ТЕМА УРОКА:

«Плоская система сходящихся сил. Определение равнодействующей аналитическим способом»

Проекция силы на ось

- Проекция силы на ось определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора (рис. 3.1).

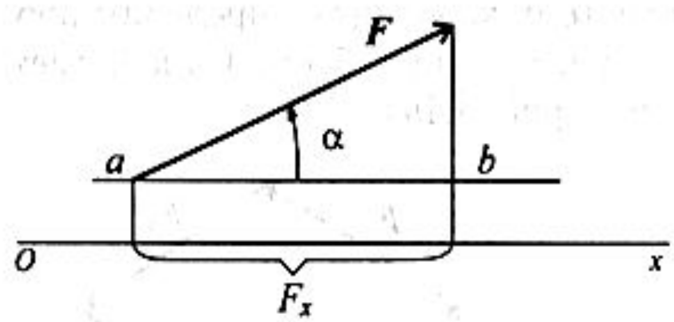


Рис. 3.1

$$\boxed{F_x = F\cos\alpha.}$$

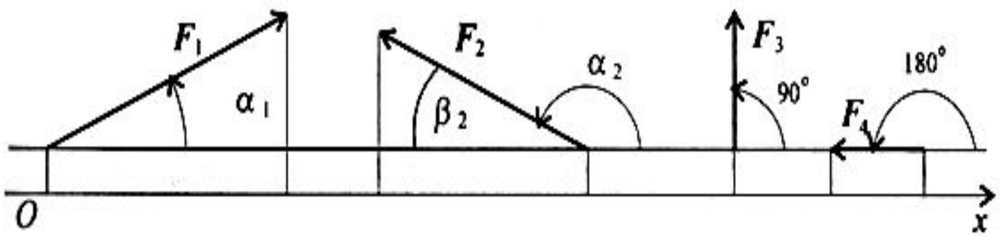


Рис. 3.2

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1 > 0;\ F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2 = -F_2 \cos\beta_2;$$
$$\cos\alpha_2 = \cos(180° — \beta_2) = — \cos\beta_2$$
$$F_{3x} = F_3 \cos 90° = 0;\quad F_{4x} = F_4 \cos 180° = -F_4.$$

- *Величина проекции силы на ось* равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и *положительным направлением* оси. Таким образом, проекция имеет знак: *положительный при одинаковом направлении* вектора силы и оси и *отрицательный* при направлении *в сторону отрицательной полуоси* (рис. 3.2).

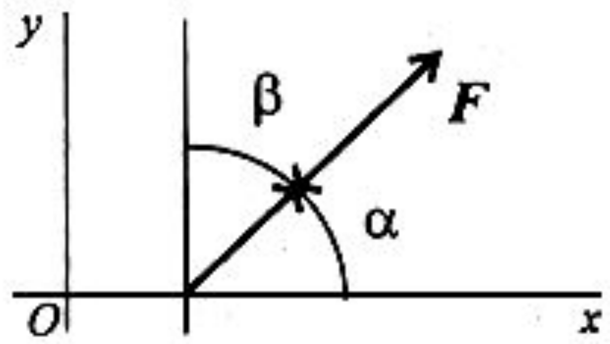


Рис. 3.3

$$F_x = F\cos\alpha > 0;$$

$$F_y = F\cos\beta = F\sin\alpha > 0.$$

- *Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси* (рис. 3.3).

Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом

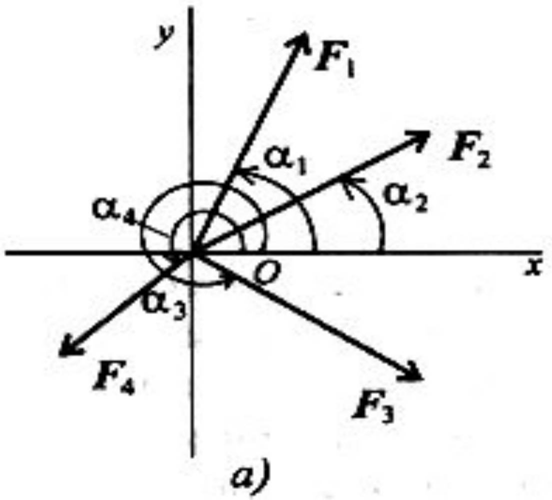
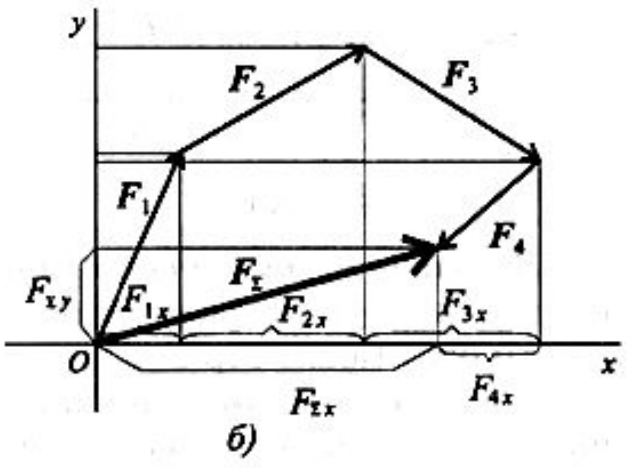


Рис. 3.4



- Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом.
- Выберем систему координат, определим пропорции всех заданных векторов на эти оси (рис. 3.4, а).
- Складываем проекции всех векторов на оси *x и y* (рис. 3.4, *б).*

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \quad F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y};$$

$$F_{\Sigma x} = \sum_{0}^{n} F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum_{0}^{n} F_{ky}.$$

- Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}.$$

- Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 3.5).

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}};$$

$$\cos \alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}.$$

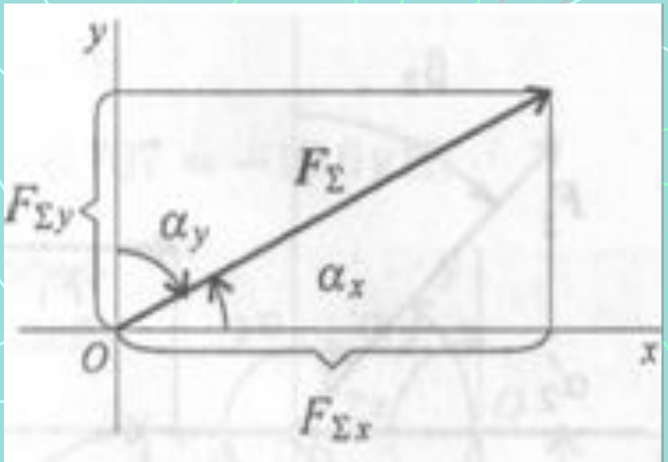


Рис. 3.5

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

- Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \Longrightarrow \begin{array}{l} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx} = 0; \\ F_{\Sigma y} = \sum F_{ky} = 0. \end{array}$$

$$F_\Sigma = 0.$$

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.

$$\begin{cases} \sum_{0}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum_{0}^{n} F_{ky} = 0. \end{cases}$$

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

Пример 1. Определить величины и знаки проекций представленных на рис. 3.6 сил.

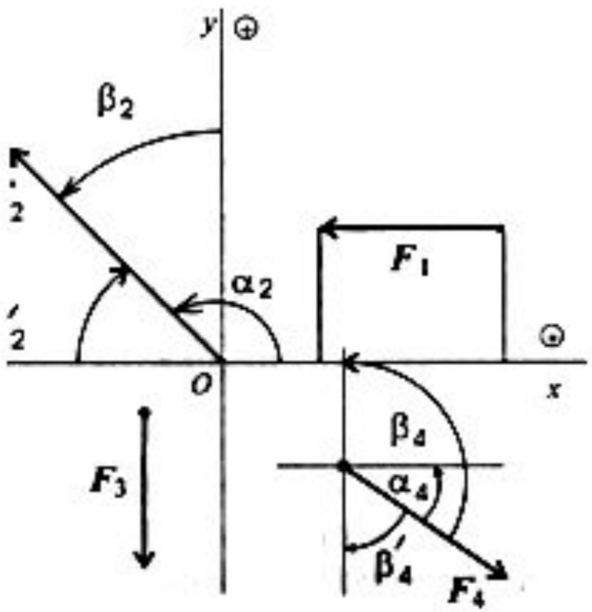


Рис. 3.6

Решение

$F_{1x} = F_1 \cos\alpha_1;\qquad F_{1x} = -F_1\cos 0^\circ < 0;$

$F_{1y} = F_1 \cos\beta_1;\qquad F_{1y} = F_1\cos 90^\circ = 0;$

$$F_{2x} = F_2\cos\alpha_2 = -F_2\cos\alpha_2';$$

$$\alpha_2' = 180^\circ - \alpha_2;\quad F_{2x} < 0;$$

$$F_{2y} = F_2\cos\beta_2 > 0;$$

$$F_{3x} = F_3\cos 90^\circ = 0;$$

$$F_{3y} = F_3\cos\beta_3 = F_3\cos 180^\circ;$$

$$F_{3y} = -F_3 < 0;$$

$$F_{4x} = F_4\cos\alpha_4 > 0;$$

$$F_{4y} = F_4\cos\beta_4 = -F_4\cos\beta_4';$$

$$F_{4y} < 0.$$

Пример 2. Определить величину и направление равнодействующей плоской системы сходящихся сил аналитическим способом.

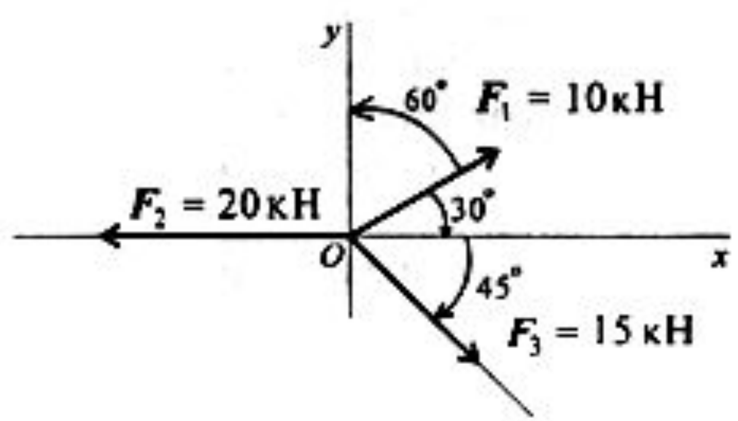


Рис. 3.7а

- 1. Определяем проекции всех сил системы на *Ox* (рис. 3.7, а):

$$F_{1x} = 10 \cdot \cos 30^\circ;$$
$$F_{1x} = 10 \cdot 0,866 = 8,66\,\text{кН};$$
$$F_{2x} = 20 \cdot \cos 180^\circ = -20\text{кН};$$
$$F_{3x} = 15 \cdot \cos 45^\circ;$$
$$F_{3x} = 15 \cdot 0,707 = 10,6\text{кН}.$$

- Сложив алгебраически проекции, получим проекцию равнодействующей на ось Ох.

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x};$$

$F_{\sum x}$ = 8,66 – 20 + 10,6 = - 0,735 кН

Знак говорит о том, что равнодействующая направлен влево.

2. Определяем проекции всех сил на ось *Oy* значения проекций, получим величину проекции *Oy*.

$$F_{1y} = 10 \cdot \cos 60°; \quad F_{1y} = 10 \cdot 0{,}5 = 5\,\text{кН};$$
$$F_{2y} = 20 \cdot \cos 90° = 0;$$
$$F_{3y} = 15 \cdot \cos 135°; \quad F_{3y} = -15 \cdot 0{,}707 = -10{,}6\,\text{кН}.$$

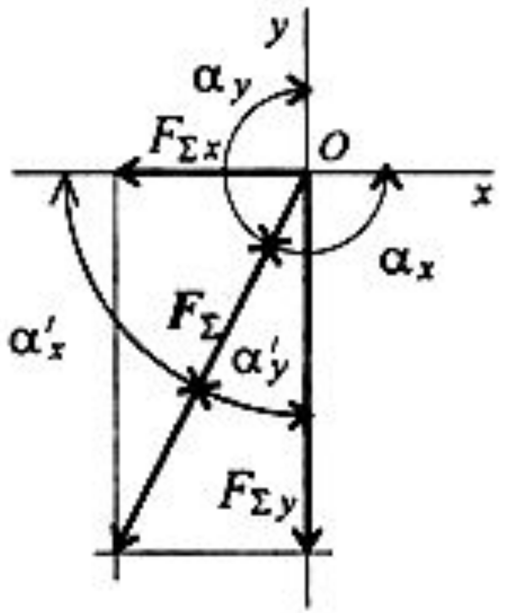


Рис. 3.7б

- Сложив алгебраически значения проекций, получим величину проекции равнодействующей на ось *Oy*.

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y};$$
$$F_{\Sigma y} = 5 - 10{,}6\,\text{кН} = -5{,}6\,\text{кН}.$$

- Знак проекции соответствует направлению вниз. Следовательно, равнодействующая направлена влево и вниз (рис. 3.7б).

3. Определяем модуль равнодействующей по величинам проекций:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2};$$

$$F_\Sigma = \sqrt{0{,}735^2 + 5{,}6^2} = 5{,}65\,\text{кН}.$$

4. Определяем значение угла равнодействующей с осью Ox:

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_x = \frac{-0{,}735}{5{,}65} = -0{,}13; \quad \alpha'_x = 82^\circ 30'$$

и значение угла с осью Oy:

$$\cos\alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_\Sigma}; \quad \cos\alpha_y = \frac{-5{,}6}{5{,}65} = -0{,}991; \quad \alpha'_y = 7^\circ 30';$$

$$\alpha_x = 180^\circ - \alpha'_x = 97^\circ 30'; \quad \alpha_y = 180^\circ - \alpha'_y = 172^\circ 30'.$$

Пример 3. Система трех сил находится в равновесии. Известны проекции двух сил системы на взаимно перпендикулярные оси *Ox* и *Oy:*

F_{lx} = 10 кН; F_{2x} = 5 кН;

F_{1y} = - 2 кН; F_{2y} = 6 кН.

Определить, чему равна и как направлена третья сила системы.

Решение

1. Из уравнений равновесия системы определяем:

$$\sum F_{kx} = 0;\quad F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0;\quad 10 + 5 + F_{3x} = 0;\quad F_{3x} = -15\,\text{кН}.$$

$$\sum F_{ky} = 0;\quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0;\quad -2 + 6 + F_{3y} = 0;\quad F_{3y} = -4\,\text{кН}.$$

2. По полученным величинам проекций определяем модуль силы:

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2}; \quad F_3 = \sqrt{15^2 + 4^2} = 15{,}52\ \text{кН}.$$

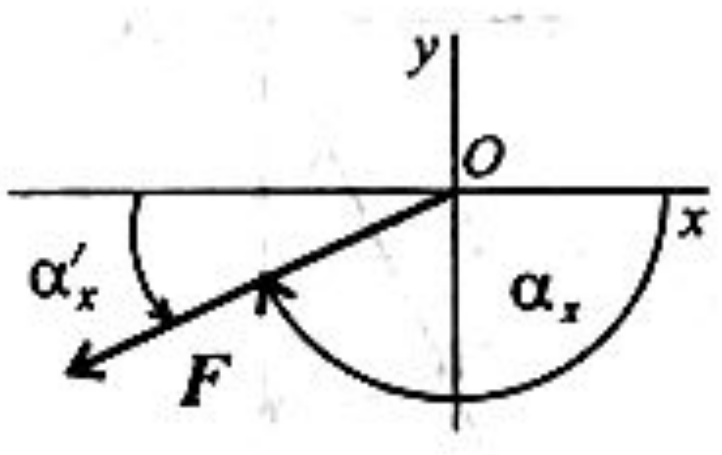


Рис. 3.8

Направление вектора силы относительно оси Ox (рис. 3.8):

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{3x}}{F_3}; \quad \cos\alpha_x = -\frac{15}{15{,}52} = -0{,}966 \Longrightarrow \alpha'_x = 14°50'.$$

Угол с осью Ox будет равен

$$\alpha_x = 180° - \alpha'_x = 165°10'.$$