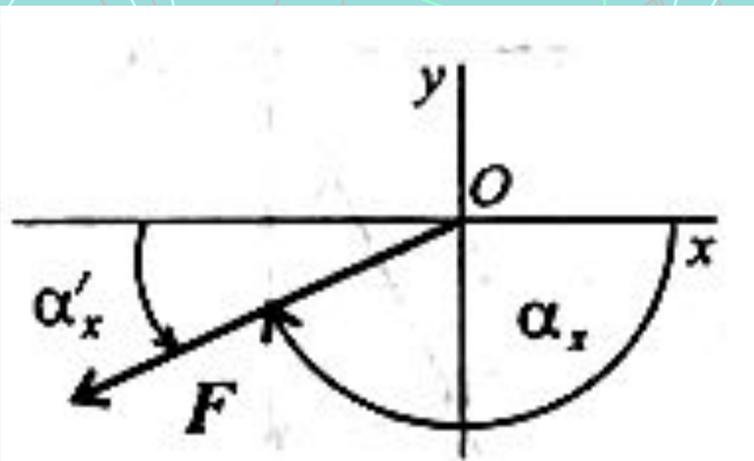


Рис. 3.8