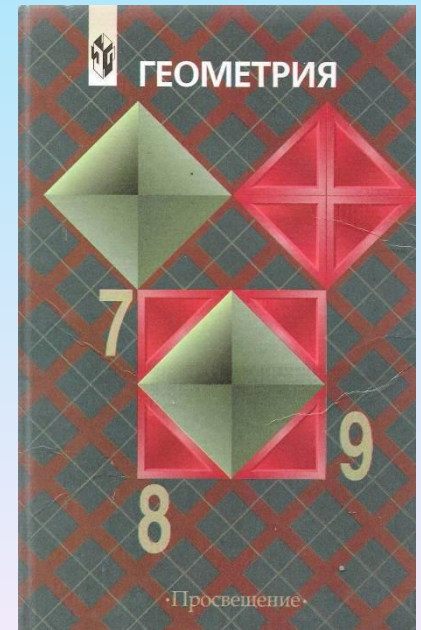


8 класс

Геометрия



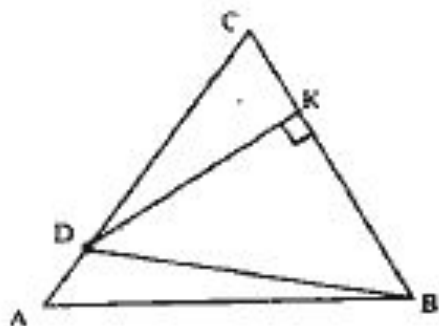
Домашнее задание

Срединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D . Найдите: а) AD и CD , если $BD=5$ см, $AC=8,5$ см; б) AC , если $BD=11,4$ см, $AD=3,2$ см.

Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r . Найдите: а) OA , если $r=5$ см, $\angle A=60^\circ$; б) r , если $OA=14$ дм, $\angle A=90^\circ$.

Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите углы ACM и BCM , если: а) $\angle AMB=136^\circ$; б) $\angle AMB=111^\circ$.

Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D . Найдите: а) AD и CD , если $BD = 5$ см, $AC = 8,5$ см; б) AC , если $BD = 11,4$ см, $AD = 3,2$ см.



Дано: $\triangle ABC$;
 $DK \perp BC$, $CK = KB$;
а) AD и $CD = ?$
б) $AC = ?$

Решение:

а) $BD = 5$ см, $AC = 8,5$ см,

DK – серединный перпендикуляр к BC , следовательно, $BD = DC$ (по св-ву), т.е. $DC = 5$ см, тогда

$AD = AC - DC = 8,5 - 5 = 3,5$ см;

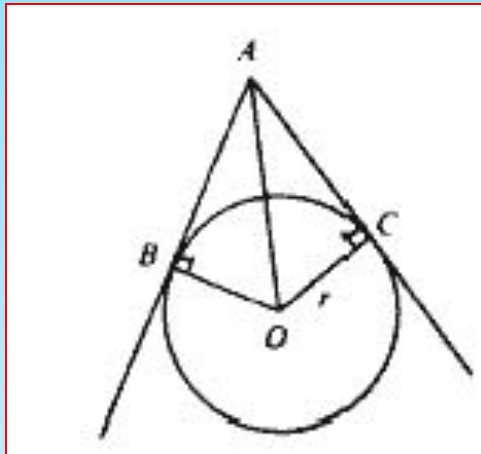
б) $BD = 11,4$ см, $AD = 3,2$ см,

DK – серединный перпендикуляр к BC , следовательно,
 $DC = BD = 11,4$ см;

$AC = DC + AD = 3,2 + 11,4 = 14,6$ см.

Ответ: а) 5 см; 3,5 см; б) 11,4 см и 14,6 см.

Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r . Найдите: а) OA , если $r = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$;
б) r , если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90^\circ$.



Дано: AB, AC – касательные к $\text{Окр}(O;r)$.
Найти: а) OA ; б) r .

Решение:

а) $r = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$ (усл.);

1) $OB \perp AB, OC \perp AC$, следовательно, AO является биссектрисой.

2) В $\triangle ACO$:

$\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, AO = 2 \cdot 5, OC = 5$ см, т.е.

$AO = 2OC$ (из прямоуг. треугольника AOC),

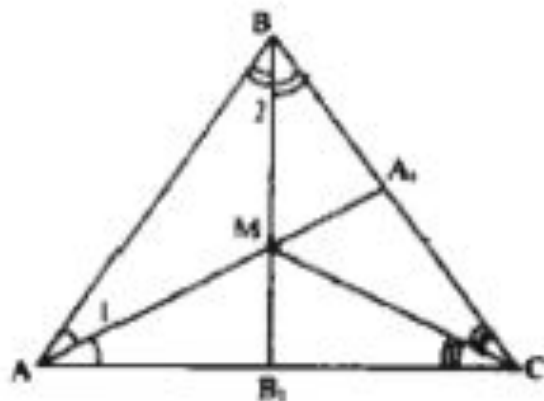
$AO = 2 \cdot 5 = 10$ см;

б) AO – биссектриса, тогда в $\triangle AOC$: $\angle A = 45^\circ, \angle C = 90^\circ,$

$\angle O = 45^\circ$, т.е. $AC = OC = r$;

$14^2 = 2r^2; r^2 = 98$ (т. Пифагора), $r = 7\sqrt{2}$.

Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите углы ACM и BCM , если:
 а) $\angle AMB = 136^\circ$; б) $\angle AMB = 111^\circ$.



Дано:

$\triangle ABC$;

AA_1 ; BB_1 – биссектрисы;

$AA_1 \cap BB_1 = M$.

Найти: $\angle ACM$ и $\angle BCM$.

Решение:

а) $\angle AMB = 136^\circ$

1) M – точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 , следовательно, CM – биссектриса $\angle ACB$ и $\angle ACM = \angle BCM$;

2) $\triangle ABM$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, т.е.

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$;

3) $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$;

$\angle C = 180^\circ - (\angle B + \angle A)$, $2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$;

$\angle C = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$, т.е. $\angle BCM = \angle ACM = 46^\circ$;

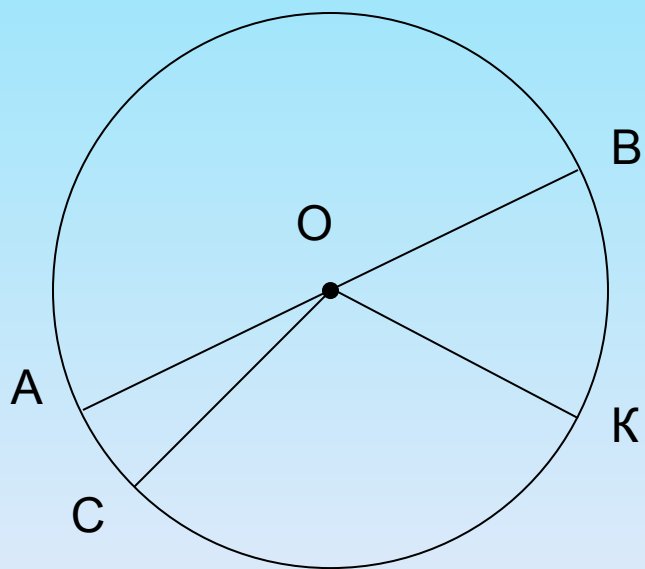
б) $\angle AMB = 111^\circ$.

Имеем: $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 111^\circ) = 42^\circ$, т.е.

$\angle ACM = \angle BCM = 21^\circ$.

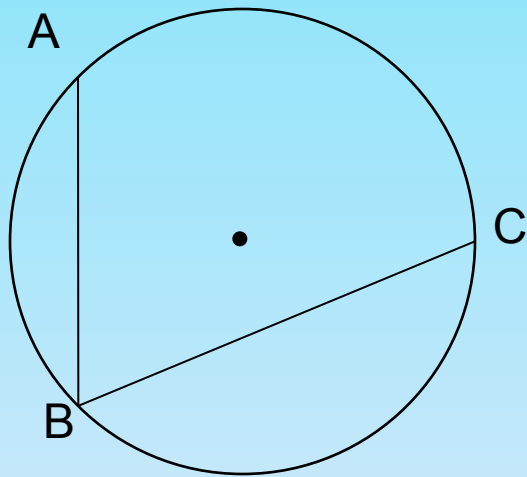
Ответ: а) 46° ; 46° ; б) 21° ; 21° .

Центральный угол

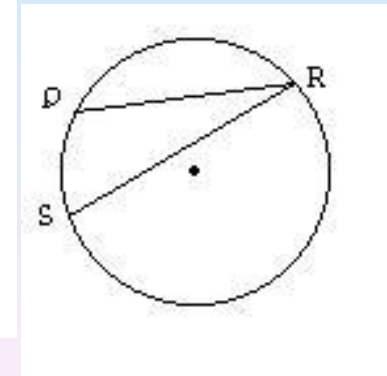
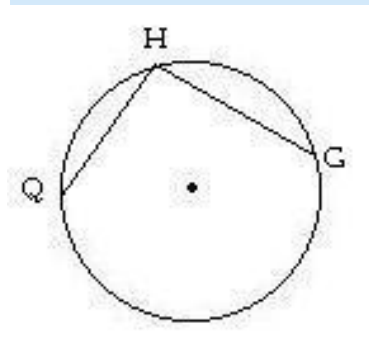
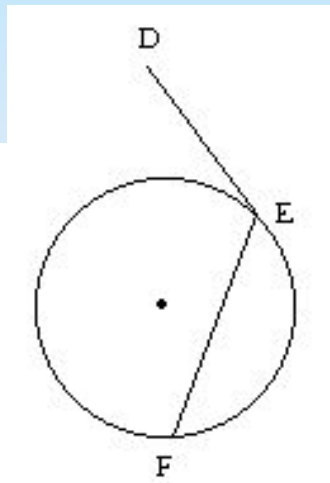
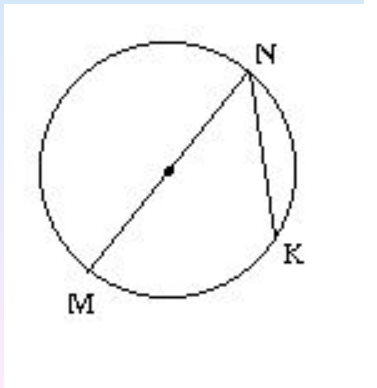


- Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.
- Градусная мера центрального угла соответствует градусной мере дуги, на которую он опирается (если дуга меньше полуокружности).
- Найдите градусную меру угла AOB.

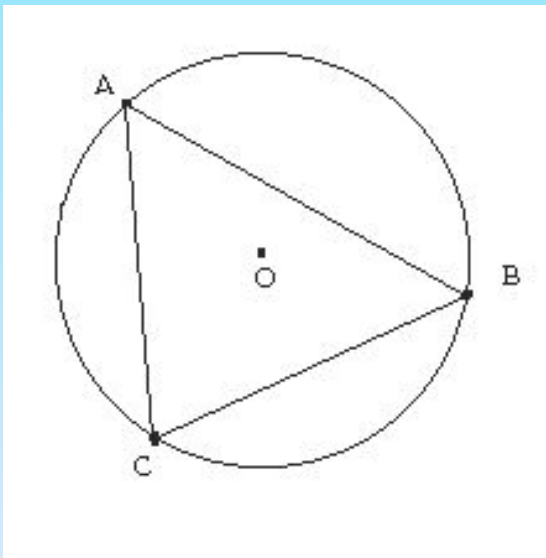
Вписанный угол.



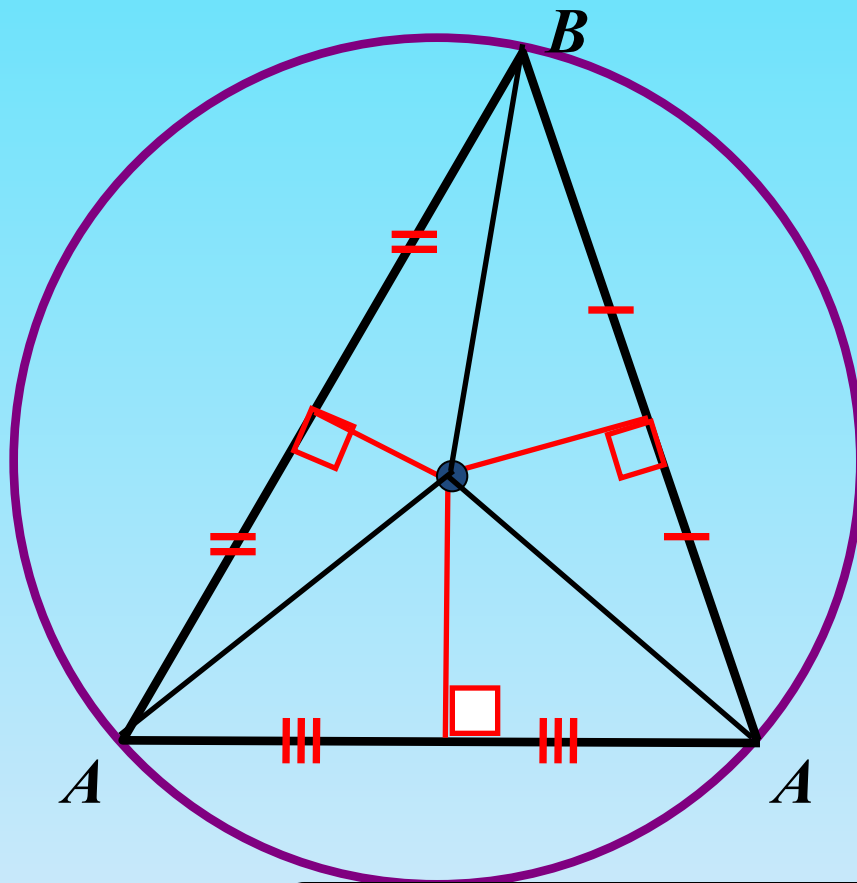
- Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным в окружность.
- Какие из углов являются вписанными в окружность?
- Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла



Описанная окружность. Треугольник, вписанный в окружность.



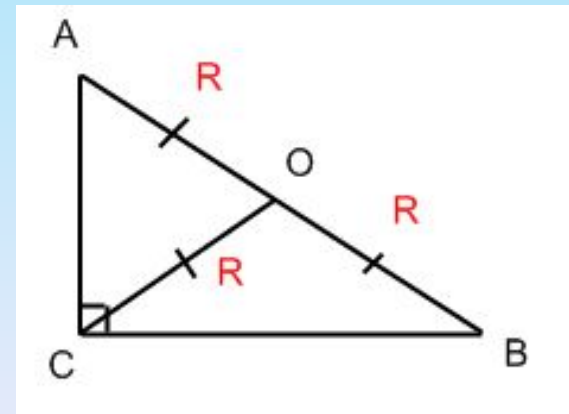
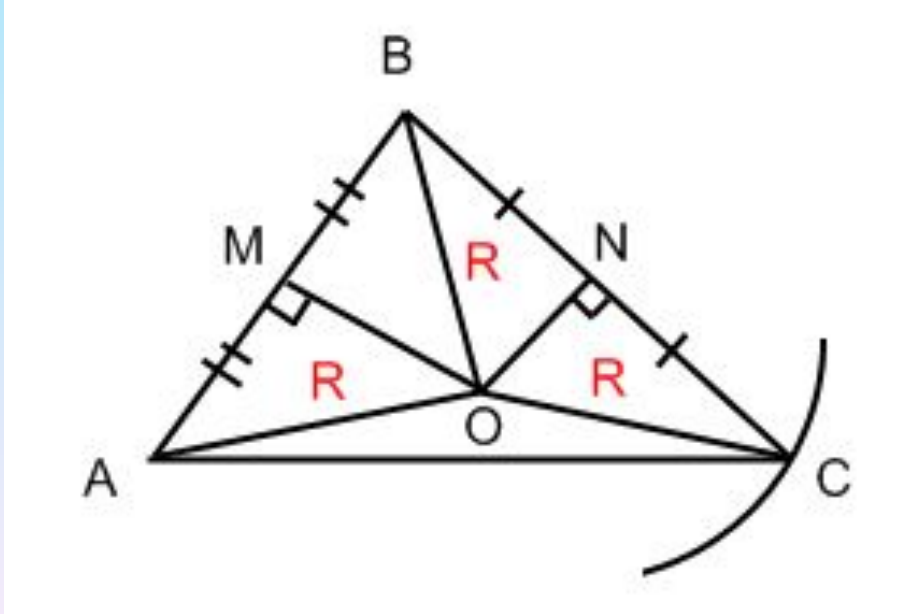
- Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины. В этом случае треугольник называется вписанным в окружность.
- Стороны вписанного треугольника являются хордами описанной около него окружности.
- Где лежит центр окружности, описанной около треугольника?



**Центром описанной около
треугольника окружности является
точка пересечения серединных
перпендикуляров треугольника.**

Треугольник. Описанная окружность.

- 1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
- 2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.
- 3) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.



$$R = \frac{1}{2} AB$$

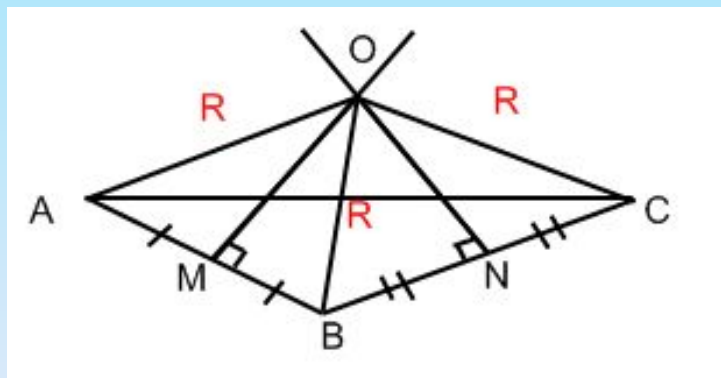
Треугольник. Описанная окружность

4) R – радиус описанной окружности
 $R=OA=OB=OC$ в любом треугольнике.

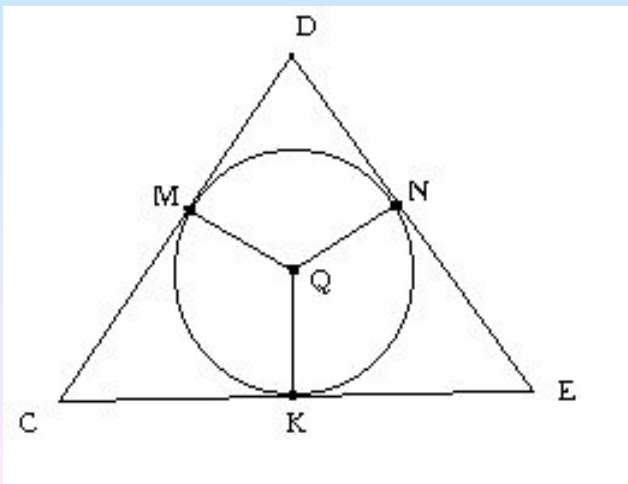
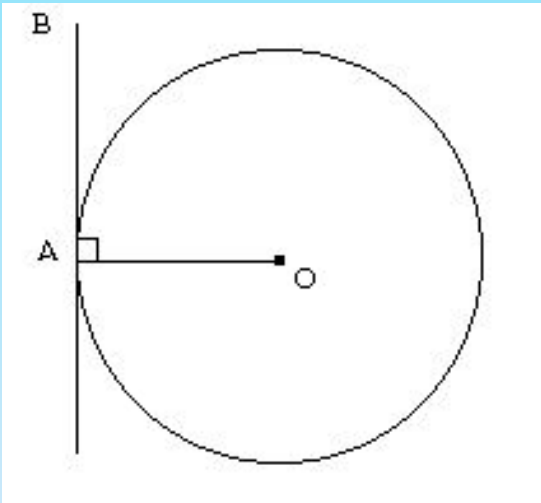
5) Центр окружности, описанной около тупого треугольника, находится вне треугольника.

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{- для правильного треугольника}$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

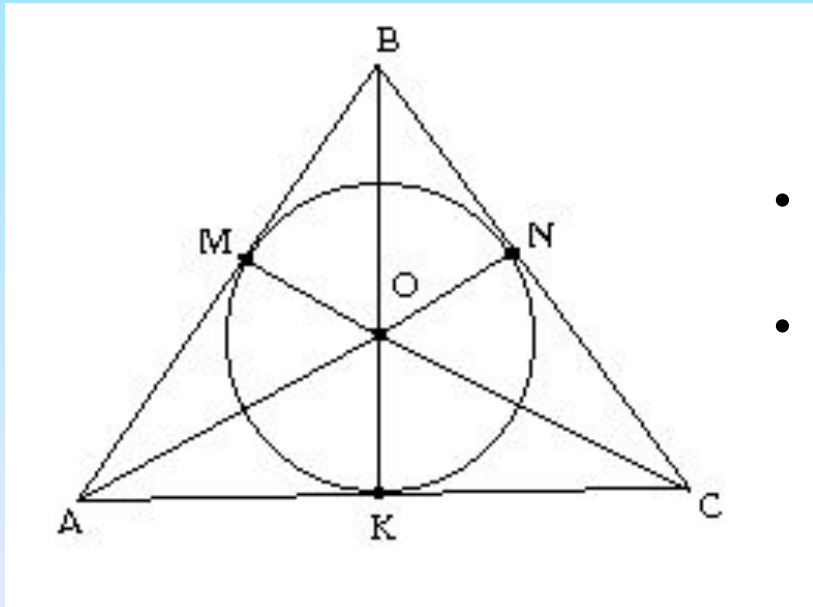


Касательная к окружности

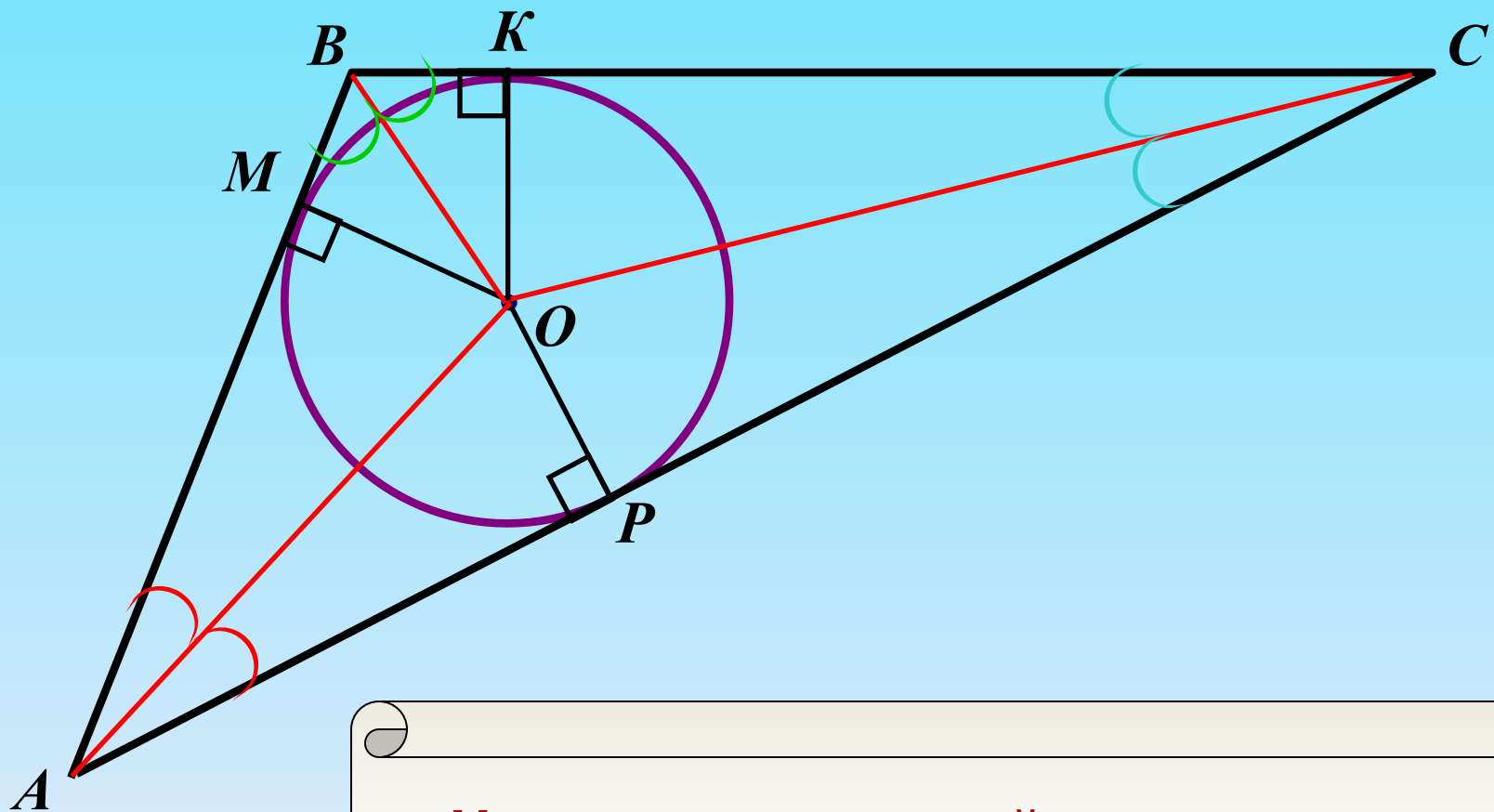


- Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности. Общая точка окружности и касательной называется точкой касания.
- Что можно сказать о сторонах треугольника CDE по отношению к окружности?

Окружность, вписанная в треугольник.

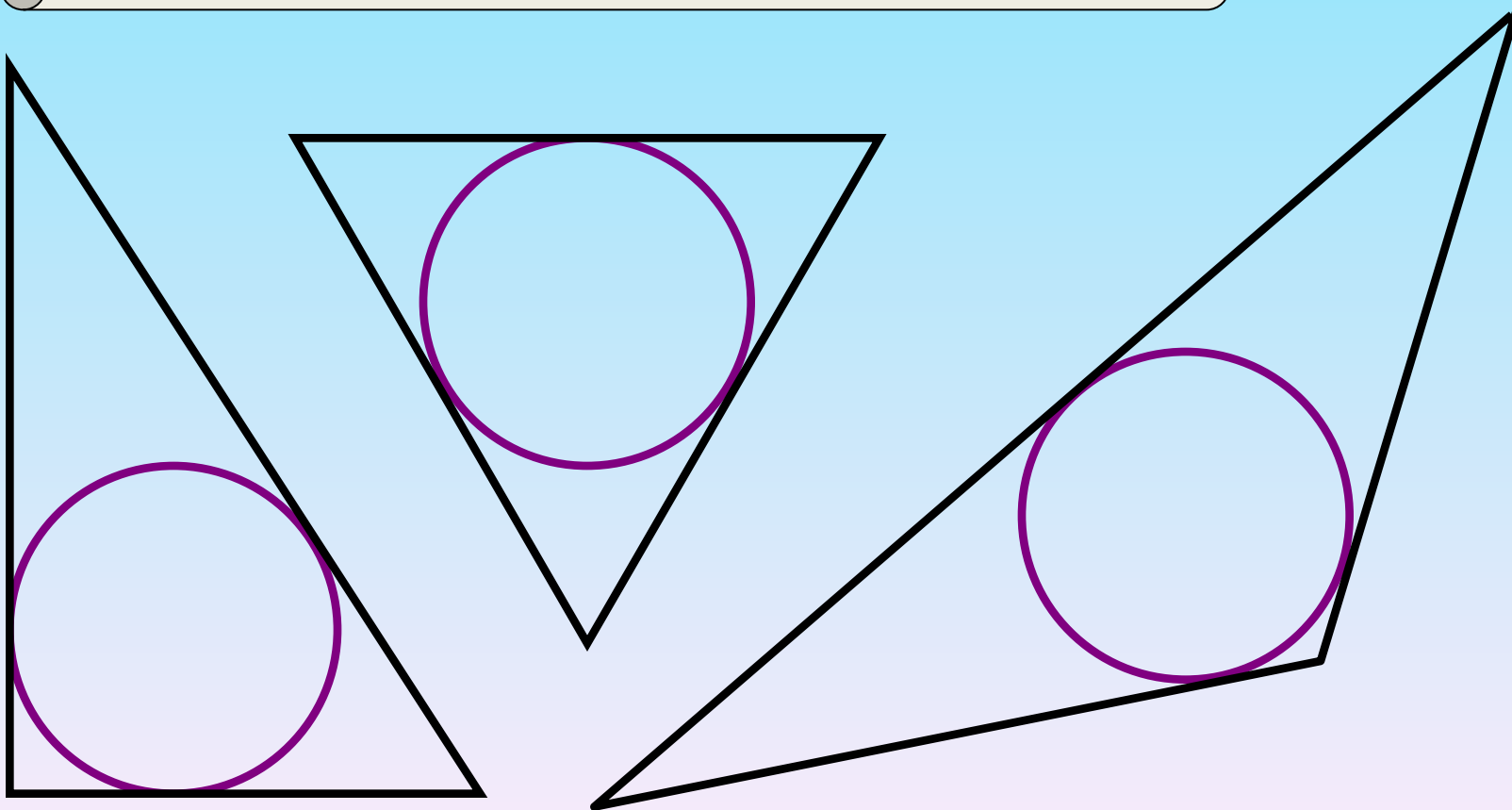


- Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон. В этом случае треугольник называется описанным около окружности.
- Где лежит центр окружности, вписанной в треугольник?
- Треугольник ABC-описанный около окружности. Какие из треугольников AOM, MOB, BON, NOC, COK, KOA-равные?



**Центром вписанной в треугольник
окружности является точка
пересечения биссектрис
треугольника.**

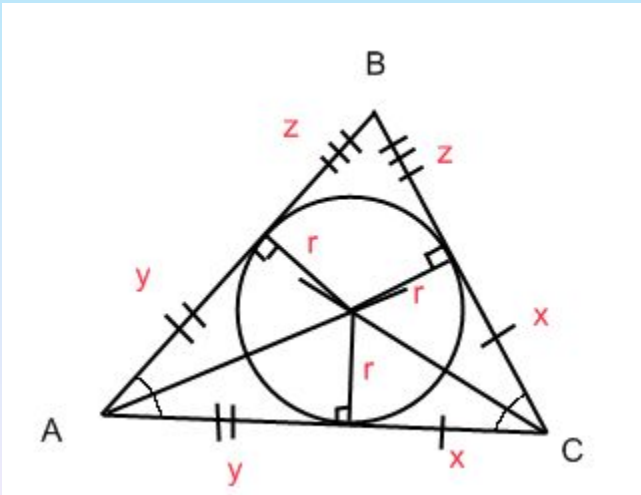
**В любой треугольник можно
вписать окружность.**



Треугольник. Вписанная окружность.

- 1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
- 2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.
- 3) $r = \frac{S}{p}$ p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности

В правильном треугольнике

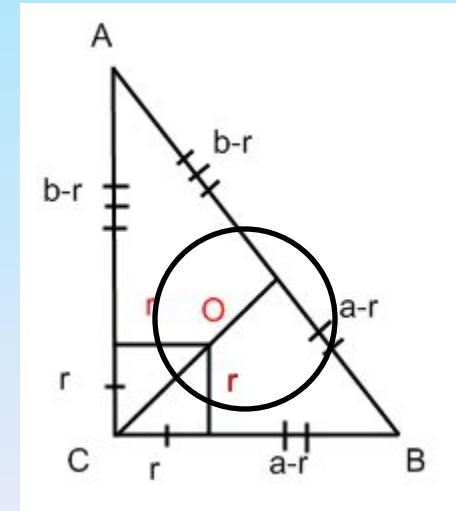


$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

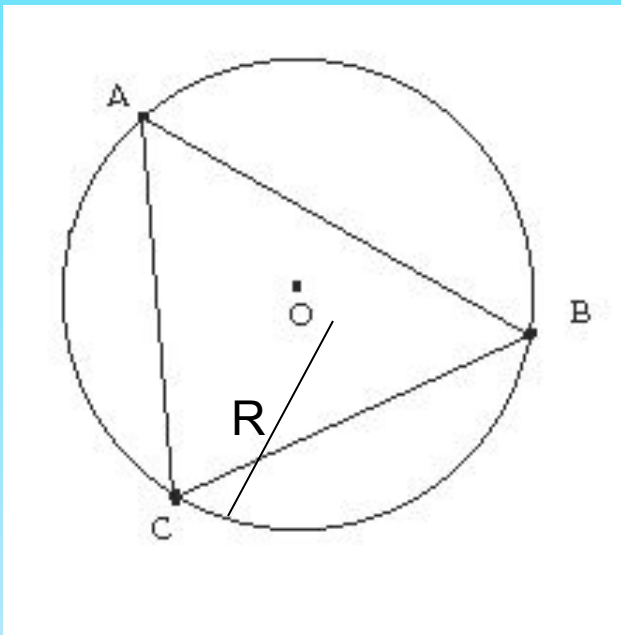
C – гипотенуза

$$C = p - r$$

p - полупериметр



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

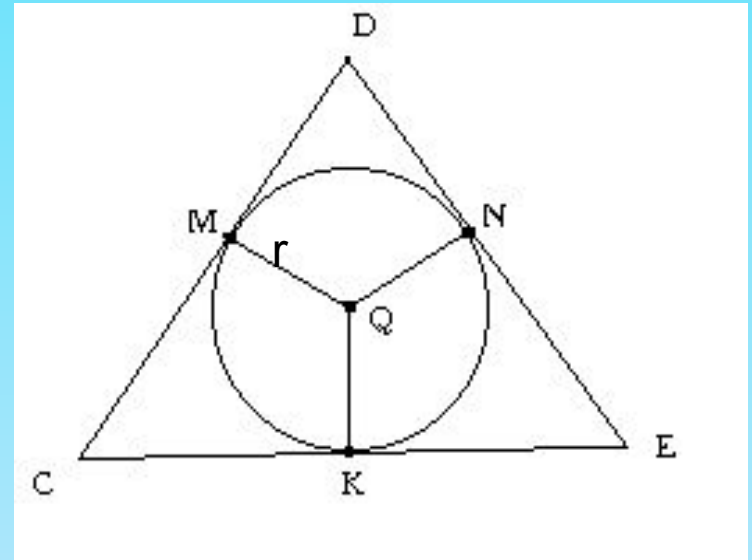


$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

В правильном треугольнике

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

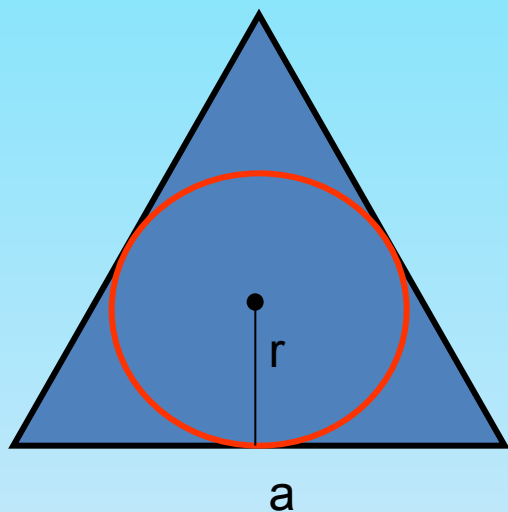


$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

№ 1. В равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

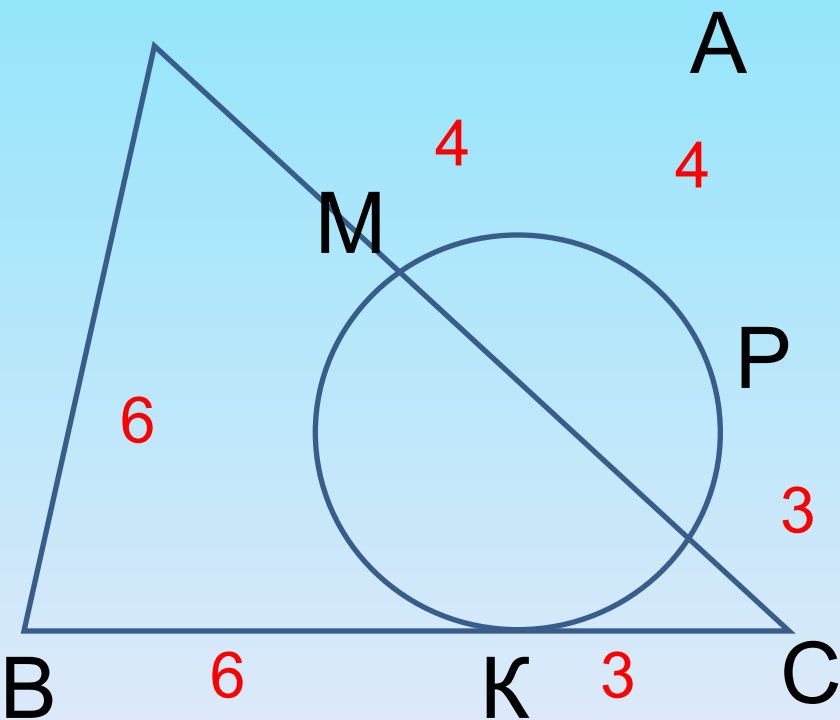
$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{см}) - \text{полупериметр}$$

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

№2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AP = 4$ см, $BM = 6$ см, $CK = 3$ см.



Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны.

$$BM = BK$$

$$AM = AP$$

$$CP = CK$$

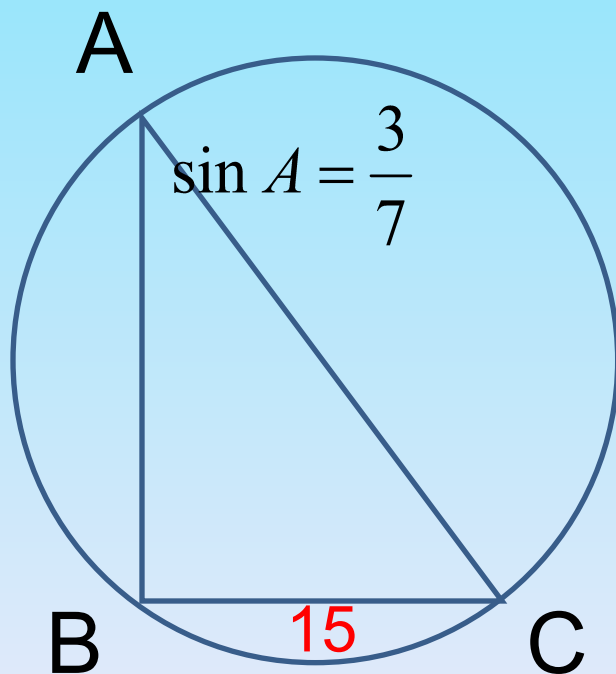
$$AB = 10$$

$$AC = 7$$

$$BC = 9$$

$$P = 10 + 7 + 9 = 26$$

№3. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если синус одного из углов треугольника равен $\frac{3}{7}$, а противолежащий этому углу катет равен 15 см.



Центр описанной около п/у треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.

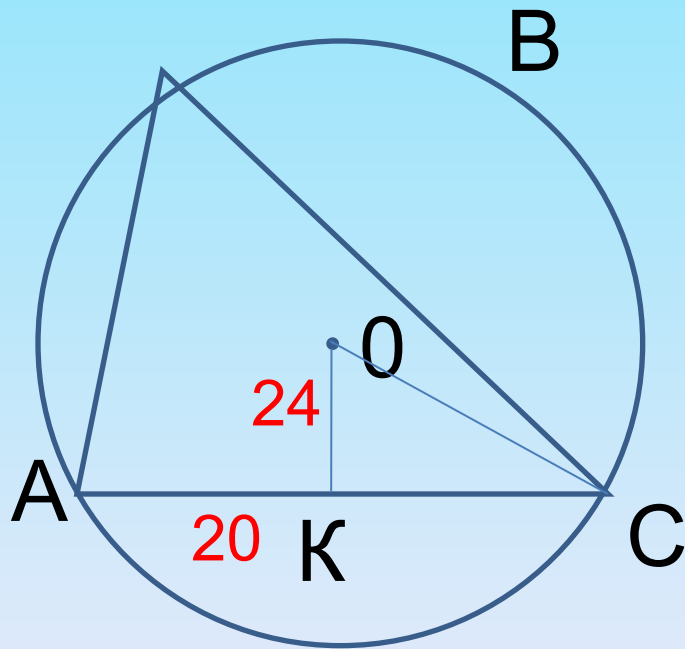
$$d = AC$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{AC}$$

$$AC = 35$$

№4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.



Т.к. $OK \perp AC$, то
 $AK=KC=10$

по т. Пифагора

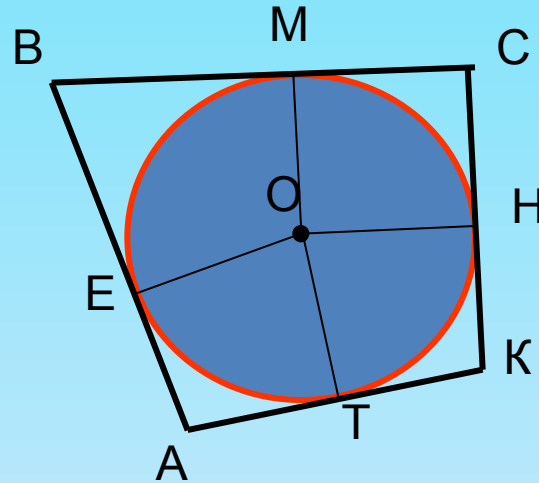
$$OC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$$

Домашнее задание

В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r . Найдите периметр треугольника, если:
а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания

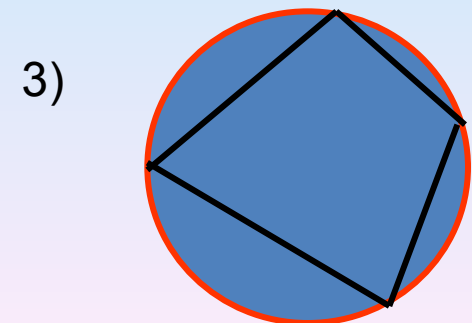
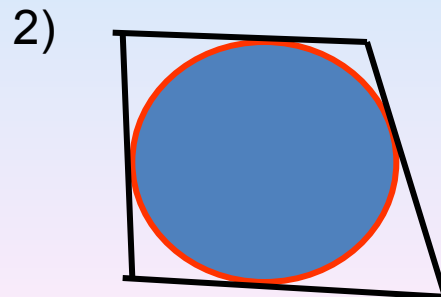
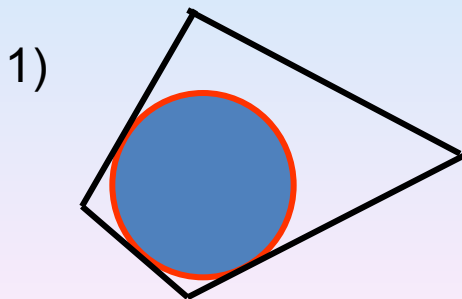
Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении $12 : 5$, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

Окружность, вписанная в четырёхугольник

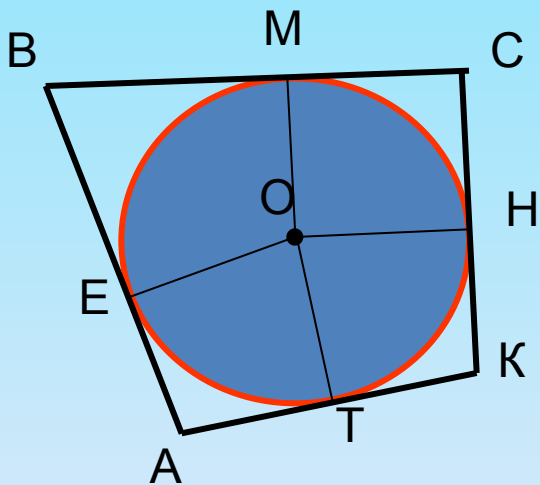


Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:



Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** (в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

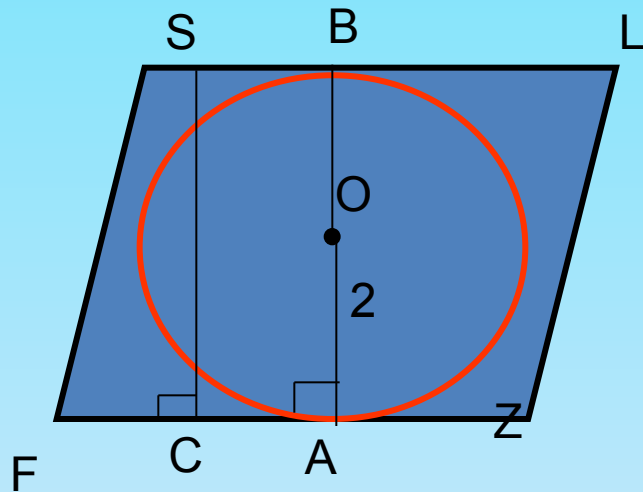


$$AB + CK = BC + AK.$$

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

(доказательство – в учебнике № 724)

Задача: в ромб, острый угол которого 60° , вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(O; 2 см) вписана в ромб FSLZ, $\angle F = 60^\circ$.

Найти: P_{FSLZ}

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит, $AB \perp FZ$, $AB = 2r = 4$ см – диаметр.

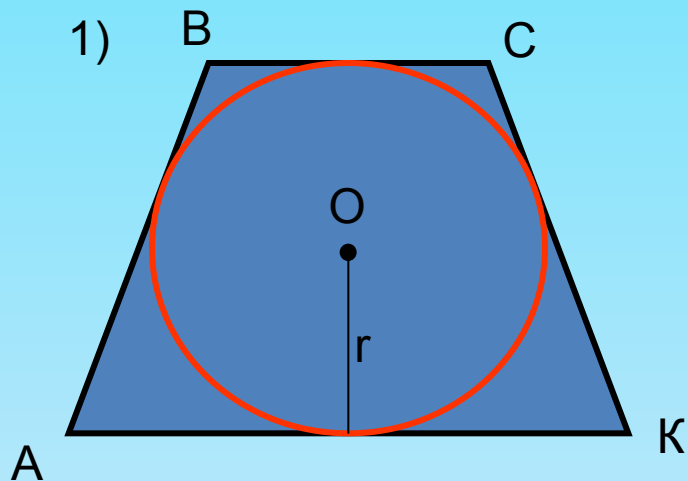
Проведём $SC \perp FZ$, $SC = AB$ (как перпендикуляры между параллельными прямыми), $SC = 4$ см

$$\triangle FSC \text{ – прямоугольный, } \sin F = \frac{SC}{FS}; \sin 60^\circ = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

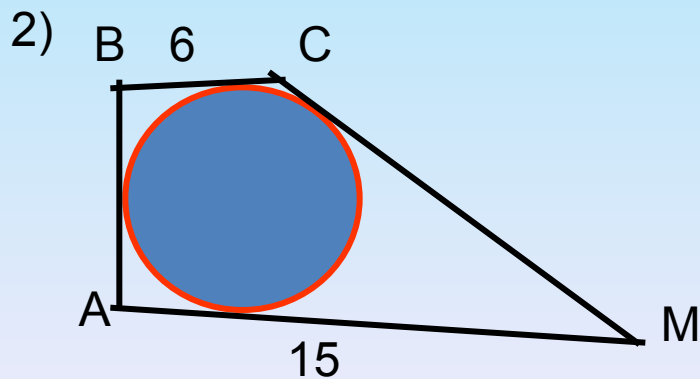
Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см

Реши задачи



Дано: Окр.(O; r) вписана в ABCK,
 $P_{ABCK} = 10$

Найти: BC + AK



Дано: ABCM описан около Окр.(O; r)
BC = 6, AM = 15,

$$CM = 2 AB$$

Найти: AB, CM

