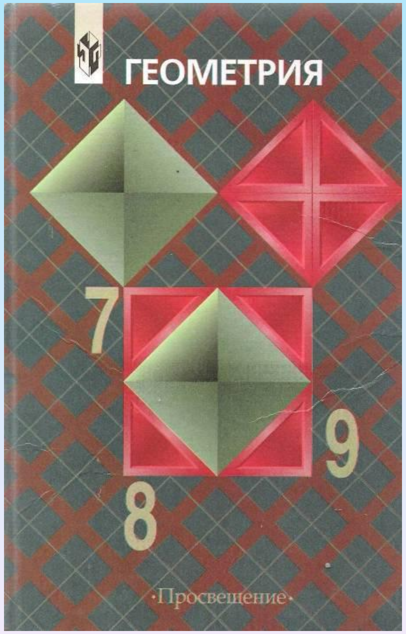
8 класс

Геометрия



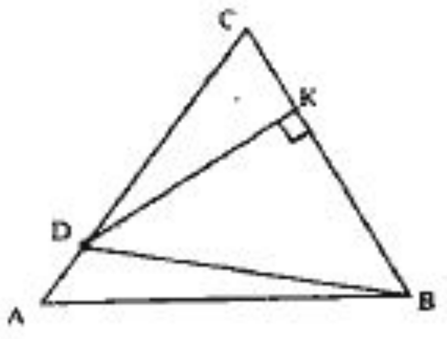
Домашнее задание

Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: а) AD и CD, если $BD=5$ см, $AC=8{,}5$ см; б) AC, если $BD=11{,}4$ см, $AD=3{,}2$ см.

Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r=5$ см, $\angle A=60°$; б) r, если $OA=14$ дм, $\angle A=90°$.

Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если: а) $\angle AMB=136°$; б) $\angle AMB=111°$.

Серединный перпендикуляр к стороне *BC* треугольника *ABC* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найдите: а) *AD* и *CD*, если *BD*=5 см, *AC*=8,5 см; б) *AC*, если *BD*=11,4 см, *AD*=3,2 см.



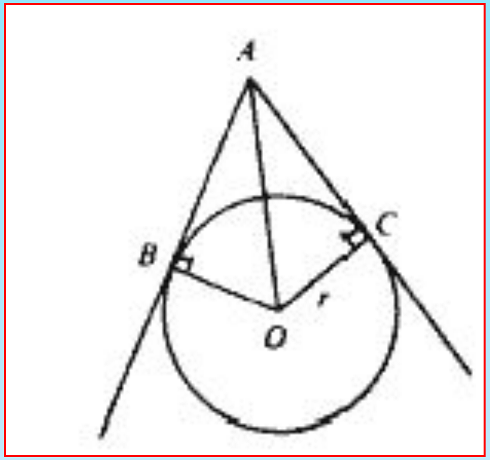
Дано: ΔABC;
$DK \perp BC$, CK = KB;
а) AD и CD = ?
б) AC = ?

<u>Решение</u>:
а) BD = 5см, AC = 8,5см,
DK – серединный перпендикуляр к BC, следовательно, BD = DC (по св-ву), т.е. DC = 5см, тогда
AD = AC –DC = 8,5 – 5 = 3,5см;
б) BD = 11,4см, AD = 3,2 см,

DK – серединный перпендикуляр к BC, следовательно,
DC = BD = 11,4см;
AC = DC + AD = 3,2 + 11,4 = 14,6см.

Ответ: а) 5см; 3,5см; б) 11,4см и 14,6см.

Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r = 5$ см, $\angle A = 60°$; б) r, если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90°$.



Дано: AB, AC – касательные к Окр (O;r).
Найти: а) OA; б) r.

Решение:

а) $r = 5$см, $\angle A = 60°$ (усл.);

1) $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, следовательно, AO является биссектрисой.

2) В ΔACO:

$\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AO = 2 \cdot 5$, $OC = 5$см, т.е.

$AO = 2OC$ (из прямоуг. треугольника AOC),

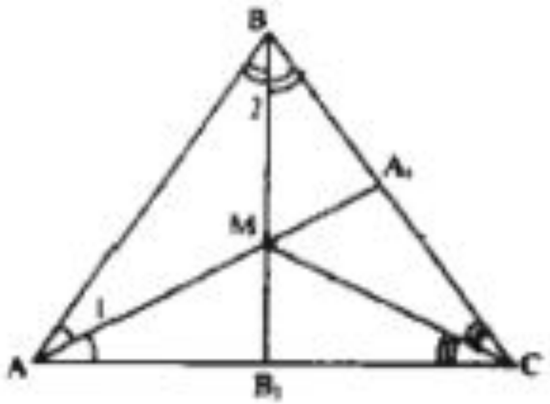
$AO = 2 \cdot 5 = 10$см;

б) AO – биссектриса, тогда в ΔAOC: $\angle A = 45°$, $\angle C = 90°$,

$\angle O = 45°$, т.е. $AC = OC = r$;

$14^2 = 2r^2$; $r^2 = 98$ (т. Пифагора), $r = 7\sqrt{2}$.

Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если: а) $\angle AMB = 136°$; б) $\angle AMB = 111°$.



Дано:

ΔABC;

AA_1; BB_1 – биссектрисы;

$AA_1 \cap BB_1 = M$.

Найти: $\angle ACM$ и $\angle BCM$.

<u>Решение</u>:

а) $\angle AMB = 136°$

1) M – точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1, следовательно, CM – биссектриса $\angle ACB$ и $\angle ACM = \angle BCM$;

2) ΔABM: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, т.е.

$\angle 1 + \angle 2 = 180° - 136° = 44°$;

3) ΔABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$;

$\angle C = 180° - (\angle B + \angle A)$, $2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 2 \cdot 144° = 88°$;

$\angle C = 180° - 88° = 92°$, т.е. $\angle BCM = \angle ACM = 46°$;

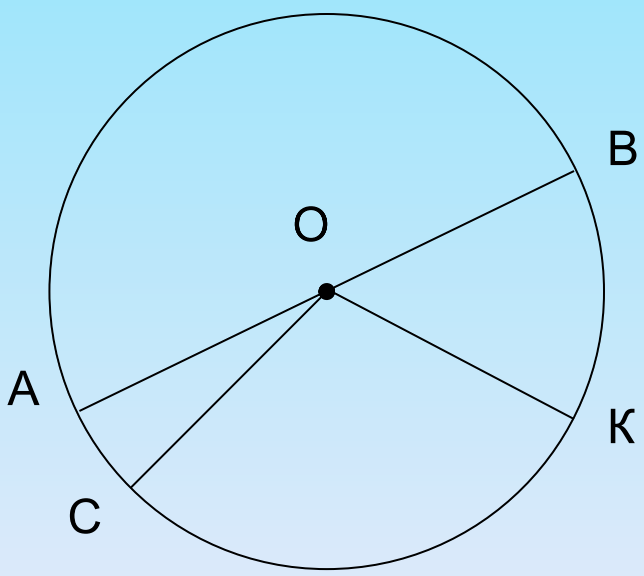
б) $\angle AMB = 111°$.

Имеем: $\angle C = 180° - 2 \cdot (180° - 111°)) = 42°$, т.е.

$\angle ACM = \angle BCM = 21°$.

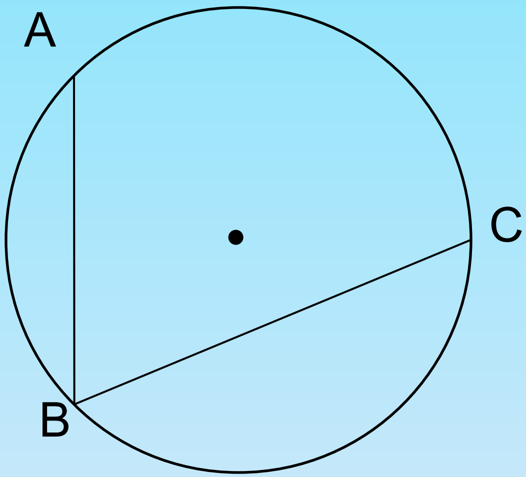
Ответ: а) 46°; 46°; б) 21°; 21°.

Центральный угол

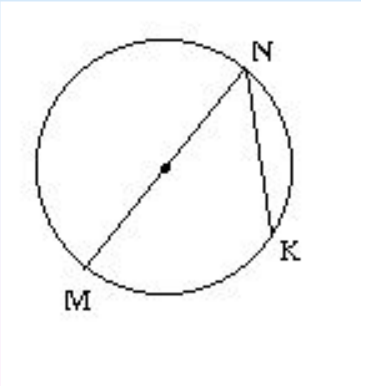


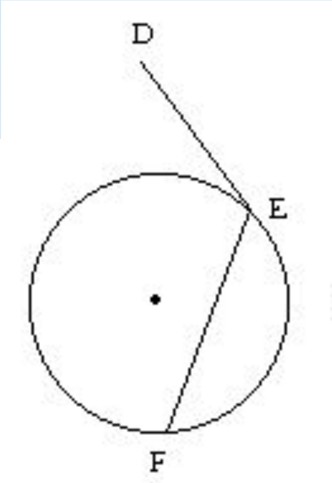
- Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.
- Градусная мера центрального угла соответствует градусной мере дуги, на которую он опирается (если дуга меньше полуокружности).
- Найдите градусную меру угла АОВ.

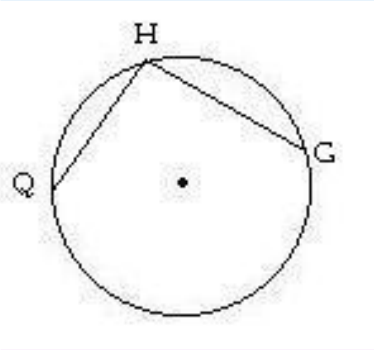
Вписанный угол.

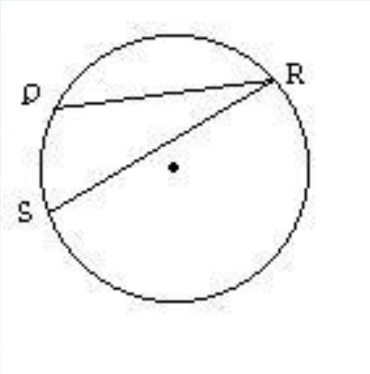


- Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным в окружность.
- Какие из углов являются вписанными в окружность?
- Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла

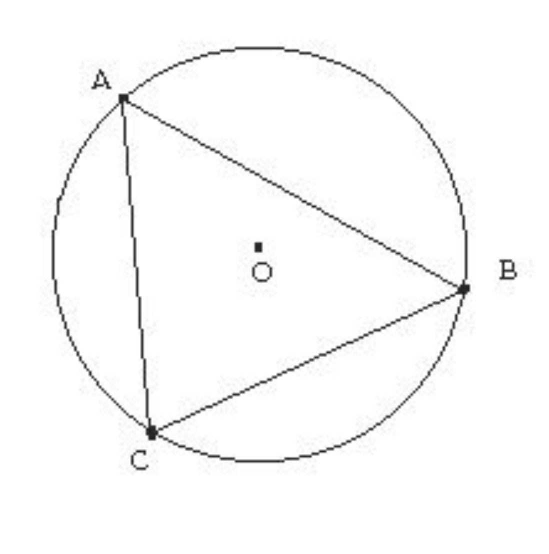




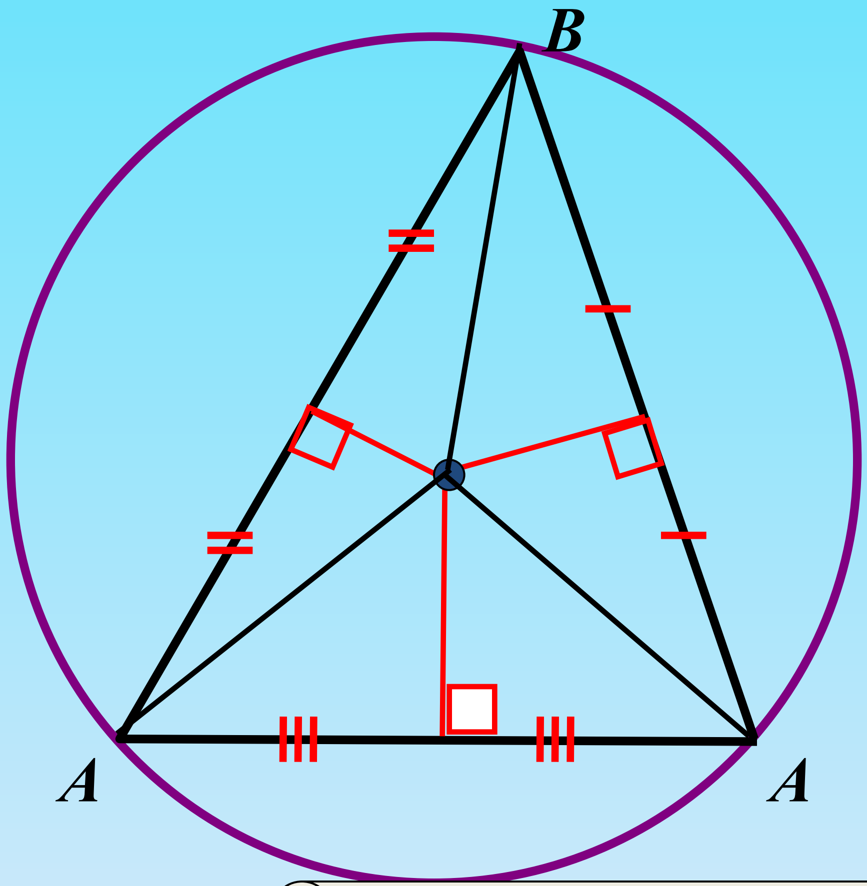




Описанная окружность. Треугольник, вписанный в окружность.



- Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины. В этом случае треугольник называется вписанным в окружность.
- Стороны вписанного треугольника являются хордами описанной около него окружности.
- Где лежит центр окружности, описанной около треугольника?



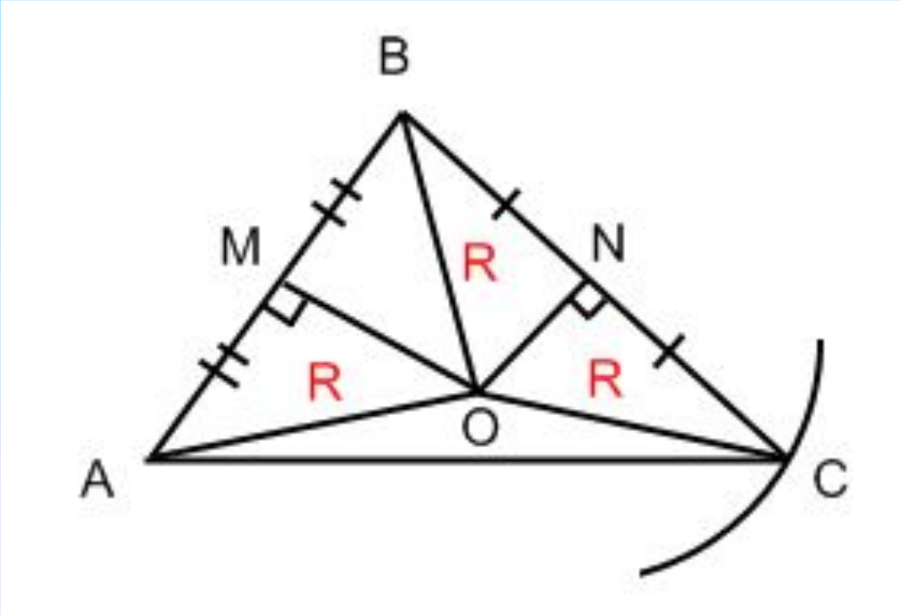
Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника.

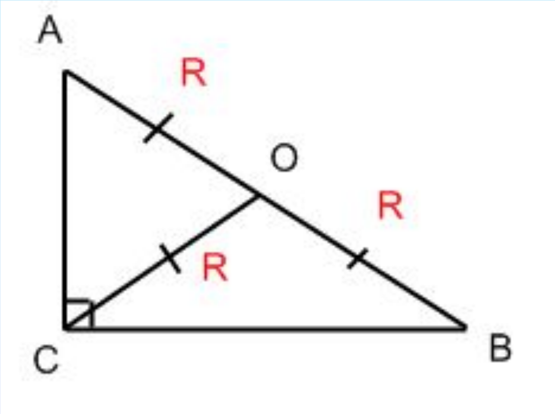
Треугольник. Описанная окружность.

1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.

3) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.



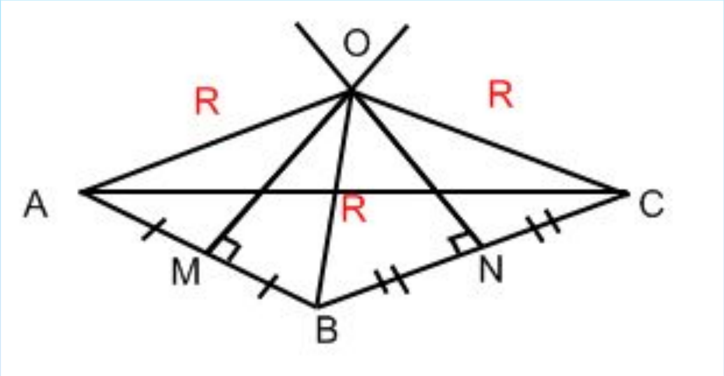


$$R = \frac{1}{2} AB$$

Треугольник. Описанная окружность

4) R – радиус описанной окружности
R=OA=OB=OC в любом треугольнике.

5) Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, находится вне треугольника.

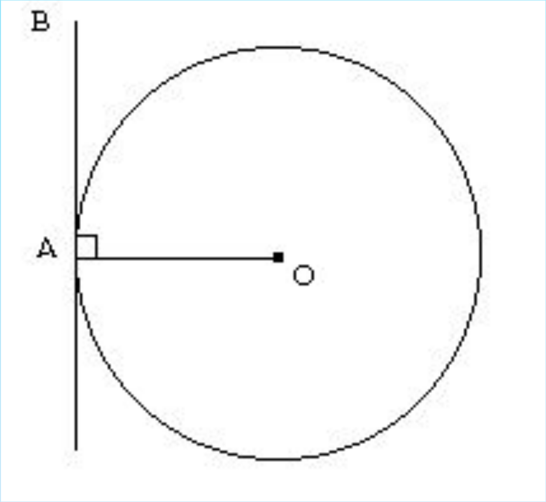


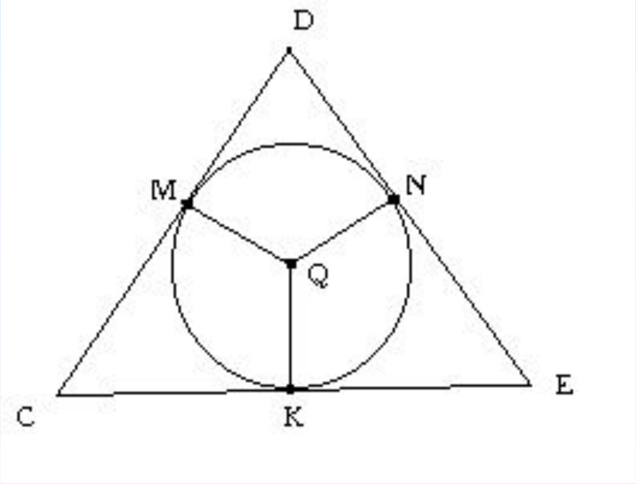
$$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$$ - для правильного треугольника

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}$$

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

Касательная к окружности

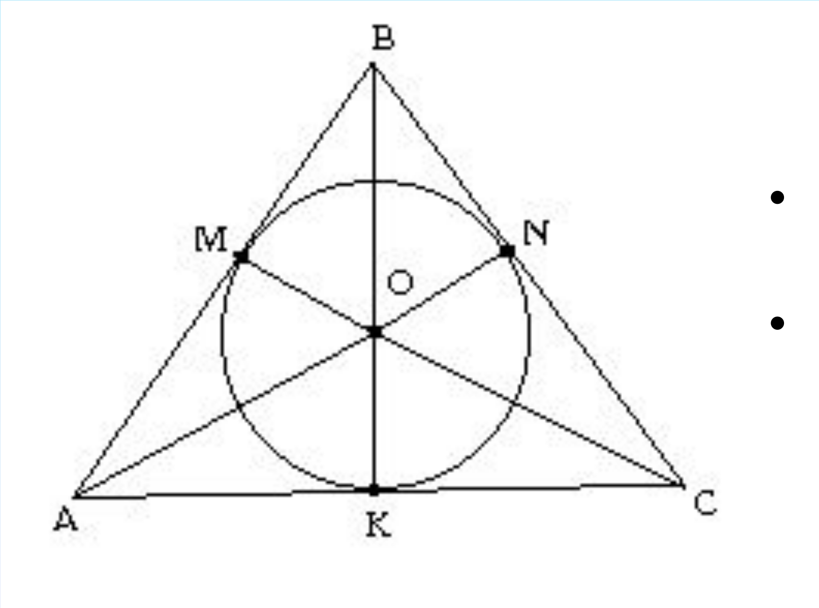




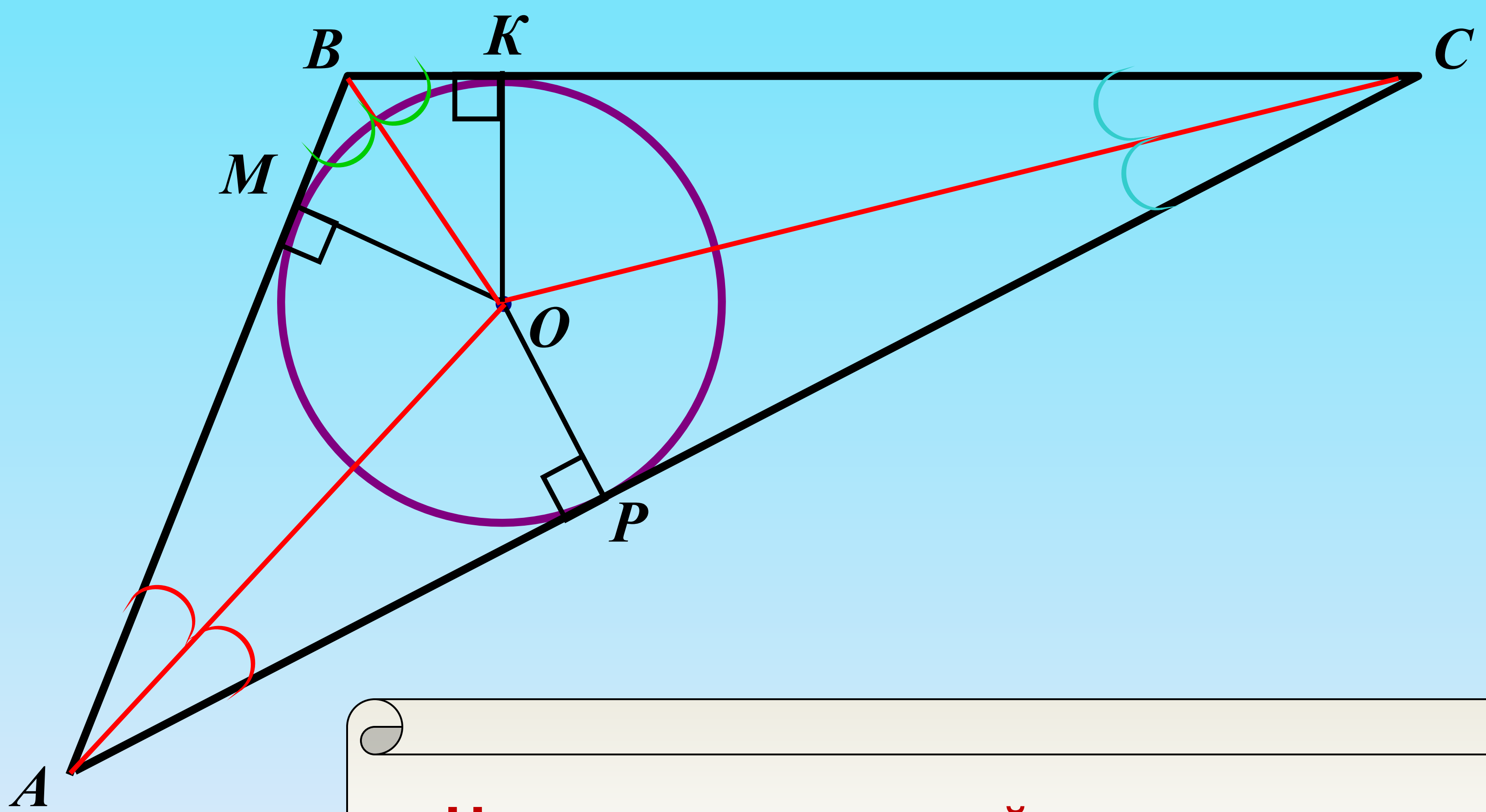
- Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности Общая точка окружности и касательной называется точкой касания.

- Что можно сказать о сторонах треугольника CDE по отношению к окружности?

Окружность, вписанная в треугольник.

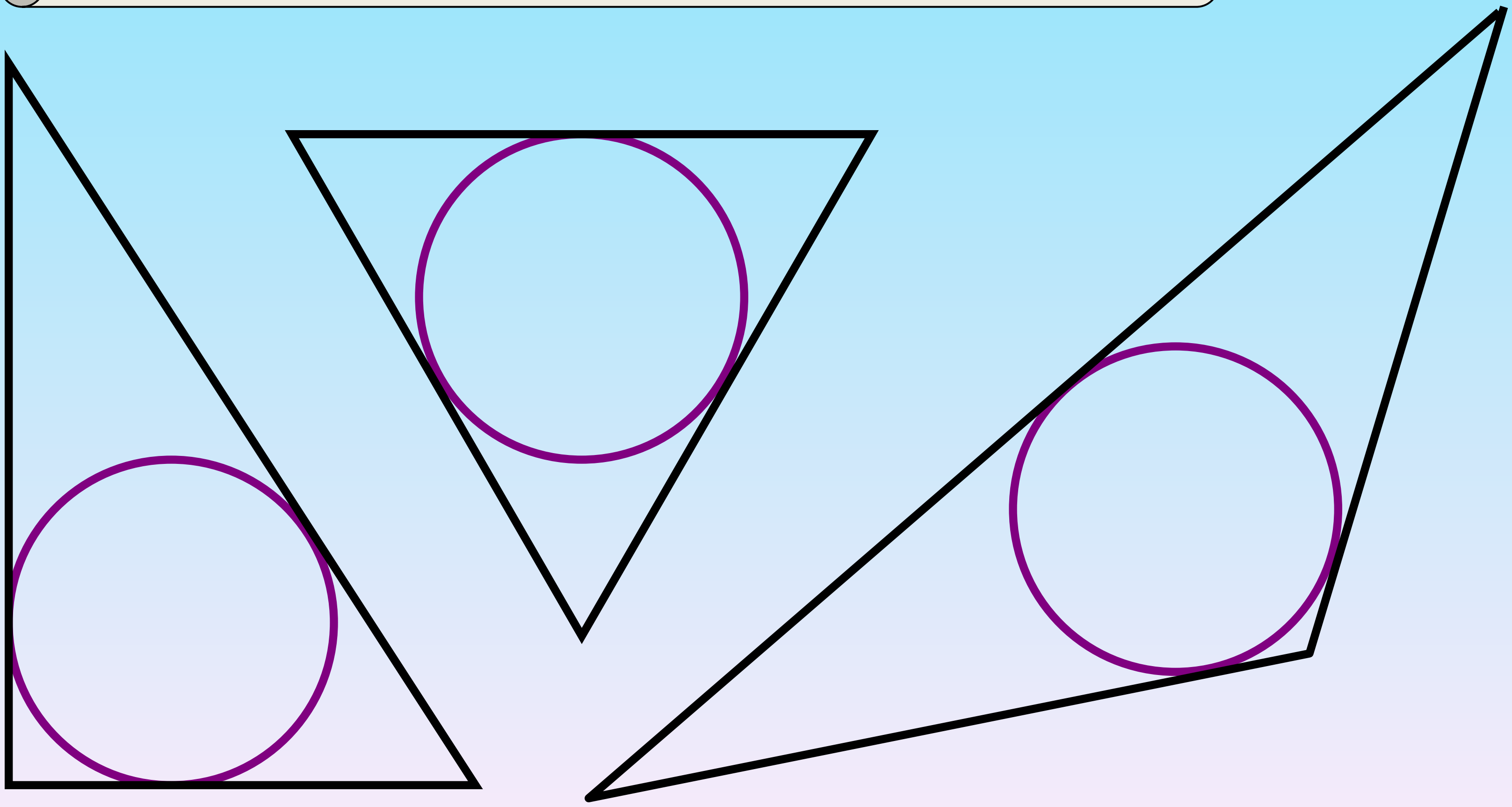


- Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон. В этом случае треугольник называется описанным около окружности.
- Где лежит центр окружности, вписанной в треугольник?
- Треугольник АВС-описанный около окружности. Какие из треугольников АОМ, МОВ, ВОN, NOC, COK, KOA-равные?



Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис треугольника.

В любой треугольник можно вписать окружность.



Треугольник. Вписанная окружность.

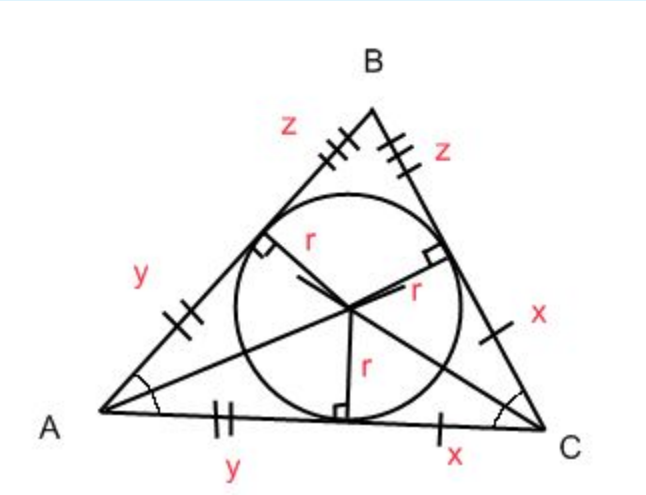
1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.

2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.

3) $r = \dfrac{S}{p}$ p – полупериметр треугольника, r – радиус вписанной окружности

В правильном треугольнике

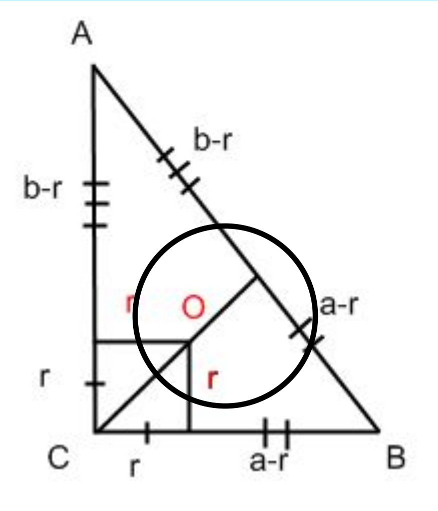
$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$



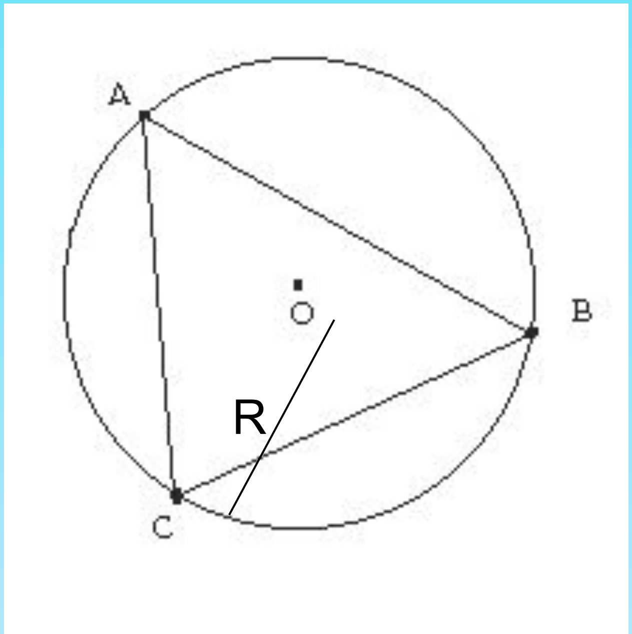
С – гипотенуза

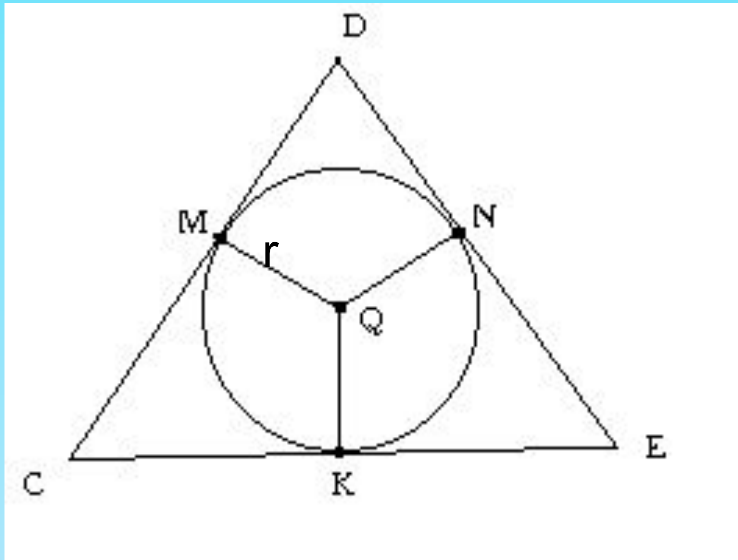
$C = p - r$

p - полупериметр



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$





$$r = \frac{S}{p}$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

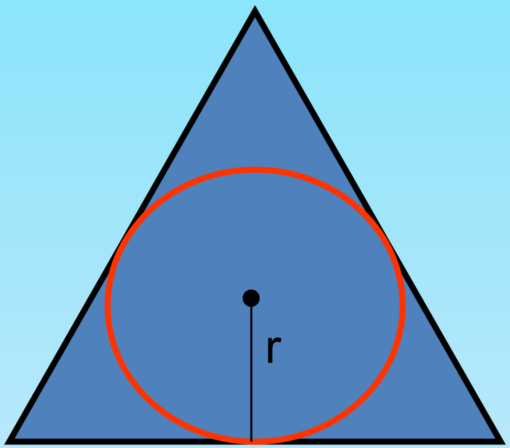
$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

В правильном треугольнике

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

№ 1. В равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

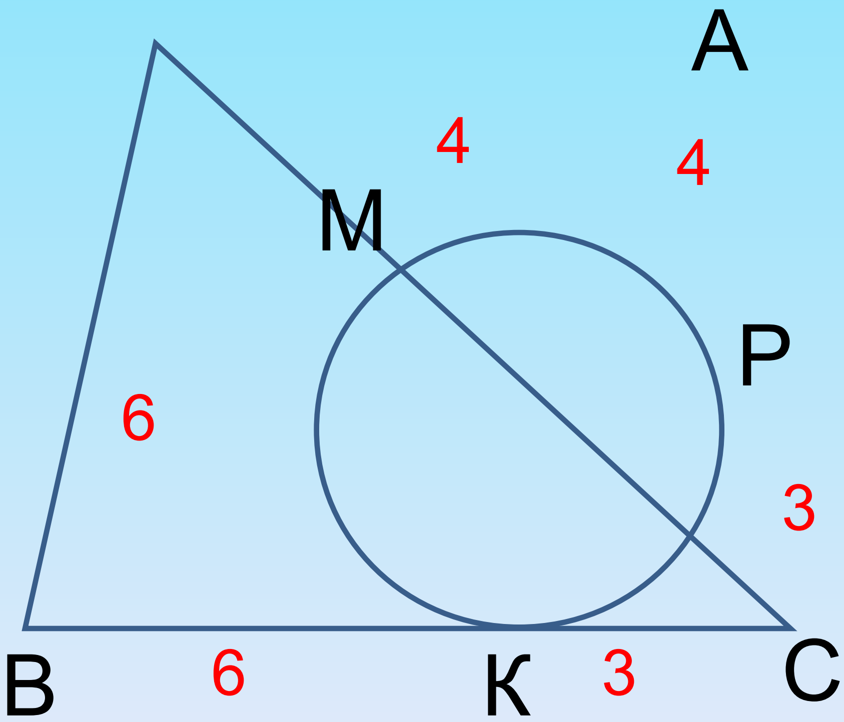
P = ½ ·4 · 3 = ½ · 12 = 6(см) - полупериметр

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (см)}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (см)

№2. Окружность, вписанная в треугольник АВС, касается сторон АВ, ВС и АС в точках М, К и Р соответственно. Найдите периметр треугольника АВС, если АР = 4 см, ВМ = 6 см, СК = 3 см.



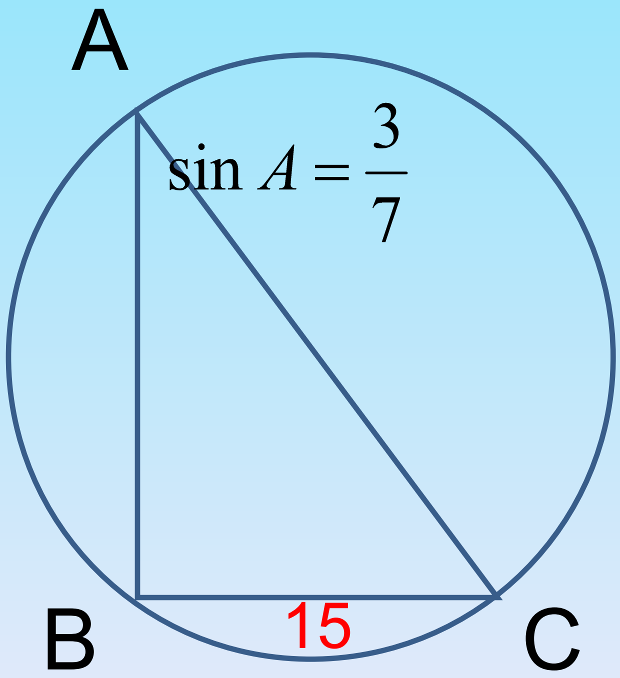
Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны.

ВМ = ВК
АМ = АР
СР = СК

АВ = 10
АС = 7
ВС = 9

Р = 10 + 7 + 9 = 26

№3. Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если синус одного из углов треугольника равен 3/7, а противолежащий этому углу катет равен 15 см.



Центр описанной около п/у треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.

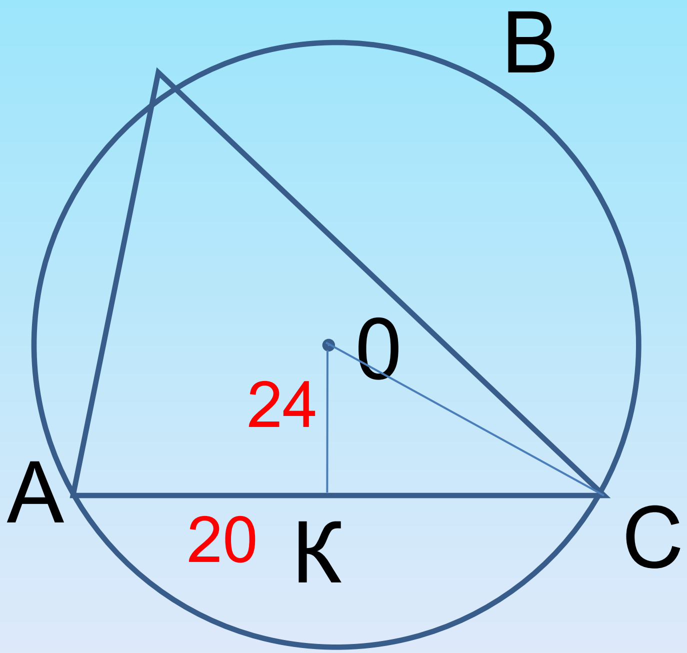
d = AC

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{AC}$$

AC = 35

№4. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.



Т.к. $OK \perp AC$, то $AK=KC=10$

по т. Пифагора

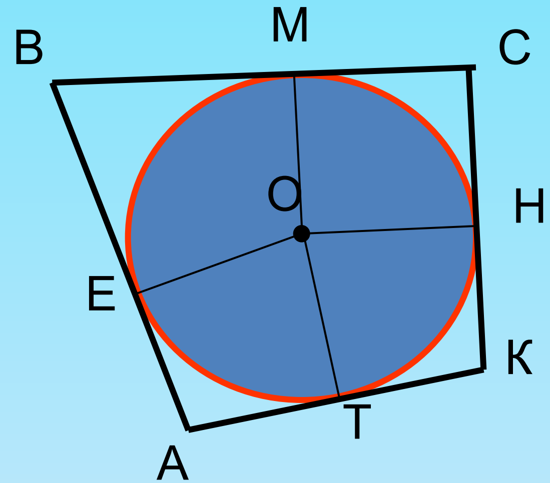
$$OC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$$

Домашнее задание

В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания

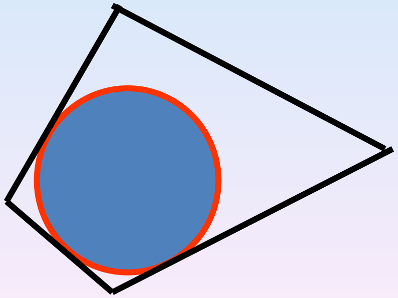
Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

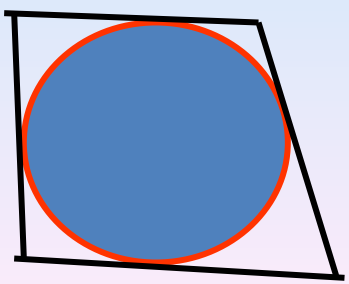
Окружность, вписанная в четырёхугольник

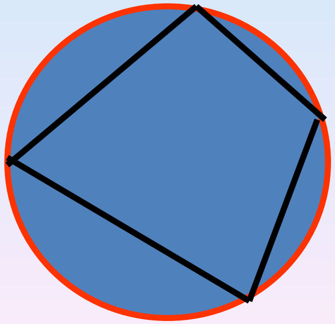


Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

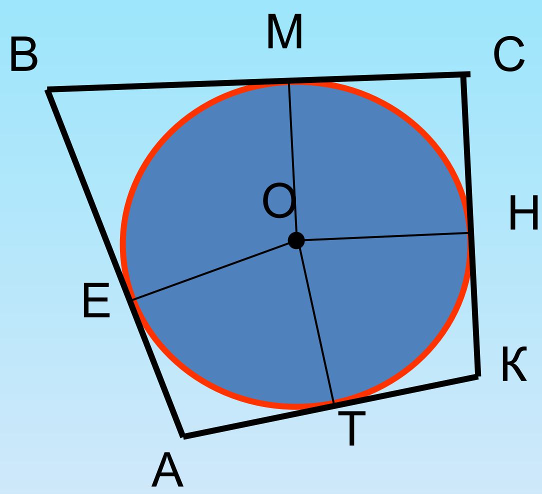
На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:

1) 

2) 

3) 

Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** (в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

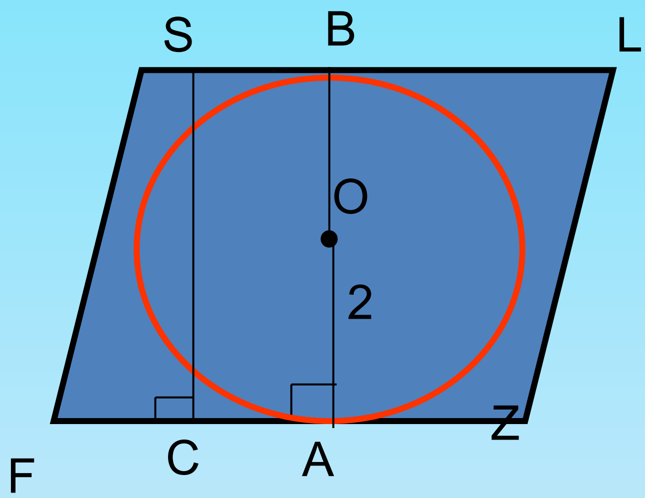


AB + CK = BC + AK.

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

(доказательство – в учебнике № 724)

Задача: в ромб, острый угол которого 60^0, вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(О; 2 см) вписана в ромб FSLZ, $\angle F = 60^0$.

Найти: P_{FSLZ}

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит, $AB \perp FZ$, $AB = 2r = 4$см – диаметр.

Проведём $SC \perp FZ$, SC = AB (как перпендикуляры между параллельными прямыми), SC = 4см

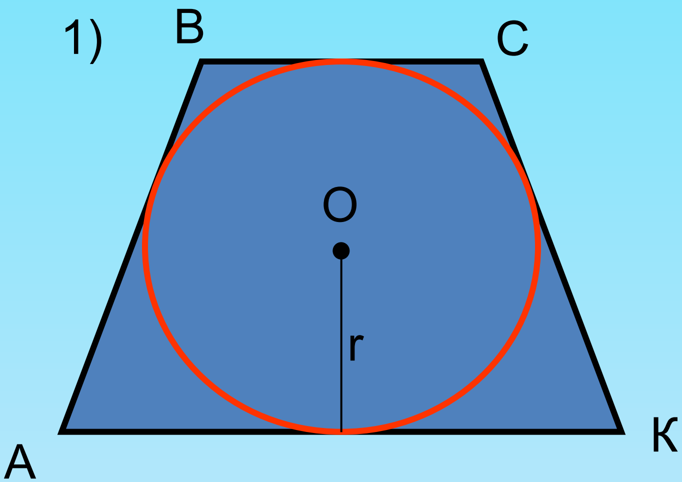
△FSC – прямоугольный, $SinF = \frac{SC}{FS}; Sin60^0 = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$ (см).

Ответ: $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см

Реши задачи

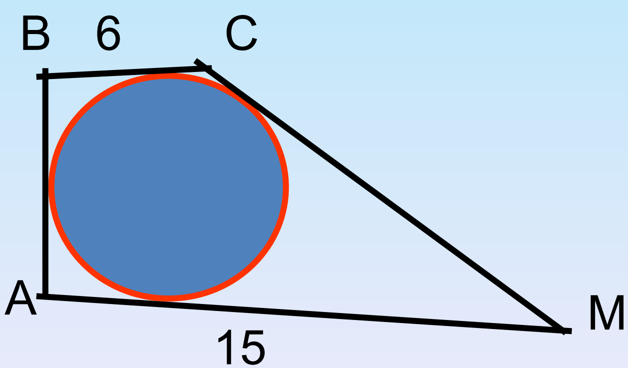
1)



Дано: Окр.(O; r) вписана в ABCK,
$P_{ABCK} = 10$

Найти: BC + AK

2)



Дано: ABCM описан около Окр.(O; r)
BC = 6, AM = 15,

CM = 2 AB

Найти: AB, CM