

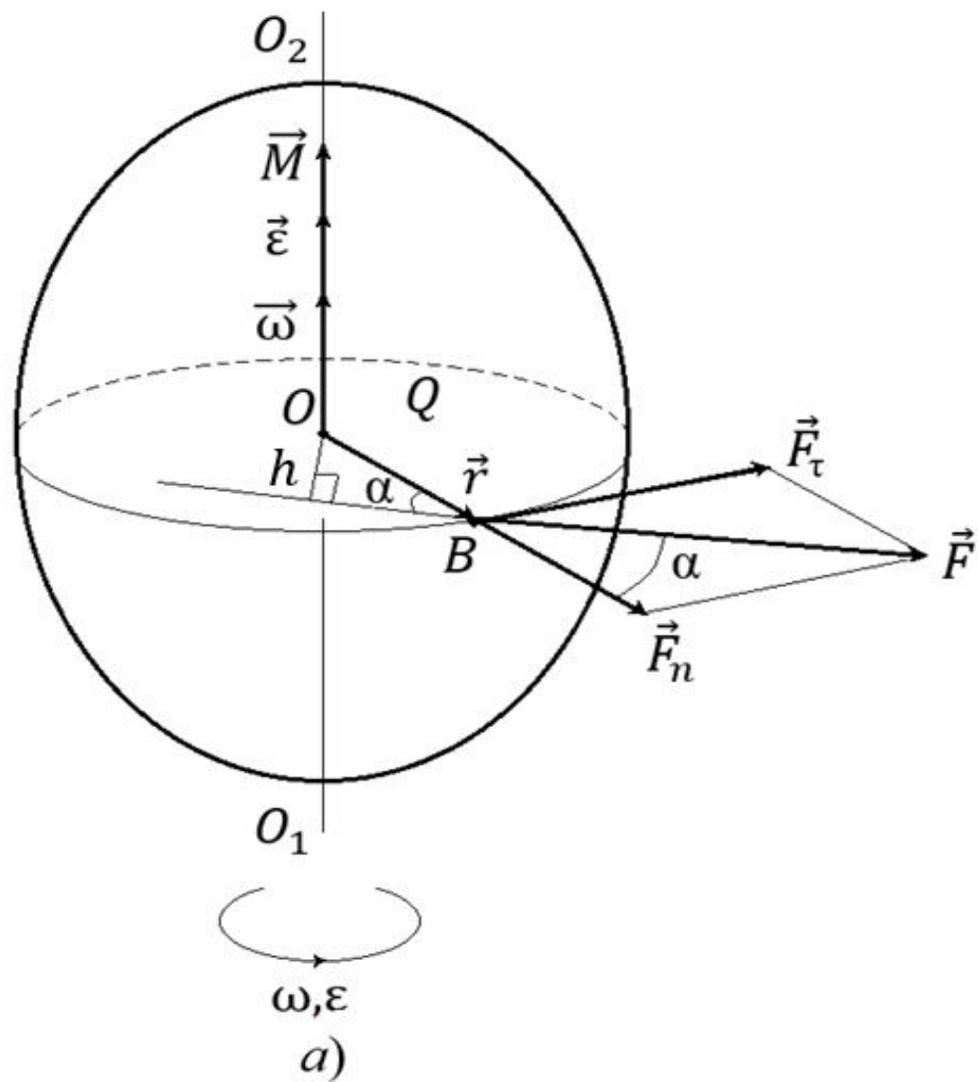
## Лекция 7

# Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

- Если твёрдое тело приводится во вращение какой-либо силой, то по закону сохранения и превращения энергии его кинетическая энергия вращательного движения увеличивается на величину затраченной работы, если отсутствуют силы трения и сопротивления среды:  $dE_{\text{вр}} = dA$ .

На рис. 1, *a* представлено тело, которое вращается под действием внешней силы  $\vec{F}$ , приложенной к его поверхности в точке  $B$ . Пусть сила  $\vec{F}$  лежит в плоскости  $Q$ , перпендикулярной неподвижной оси вращения тела  $O_1O_2$ . Разложим эту силу в плоскости  $Q$  на две составляющие: нормальную  $\vec{F}_n$  и тангенциальную  $\vec{F}_\tau$ . Нормальная составляющая силы  $\vec{F}_n$  не совершает работы по вращению тела, поскольку она направлена вдоль радиуса-вектора  $\vec{r}$  и перемещение точки  $B$  отсутствует в направлении этого вектора.

Тангенциальная составляющая силы  $\vec{F}_\tau$  вращает точку  $B$  по окружности радиуса  $r$  в плоскости  $Q$ .



Вид сверху:

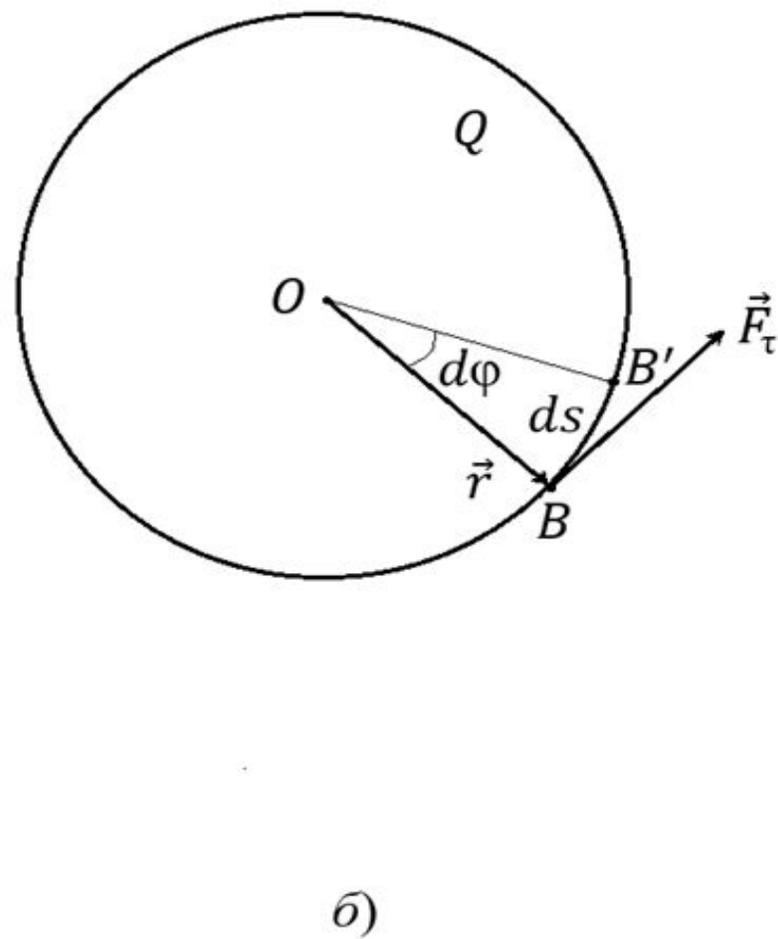


Рис. 1

• На рис. 1, б показан вид сверху вращающегося тела. За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  точка  $B$  переместилась в положение  $B'$  и угол поворота тела составил  $d\varphi$ . Длина дуги  $BB'$  равна  $ds = r d\varphi$ . Тангенциальная составляющая силы совершила работу по вращению тела

$$dA = |\vec{F}_\tau| ds = |\vec{F}| \sin\alpha \cdot r d\varphi = Fr \sin\alpha d\varphi. \quad (1)$$

Модуль вектора момента силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  определяется как

$$M = |\vec{M}| = Fr \sin\alpha = F \cdot h, \quad (2)$$

где  $h = r \sin\alpha$  — плечо силы  $\vec{F}$ , являющемся кратчайшим расстоянием от точки  $O$  до прямой линии действия этой силы (рис. 1, а).

Следовательно, элементарная работа, совершённая силой по вращению тела

$$dA = M d\varphi. \quad (3)$$

При этом кинетическая энергия вращающегося тела увеличилась на

$$dE_{\text{вр}} = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = J\omega d\omega, \quad (4)$$

где  $J$  — момент инерции тела относительно оси вращения  $O_1O_2$ ;  $\omega$  — угловая скорость вращения тела.

• Приравнивая правые части выражений (3) и (4), получаем

$$Md\varphi = J\omega d\omega. \quad (5)$$

За время  $dt$  тело повернулось на угол  $d\varphi$  и его угловая скорость увеличилась на  $d\omega$ . Поэтому равенство (5) разделим на  $dt$ :

$$\frac{Md\varphi}{dt} = \frac{J\omega d\omega}{dt};$$
$$M\omega = J\omega\varepsilon,$$

где  $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$  – угловая скорость;  $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt}$  – угловое ускорение тела.

$$\text{Следовательно, } M = J\varepsilon. \quad (6)$$

Моментом силы  $\vec{M}$  относительно неподвижной точки  $O$  называется векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $B$  приложения силы, на силу  $\vec{F}$  (рис. 2):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (7)$$

- Вектор  $\vec{M}$  перпендикулярен векторам  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , т. е. плоскости, которая проходит через эти векторы. Направление  $\vec{M}$  определяется правилом правого винта. Вектор силы  $\vec{F}$  мысленно переносят параллельно самому себе из точки  $B$  в точку  $O$ . При этом не изменяются модуль и направление вектора  $\vec{F}$ . В точке  $O$  устанавливают правый винт перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , так, чтобы вращение головки винта по часовой стрелке совпадало с направлением мысленного вращения вектора  $\vec{r}$  к вектору  $\vec{F}$  вокруг точки  $O$ . Тогда перемещение острия винта указывает направление вектора  $\vec{M}$ . На рис. 2 острие винта направлено вверх, а направления вращений винта и вектора  $\vec{r}$  рассматриваются снизу.

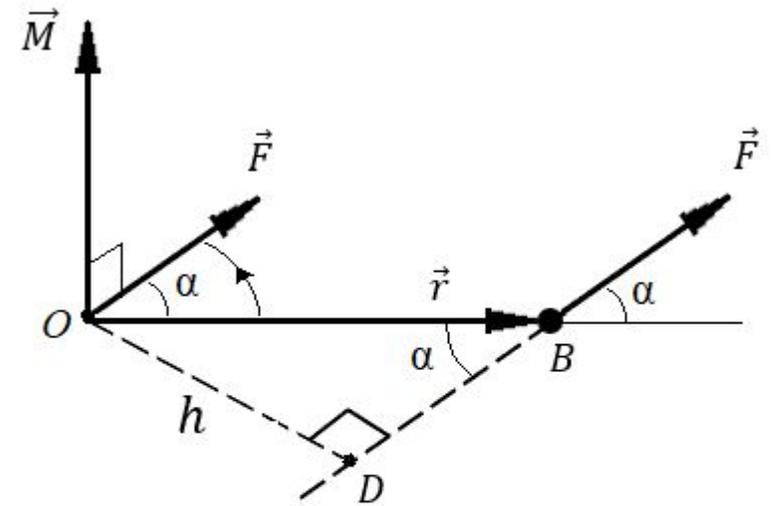


Рис. 2

- Согласно векторному произведению векторов, модуль момента силы равен

$$M = |\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha = rF\sin\alpha, \quad (8)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ;  $h = r\sin\alpha$  – плечо силы, кратчайшее расстояние между линией действия  $BD$  силы  $\vec{F}$  и точкой  $O$  (рис. 2 и рис.1,  $a$ ).

На рис. 1,  $a$  вектор момента силы направлен вверх вдоль оси вращения  $O_1O_2$ . Векторы угловых скорости и ускорения сонаправлены с вектором  $\vec{M}$ .

Таким образом, выражение (6) записывается в векторном виде:

$$\vec{M} = J\vec{\epsilon}, \quad (9)$$

где  $\vec{\epsilon}$  – вектор углового ускорения твердого тела.

**Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела:**

Момент силы  $\vec{M}$ , действующий на тело вызывает его угловое ускорение

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{J}. \quad (10)$$

# Момент импульса тела и закон его сохранения

- Моментом импульса  $\vec{L}_i$   $i$ -ой материальной точки относительно оси вращения  $O_1O_2$  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}_i$  этой точки и её импульса  $\vec{p}_i$  (рис. 3, а):

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i], \quad (11)$$

где  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ .

Точка массой  $m_i$  вращается по окружности в плоскости  $Q$ , перпендикулярной оси вращения  $O_1O_2$ . Угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{r}_i$  и  $\vec{p}_i$  равен  $90^\circ$ . Направление вектора момента импульса  $\vec{L}_i$  определяется так же, как и направление вектора момента силы  $\vec{M}$  (рис. 2). Вектор импульса  $\vec{p}_i$  мысленно переносят параллельно самому себе в точку  $O$  и применяют правило правого винта.

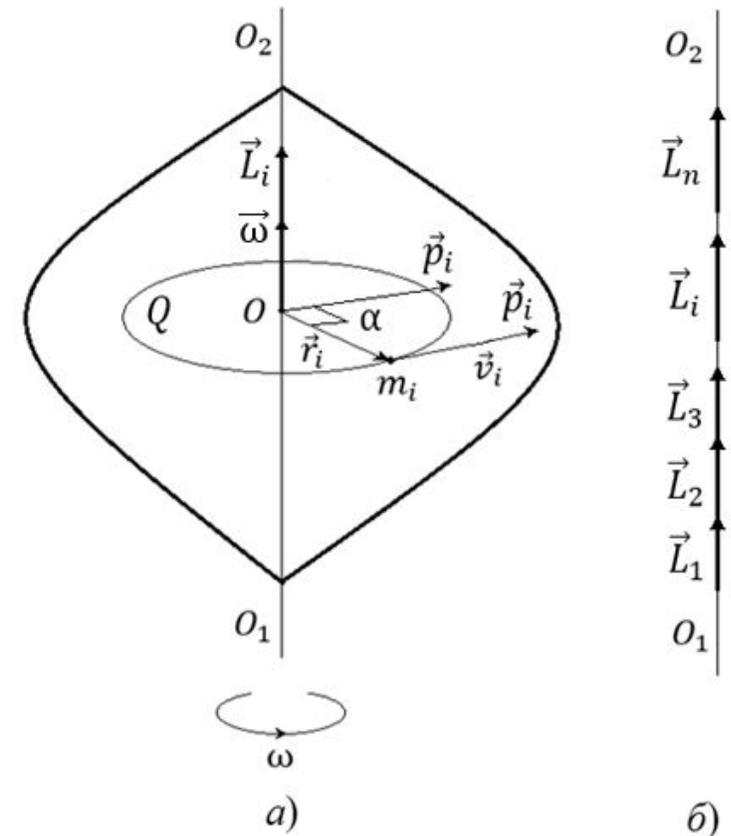


Рис. 3

- Модуль момента импульса  $i$ -ой материальной точки  $L_i = |\vec{L}_i| = |\vec{r}_i||\vec{p}_i|\sin 90^\circ = r_i p_i = r_i m_i v_i = \omega m_i r_i^2$ , (12)

где  $v_i = r_i \omega$ .

Все векторы моментов импульсов материальных точек, из которых состоит твёрдое тело, имеют одно и тоже направление вдоль оси  $O_1 O_2$  (рис. 3, б). Поэтому модуль вектора момента импульса этого тела равен

$$L = |\vec{L}| = \sum_{i=1}^n |\vec{L}_i| = \sum_{i=1}^n \omega m_i r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J$  – момент инерции тела.

Поэтому  $L = J\omega$ . (13)

Момент импульса является векторной величиной. Если тело вращается вокруг своей оси симметрии (рис. 4) или вокруг одной из главных осей инерции, то

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (14)$$

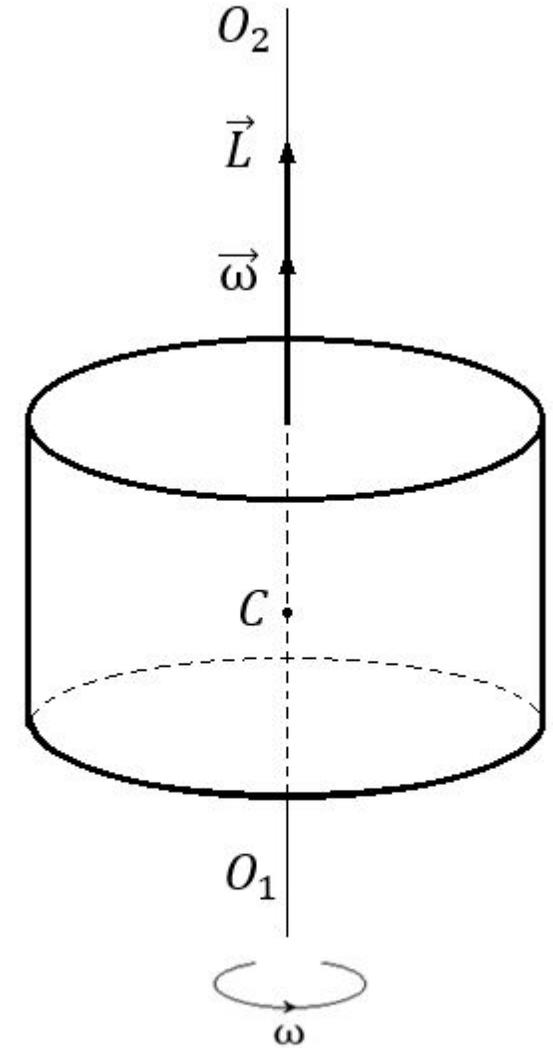


Рис. 4

- Продифференцируем равенство (14) по времени  $t$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\epsilon}. \quad (15)$$

Используя равенство (9), получаем, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (16)$$

Следовательно, *скорость изменения момента импульса равна моменту сил, приложенных к телу.*

Если на тело не действуют внешние силы, либо внешние силы не равны нулю, но векторная сумма их моментов равна нулю, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

Это означает, что

$$\vec{L} = \text{const}. \quad (17)$$

## **Закон сохранения момента импульса:**

- *Момент импульса замкнутой системы тел, на которые не действуют внешние силы, не изменяется с течением времени.*

Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства:

момент импульса  $\vec{L}$  замкнутой системы тел, измеренный в некоторой инерциальной системе отчёта, равен моменту импульса в той же системе отсчёта при любом повороте системы координат.

## Движения тел

Поступательное	Вращательное

# Движения тел

Поступательное	Вращательное