Лекция 7

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

- Если твёрдое тело приводится во вращение какой-либо силой, то по закону сохранения и превращения энергии его кинетическая энергия вращательного движения увеличивается на величину затраченной работы, если отсутствуют силы трения и сопротивления среды: $dE_{\text{вр}} = dA$.

На рис. 1, *а* представлено тело, которое вращается под действием внешней силы $\vec{F}$, приложенной к его поверхности в точке B. Пусть сила $\vec{F}$ лежит в плоскости Q, перпендикулярной неподвижной оси вращения тела O_1O_2. Разложим эту силу в плоскости Q на две составляющие: нормальную $\vec{F_n}$ и тангенциальную $\vec{F_\tau}$. Нормальная составляющая силы $\vec{F_n}$ не совершает работы по вращению тела, поскольку она направлена вдоль радиуса-вектора $\vec{r}$ и перемещение точки B отсутствует в направлении этого вектора.

Тангенциальная составляющая силы $\vec{F_\tau}$ вращает точку B по окружности радиуса r в плоскости Q.

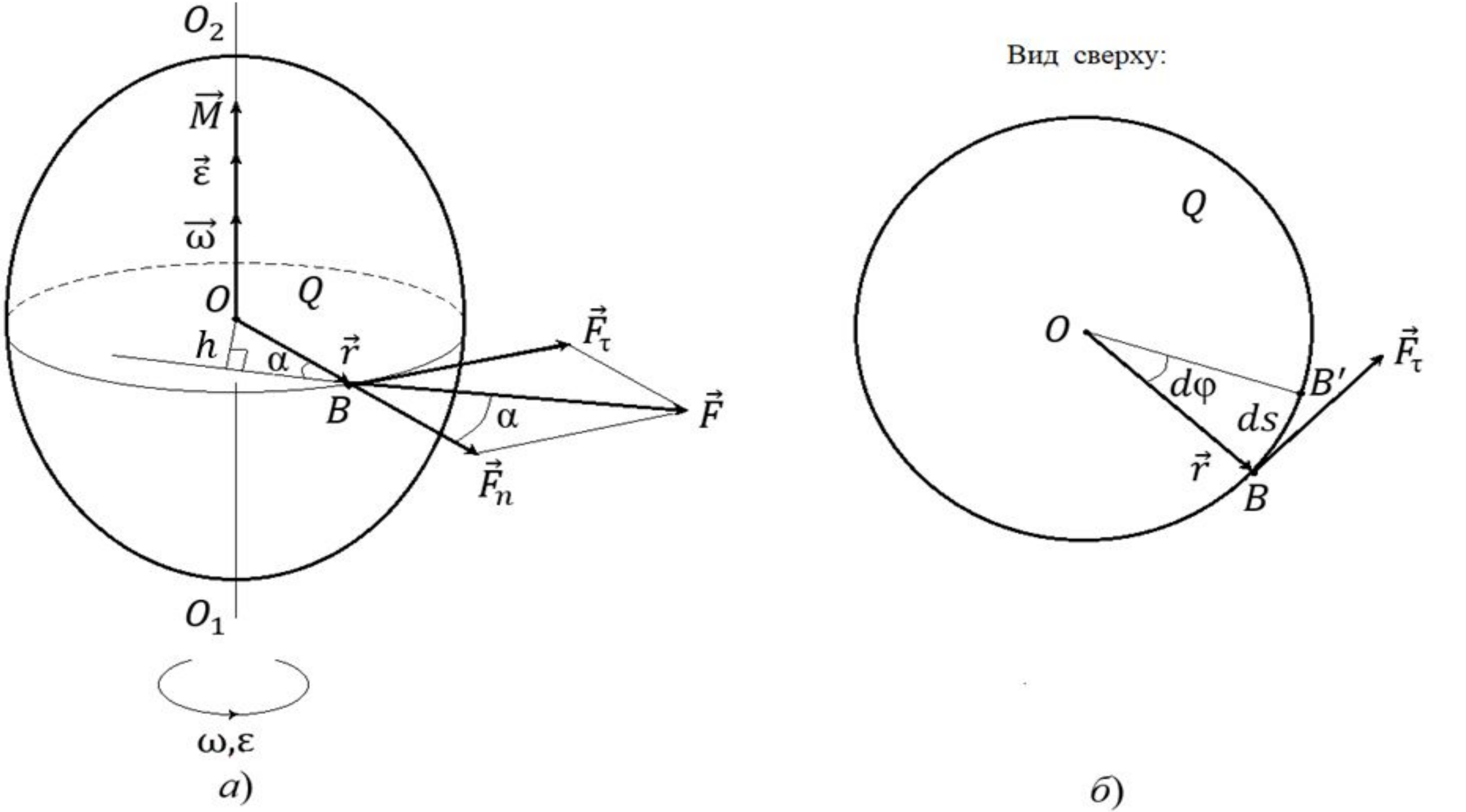
O_2
$\vec{M}$
$\vec{\varepsilon}$
$\vec{\omega}$
O
Q
h
α
$\vec{r}$
B
$\vec{F}_\tau$
$\vec{F}$
α
$\vec{F}_n$
O_1
ω,ε
а)
Вид сверху:
Q
O
$d\varphi$
B'
ds
$\vec{F}_\tau$
$\vec{r}$
B
б)

Рис. 1

- На рис. 1, *б* показан вид сверху вращающегося тела. За бесконечно малый промежуток времени dt точка B переместилась в положение B' и угол поворота тела составил $d\varphi$. Длина дуги BB' равна $ds = rd\varphi$. Тангенциальная составляющая силы совершила работу по вращению тела

$$dA = \left|\vec{F}_\tau\right| ds = \left|\vec{F}\right| \sin\alpha \cdot r d\varphi = Fr\sin\alpha d\varphi. \quad (1)$$

Модуль вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки O определяется как

$$M = \left|\vec{M}\right| = Fr\sin\alpha = F \cdot h\ , \quad (2)$$

где $h = r\sin\alpha$ − плечо силы $\vec{F}$, являющемся кратчайшим расстоянием от точки O до прямой линии действия этой силы (рис. 1, *а*).

Следовательно, элементарная работа, совершённая силой по вращению тела

$$dA = Md\varphi\ . \quad (3)$$

При этом кинетическая энергия вращающегося тела увеличилась на

$$dE_{\text{вр}} = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega\ , \quad (4)$$

где J − момент инерции тела относительно оси вращения O_1O_2; ω − угловая скорость вращения тела.

- Приравнивая правые части выражений (3) и (4), получаем

$$Md\varphi = J\omega d\omega\ . \qquad (5)$$

За время dt тело повернулось на угол $d\varphi$ и его угловая скорость увеличилась на $d\omega$. Поэтому равенство (5) разделим на dt:

$$\frac{Md\varphi}{dt} = \frac{J\omega\, d\omega}{dt};$$

$$M\omega = J\omega\varepsilon,$$

где $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ –угловая скорость; $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение тела.

Следовательно, $M = J\varepsilon.$ (6)

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки O называется векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку B приложения силы, на силу $\vec{F}$ (рис. 2):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (7)$$

- Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, т. е. плоскости, которая проходит через эти векторы. Направление $\vec{M}$ определяется правилом правого винта. Вектор силы $\vec{F}$ мысленно переносят параллельно самому себе из точки B в точку O. При этом не изменяются модуль и направление вектора $\vec{F}$. В точке O устанавливают правый винт перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, так, чтобы вращение головки винта по часовой стрелки совпадало с направлением мысленного вращения вектора $\vec{r}$ к вектору $\vec{F}$ вокруг точки O. Тогда перемещение острия винта указывает направление вектора $\vec{M}$. На рис. 2 острие винта направлено вверх, а направления вращений винта и вектора $\vec{r}$ рассматриваются снизу.

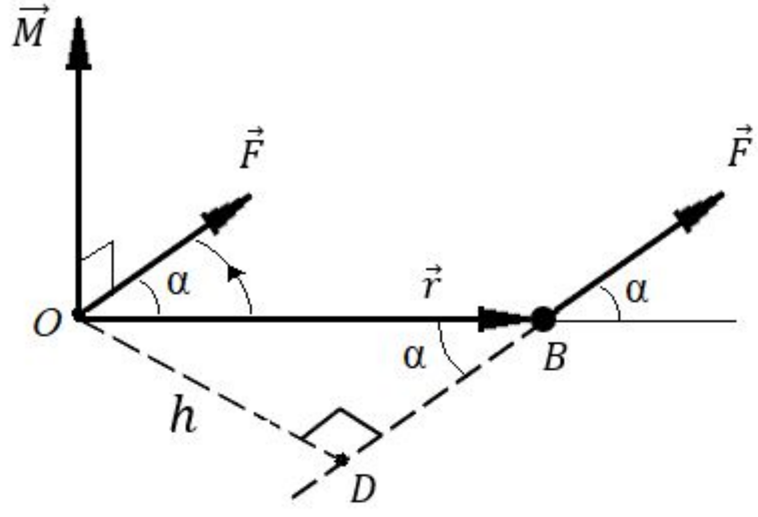

Рис. 2

- Согласно векторному произведению векторов, модуль момента силы равен

$$M = \left|\vec{M}\right| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right|\sin\alpha = rF\sin\alpha, \qquad (8)$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $h = r\sin\alpha$ – плечо силы, кратчайшее расстояние между линией действия BD силы $\vec{F}$ и точкой O (рис. 2 и рис.1, a).

На рис. 1, a вектор момента силы направлен вверх вдоль оси вращения O_1O_2. Векторы угловых скорости и ускорения сонаправлены с вектором $\vec{M}$.

Таким образом, выражение (6) записывается в векторном виде:

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}\ , \qquad (9)$$

где $\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения твердого тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела:

Момент силы $\vec{M}$, действующий на тело вызывает его угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}\ . \qquad (10)$$

Момент импульса тела и закон его сохранения

- *Моментом импульса* $\vec{L}_i$ i-ой материальной точки относительно оси вращения O_1O_2 называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}_i$ этой точки и её импульса $\vec{p}_i$ (рис. 3, *а*):

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \tag{11}$$

где $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$.

Точка массой m_i вращается по окружности в плоскости Q, перпендикулярной оси вращения O_1O_2. Угол α между векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ равен 90°. Направление вектора момента импульса $\vec{L}_i$ определяется так же, как и направление вектора момента силы $\vec{M}$ (рис. 2). Вектор импульса $\vec{p}_i$ мысленно переносят параллельно самому себе в точку O и применяют правило правого винта.

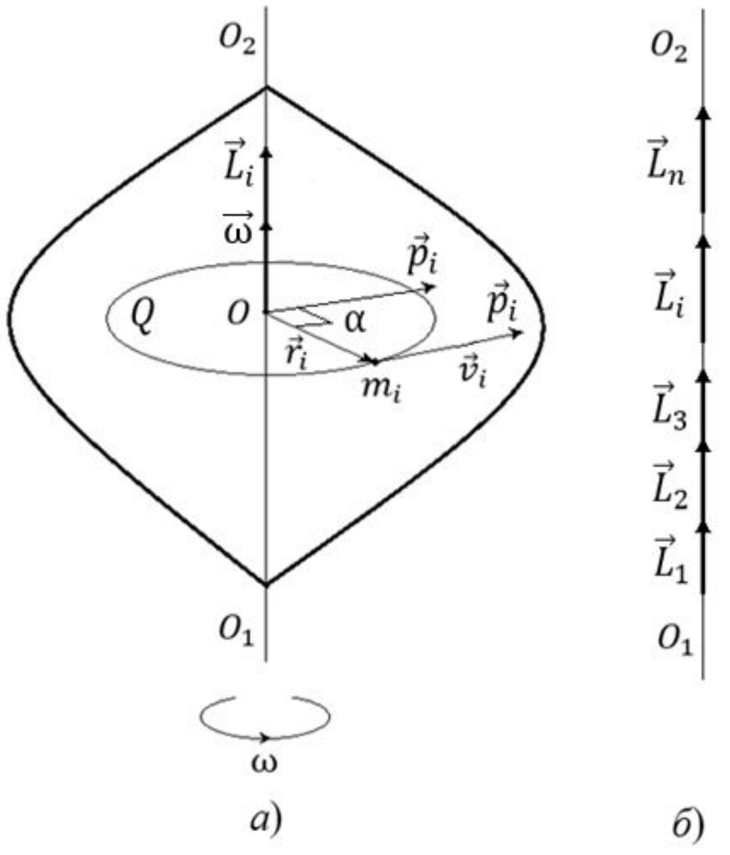

Рис. 3

- Модуль момента импульса i-ой материальной точки

$$L_i = \left|\vec{L}_i\right| = |\vec{r}_i||\vec{p}_i|\sin 90^\circ = r_i p_i = r_i m_i v_i = \omega m_i r_i^2, \qquad (12)$$

где $v_i = r_i\omega$.

Все векторы моментов импульсов материальных точек, из которых состоит твёрдое тело, имеют одно и тоже направление вдоль оси O_1O_2 (рис. 3, *б*). Поэтому модуль вектора момента импульса этого тела равен

$$L = \left|\vec{L}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\vec{L}_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\omega m_i r_i^2 = \omega\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J$ – момент инерции тела.

Поэтому $$L = J\omega\,. \qquad (13)$$

Момент импульса является векторной величиной. Если тело вращается вокруг своей оси симметрии (рис. 4) или вокруг одной из главных осей инерции, то

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \qquad (14)$$

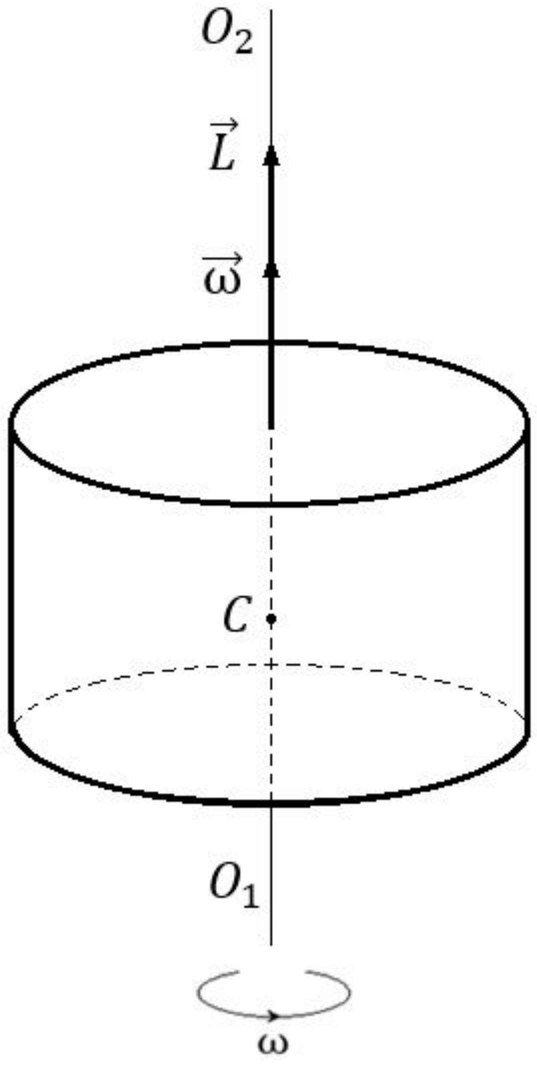

Рис. 4

- Продифференцируем равенство (14) по времени t:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon}. \tag{15}$$

Используя равенство (9), получаем, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{16}$$

Следовательно, *скорость изменения момента импульса равна моменту сил, приложенных к телу.*

Если на тело не действуют внешние силы, либо внешние силы не равны нулю, но векторная сумма их моментов равна нулю, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Это означает, что

$$\vec{L} = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Закон сохранения момента импульса:

- *Момент импульса замкнутой системы тел, на которые не действуют внешние силы, не изменяется с течением времени.*

Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства:

момент импульса $\vec{L}$ замкнутой системы тел, измеренный в некоторой инерциальной системе отчёта, равен моменту импульса в той же системе отсчёта при любом повороте системы координат.

Движения тел

Поступательное	Вращательное

Движения тел

Поступательное	Вращательное