

Лекция 7

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

- Если твёрдое тело приводится во вращение какой-либо силой, то по закону сохранения и превращения энергии его кинетическая энергия вращательного движения увеличивается на величину затраченной работы, если отсутствуют силы трения и сопротивления среды: $dE_{\text{вр}} = dA$.

На рис. 1, *a* представлено тело, которое вращается под действием внешней силы \vec{F} , приложенной к его поверхности в точке B . Пусть сила \vec{F} лежит в плоскости Q , перпендикулярной неподвижной оси вращения тела O_1O_2 . Разложим эту силу в плоскости Q на две составляющие: нормальную \vec{F}_n и тангенциальную \vec{F}_τ . Нормальная составляющая силы \vec{F}_n не совершает работы по вращению тела, поскольку она направлена вдоль радиуса-вектора \vec{r} и перемещение точки B отсутствует в направлении этого вектора.

Тангенциальная составляющая силы \vec{F}_τ вращает точку B по окружности радиуса r в плоскости Q .

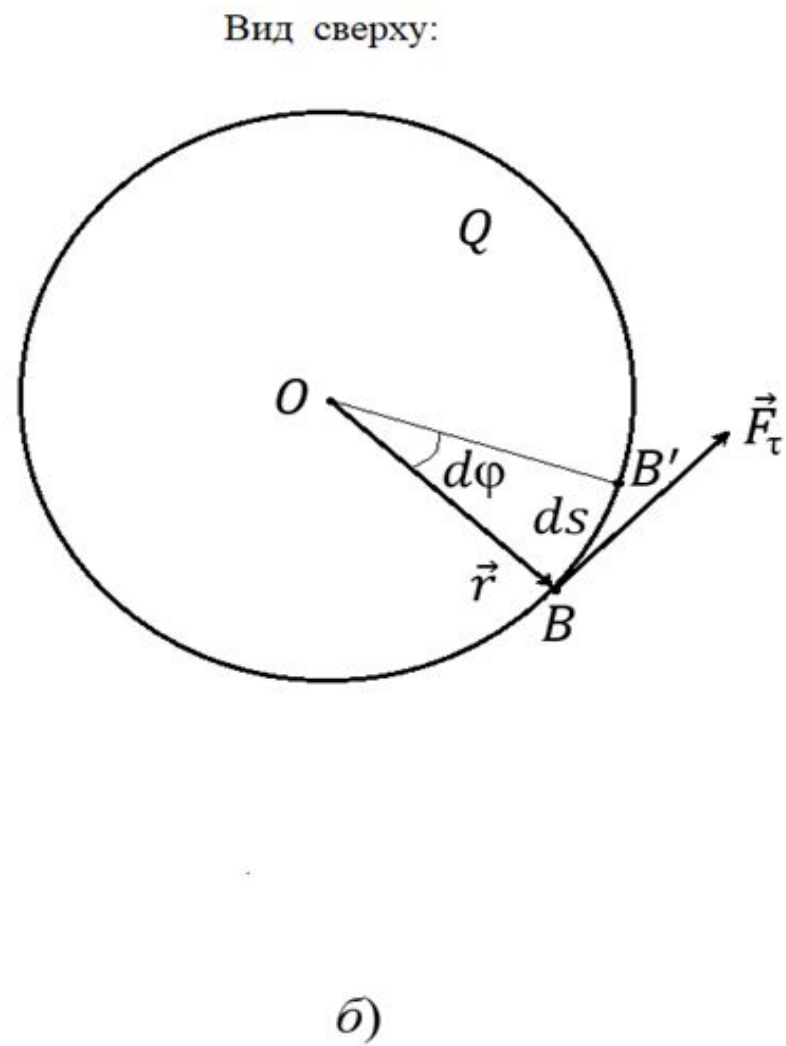
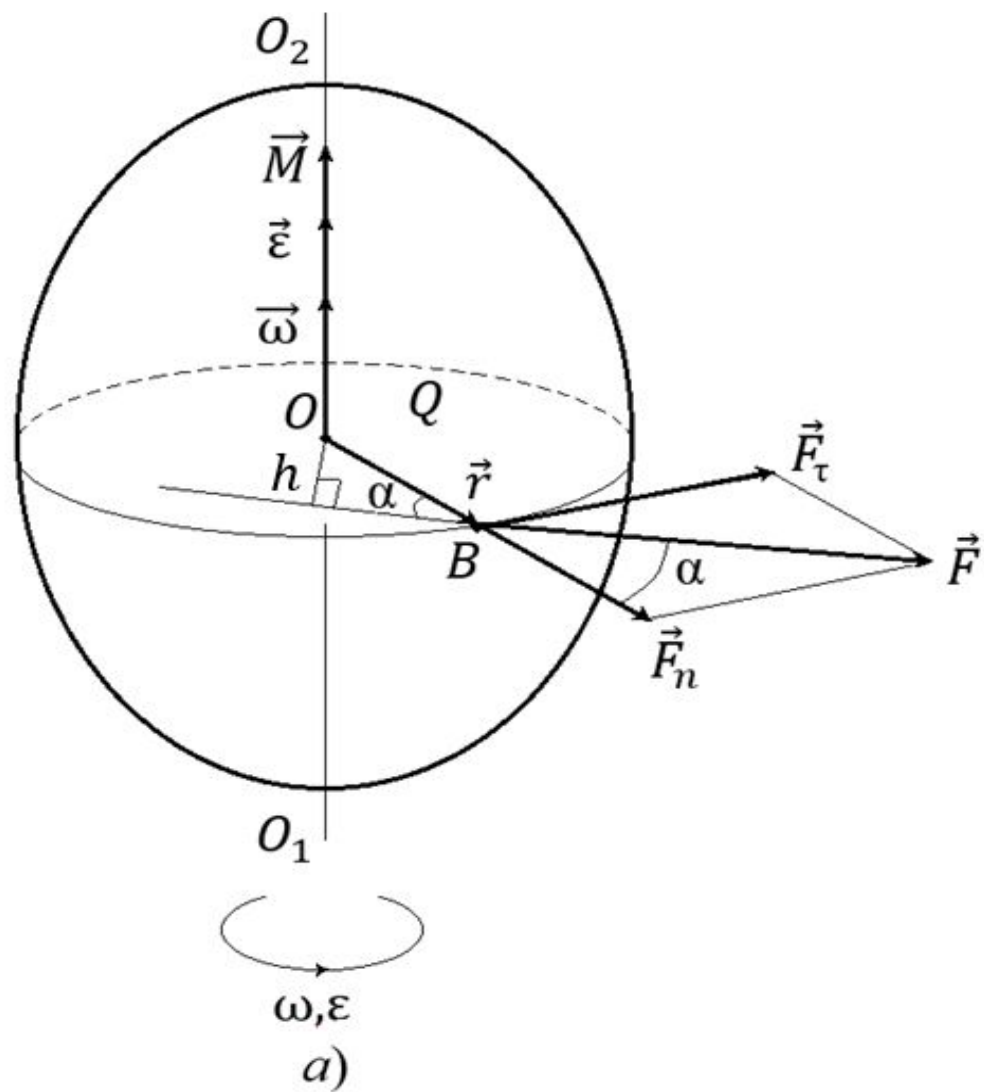


Рис. 1

• На рис. 1, б показан вид сверху вращающегося тела. За бесконечно малый промежуток времени dt точка B переместилась в положение B' и угол поворота тела составил $d\varphi$. Длина дуги BB' равна $ds = r d\varphi$. Тангенциальная составляющая силы совершила работу по вращению тела

$$dA = |\vec{F}_\tau| ds = |\vec{F}| \sin\alpha \cdot r d\varphi = Fr \sin\alpha d\varphi. \quad (1)$$

Модуль вектора момента силы \vec{F} относительно точки O определяется как

$$M = |\vec{M}| = Fr \sin\alpha = F \cdot h, \quad (2)$$

где $h = r \sin\alpha$ — плечо силы \vec{F} , являющемся кратчайшим расстоянием от точки O до прямой линии действия этой силы (рис. 1, а).

Следовательно, элементарная работа, совершённая силой по вращению тела

$$dA = M d\varphi. \quad (3)$$

При этом кинетическая энергия вращающегося тела увеличилась на

$$dE_{\text{вр}} = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega, \quad (4)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения O_1O_2 ; ω — угловая скорость вращения тела.

• Приравнивая правые части выражений (3) и (4), получаем

$$Md\varphi = J\omega d\omega. \quad (5)$$

За время dt тело повернулось на угол $d\varphi$ и его угловая скорость увеличилась на $d\omega$. Поэтому равенство (5) разделим на dt :

$$\frac{Md\varphi}{dt} = \frac{J\omega d\omega}{dt};$$
$$M\omega = J\omega\varepsilon,$$

где $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость; $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение тела.

$$\text{Следовательно, } M = J\varepsilon. \quad (6)$$

Моментом силы \vec{M} относительно неподвижной точки O называется векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку B приложения силы, на силу \vec{F} (рис. 2):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (7)$$

• Вектор \vec{M} перпендикулярен векторам \vec{r} и \vec{F} , т. е. плоскости, которая проходит через эти векторы. Направление \vec{M} определяется правилом правого винта. Вектор силы \vec{F} мысленно переносят параллельно самому себе из точки B в точку O . При этом не изменяются модуль и направление вектора \vec{F} . В точке O устанавливают правый винт перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{r} и \vec{F} , так, чтобы вращение головки винта по часовой стрелке совпадало с направлением мысленного вращения вектора \vec{r} к вектору \vec{F} вокруг точки O . Тогда перемещение острия винта указывает направление вектора \vec{M} . На рис. 2 острие винта направлено вверх, а направления вращений винта и вектора \vec{r} рассматриваются снизу.

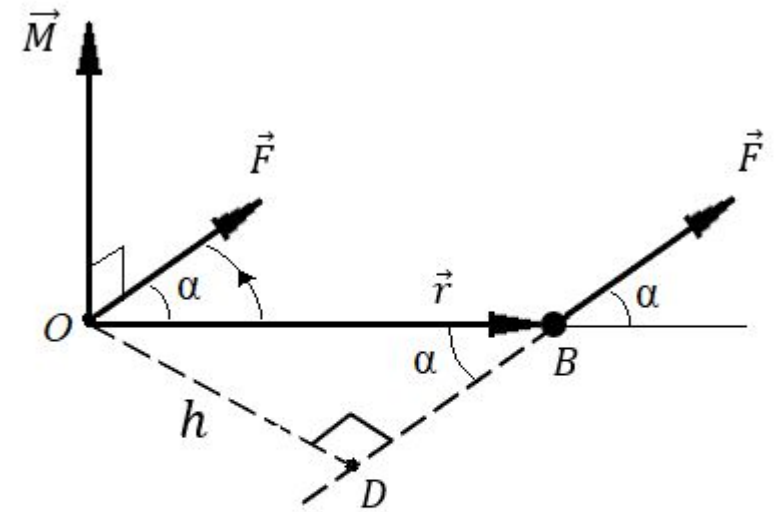


Рис. 2

- Согласно векторному произведению векторов, модуль момента силы равен

$$M = |\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha = rF\sin\alpha, \quad (8)$$

где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} ; $h = r\sin\alpha$ – плечо силы, кратчайшее расстояние между линией действия BD силы \vec{F} и точкой O (рис. 2 и рис.1, a).

На рис. 1, a вектор момента силы направлен вверх вдоль оси вращения O_1O_2 . Векторы угловых скорости и ускорения сонаправлены с вектором \vec{M} .

Таким образом, выражение (6) записывается в векторном виде:

$$\vec{M} = J\vec{\epsilon}, \quad (9)$$

где $\vec{\epsilon}$ – вектор углового ускорения твердого тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела:

Момент силы \vec{M} , действующий на тело вызывает его угловое ускорение

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{J}. \quad (10)$$

Момент импульса тела и закон его сохранения

- Моментом импульса \vec{L}_i i -ой материальной точки относительно оси вращения O_1O_2 называется векторное произведение радиуса-вектора \vec{r}_i этой точки и её импульса \vec{p}_i (рис. 3, а):

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (11)$$

где $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$.

Точка массой m_i вращается по окружности в плоскости Q , перпендикулярной оси вращения O_1O_2 . Угол α между векторами \vec{r}_i и \vec{p}_i равен 90° . Направление вектора момента импульса \vec{L}_i определяется так же, как и направление вектора момента силы \vec{M} (рис. 2). Вектор импульса \vec{p}_i мысленно переносят параллельно самому себе в точку O и применяют правило правого винта.

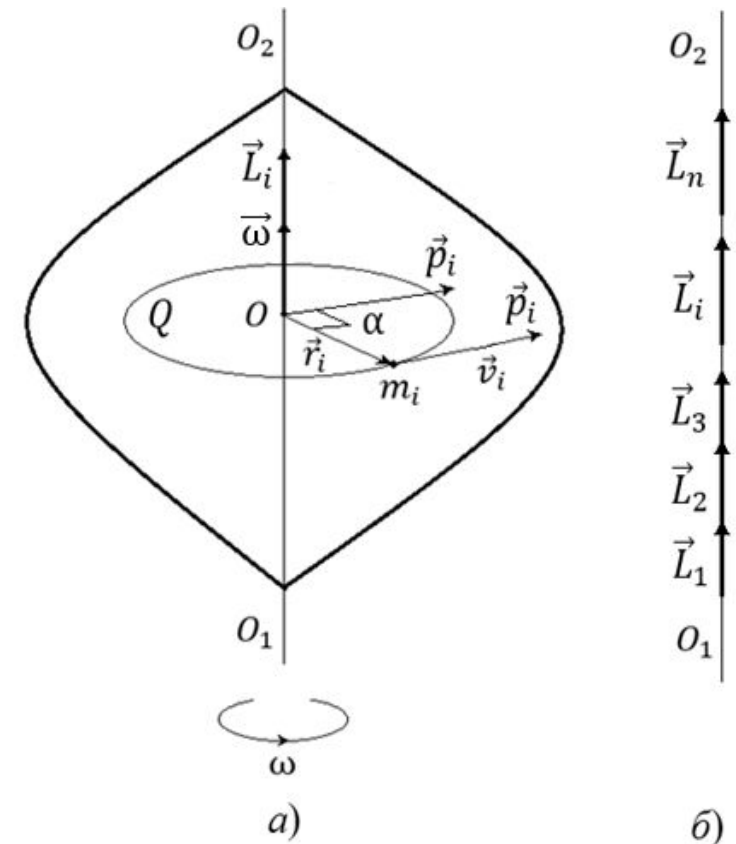


Рис. 3

- Модуль момента импульса i -ой материальной точки $L_i = |\vec{L}_i| = |\vec{r}_i||\vec{p}_i|\sin 90^\circ = r_i p_i = r_i m_i v_i = \omega m_i r_i^2$, (12)

где $v_i = r_i \omega$.

Все векторы моментов импульсов материальных точек, из которых состоит твёрдое тело, имеют одно и тоже направление вдоль оси $O_1 O_2$ (рис. 3, б). Поэтому модуль вектора момента импульса этого тела равен

$$L = |\vec{L}| = \sum_{i=1}^n |\vec{L}_i| = \sum_{i=1}^n \omega m_i r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J$ – момент инерции тела.

Поэтому $L = J\omega$. (13)

Момент импульса является векторной величиной. Если тело вращается вокруг своей оси симметрии (рис. 4) или вокруг одной из главных осей инерции, то

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (14)$$

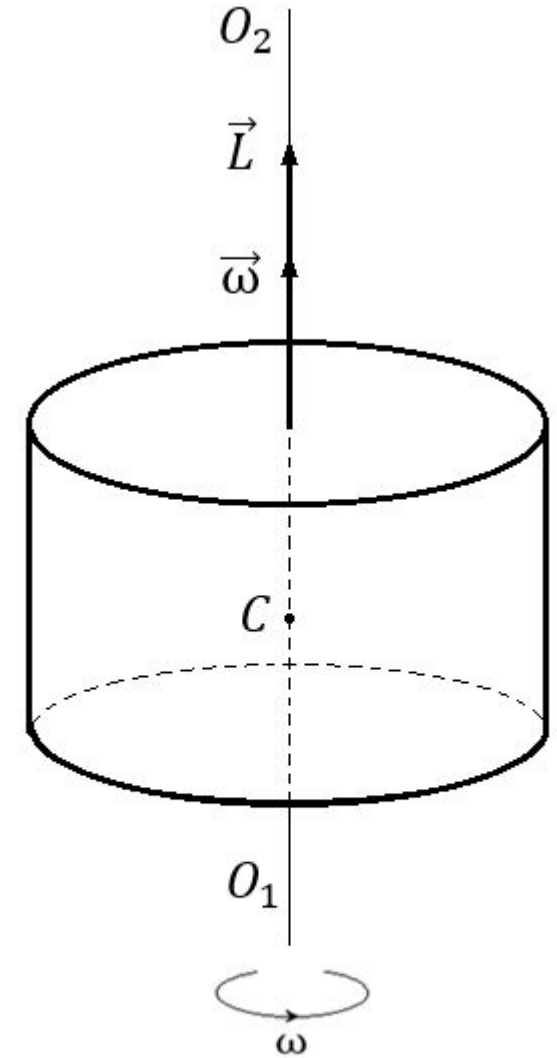


Рис. 4

- Продифференцируем равенство (14) по времени t :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\epsilon}. \quad (15)$$

Используя равенство (9), получаем, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (16)$$

Следовательно, *скорость изменения момента импульса равна моменту сил, приложенных к телу.*

Если на тело не действуют внешние силы, либо внешние силы не равны нулю, но векторная сумма их моментов равна нулю, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Это означает, что

$$\vec{L} = \text{const}. \quad (17)$$

Закон сохранения момента импульса:

- *Момент импульса замкнутой системы тел, на которые не действуют внешние силы, не изменяется с течением времени.*

Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства:

момент импульса \vec{L} замкнутой системы тел, измеренный в некоторой инерциальной системе отчёта, равен моменту импульса в той же системе отсчёта при любом повороте системы координат.

Движения тел

Поступательное	Вращательное

Движения тел

Поступательное	Вращательное