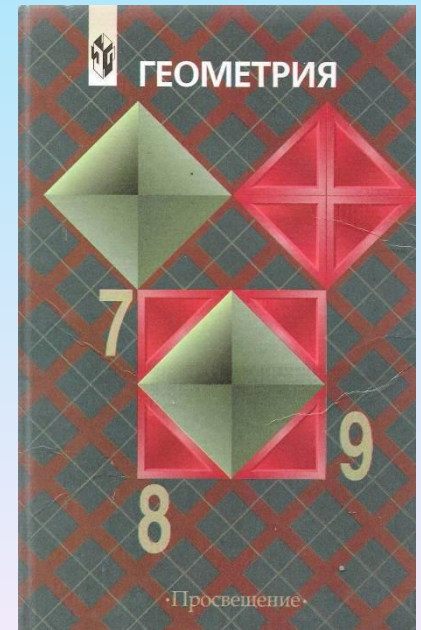


# 8 класс

# Геометрия



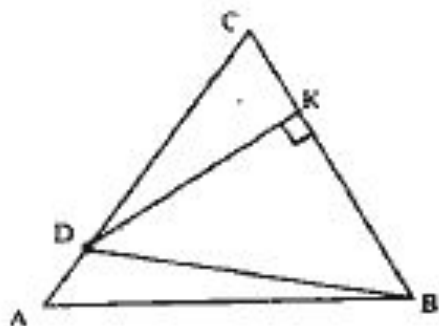
# Домашнее задание

Серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите: а)  $AD$  и  $CD$ , если  $BD=5$  см,  $AC=8,5$  см; б)  $AC$ , если  $BD=11,4$  см,  $AD=3,2$  см.

Стороны угла  $A$  касаются окружности с центром  $O$  радиуса  $r$ . Найдите: а)  $OA$ , если  $r=5$  см,  $\angle A=60^\circ$ ; б)  $r$ , если  $OA=14$  дм,  $\angle A=90^\circ$ .

Биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите углы  $ACM$  и  $BCM$ , если: а)  $\angle AMB=136^\circ$ ; б)  $\angle AMB=111^\circ$ .

Серединный перпендикуляр к стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите: а)  $AD$  и  $CD$ , если  $BD = 5$  см,  $AC = 8,5$  см; б)  $AC$ , если  $BD = 11,4$  см,  $AD = 3,2$  см.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  
 $DK \perp BC$ ,  $CK = KB$ ;  
а)  $AD$  и  $CD = ?$   
б)  $AC = ?$

Решение:

а)  $BD = 5$  см,  $AC = 8,5$  см,

$DK$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ , следовательно,  $BD = DC$  (по св-ву), т.е.  $DC = 5$  см, тогда

$AD = AC - DC = 8,5 - 5 = 3,5$  см;

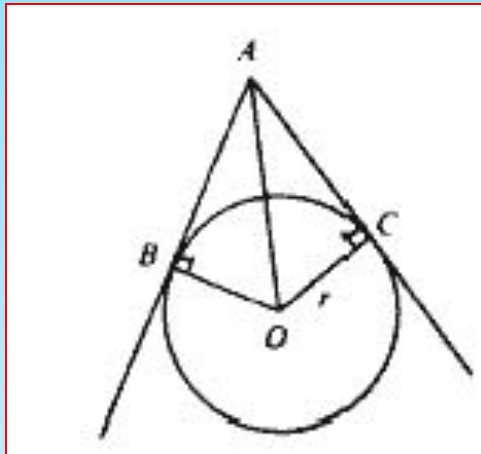
б)  $BD = 11,4$  см,  $AD = 3,2$  см,

$DK$  – серединный перпендикуляр к  $BC$ , следовательно,  
 $DC = BD = 11,4$  см;

$AC = DC + AD = 3,2 + 11,4 = 14,6$  см.

Ответ: а) 5 см; 3,5 см; б) 11,4 см и 14,6 см.

Стороны угла  $A$  касаются окружности с центром  $O$  радиуса  $r$ . Найдите: а)  $OA$ , если  $r = 5$  см,  $\angle A = 60^\circ$ ;  
б)  $r$ , если  $OA = 14$  дм,  $\angle A = 90^\circ$ .



Дано:  $AB, AC$  – касательные к  $\text{Окр}(O;r)$ .  
Найти: а)  $OA$ ; б)  $r$ .

Решение:

а)  $r = 5$  см,  $\angle A = 60^\circ$  (усл.);

1)  $OB \perp AB, OC \perp AC$ , следовательно,  $AO$  является биссектрисой.

2) В  $\triangle ACO$ :

$\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, AO = 2 \cdot 5, OC = 5$  см, т.е.

$AO = 2OC$  (из прямоуг. треугольника  $AOC$ ),

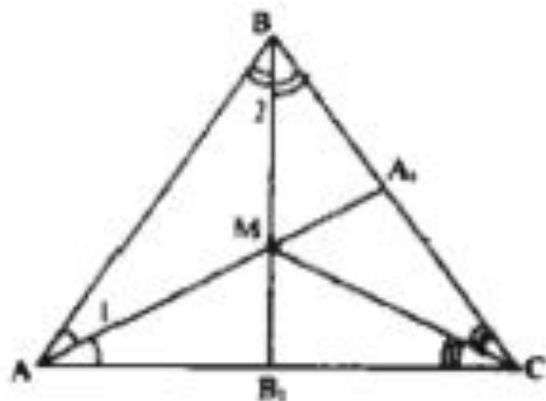
$AO = 2 \cdot 5 = 10$  см;

б)  $AO$  – биссектриса, тогда в  $\triangle AOC$ :  $\angle A = 45^\circ, \angle C = 90^\circ,$

$\angle O = 45^\circ$ , т.е.  $AC = OC = r$ ;

$14^2 = 2r^2; r^2 = 98$  (т. Пифагора),  $r = 7\sqrt{2}$ .

Биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Найдите углы  $ACM$  и  $BCM$ , если:  
 а)  $\angle AMB = 136^\circ$ ; б)  $\angle AMB = 111^\circ$ .



Дано:

$\triangle ABC$ ;

$AA_1$ ;  $BB_1$  – биссектрисы;

$AA_1 \cap BB_1 = M$ .

Найти:  $\angle ACM$  и  $\angle BCM$ .

Решение:

а)  $\angle AMB = 136^\circ$

1)  $M$  – точка пересечения биссектрис  $AA_1$  и  $BB_1$ , следовательно,  $CM$  – биссектриса  $\angle ACB$  и  $\angle ACM = \angle BCM$ ;

2)  $\triangle ABM$ :  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , т.е.

$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$ ;

3)  $\triangle ABC$ :  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ;

$\angle C = 180^\circ - (\angle B + \angle A)$ ,  $2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$ ;

$\angle C = 180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$ , т.е.  $\angle BCM = \angle ACM = 46^\circ$ ;

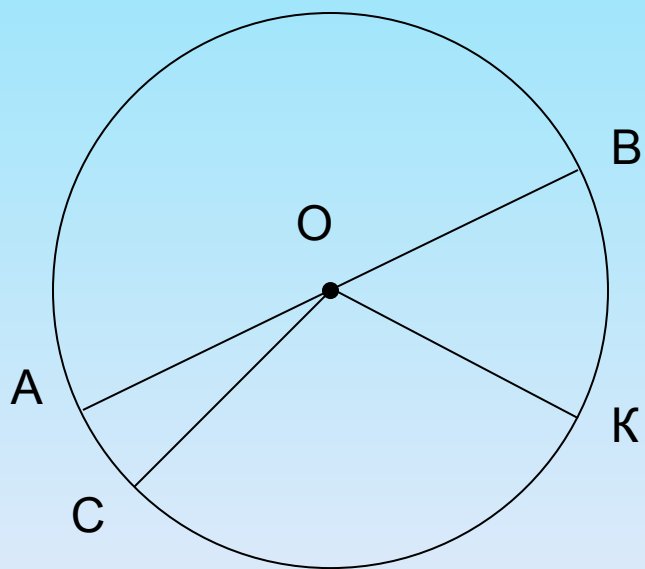
б)  $\angle AMB = 111^\circ$ .

Имеем:  $\angle C = 180^\circ - 2 \cdot (180^\circ - 111^\circ) = 42^\circ$ , т.е.

$\angle ACM = \angle BCM = 21^\circ$ .

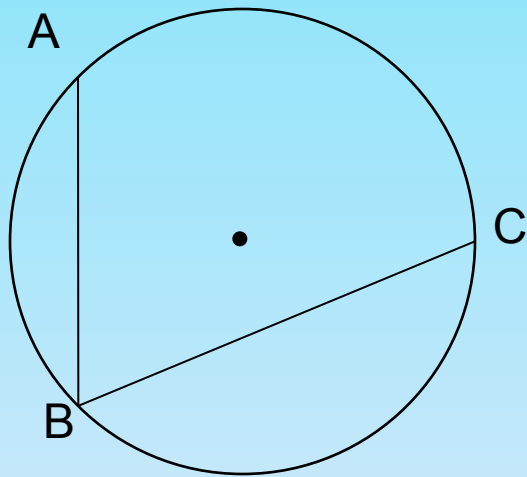
Ответ: а)  $46^\circ$ ;  $46^\circ$ ; б)  $21^\circ$ ;  $21^\circ$ .

# Центральный угол

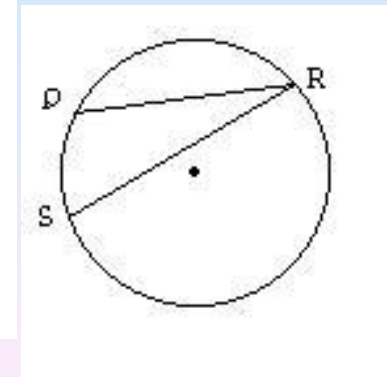
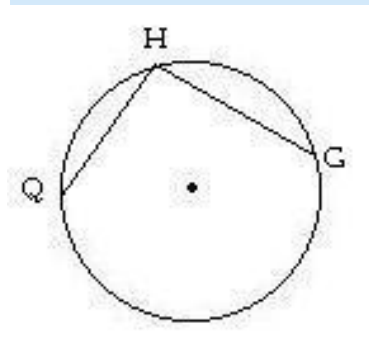
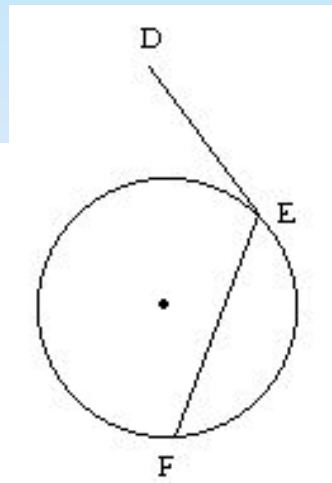
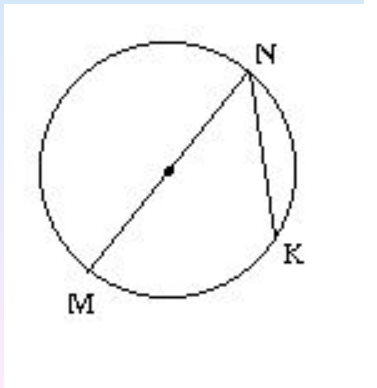


- Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.
- Градусная мера центрального угла соответствует градусной мере дуги, на которую он опирается (если дуга меньше полуокружности).
- Найдите градусную меру угла AOB.

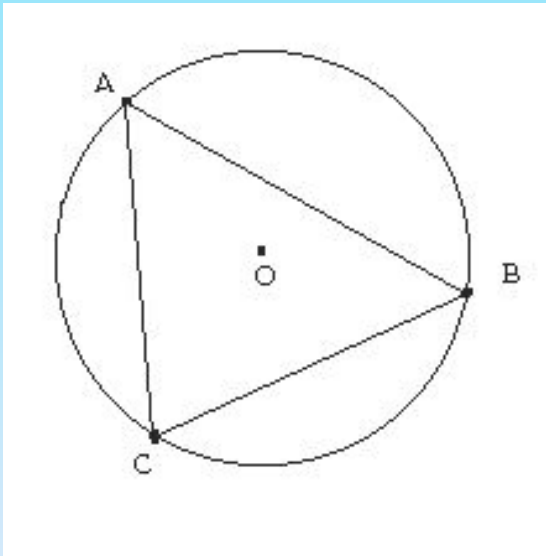
# Вписанный угол.



- Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется вписанным в окружность.
- Какие из углов являются вписанными в окружность?
- Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла

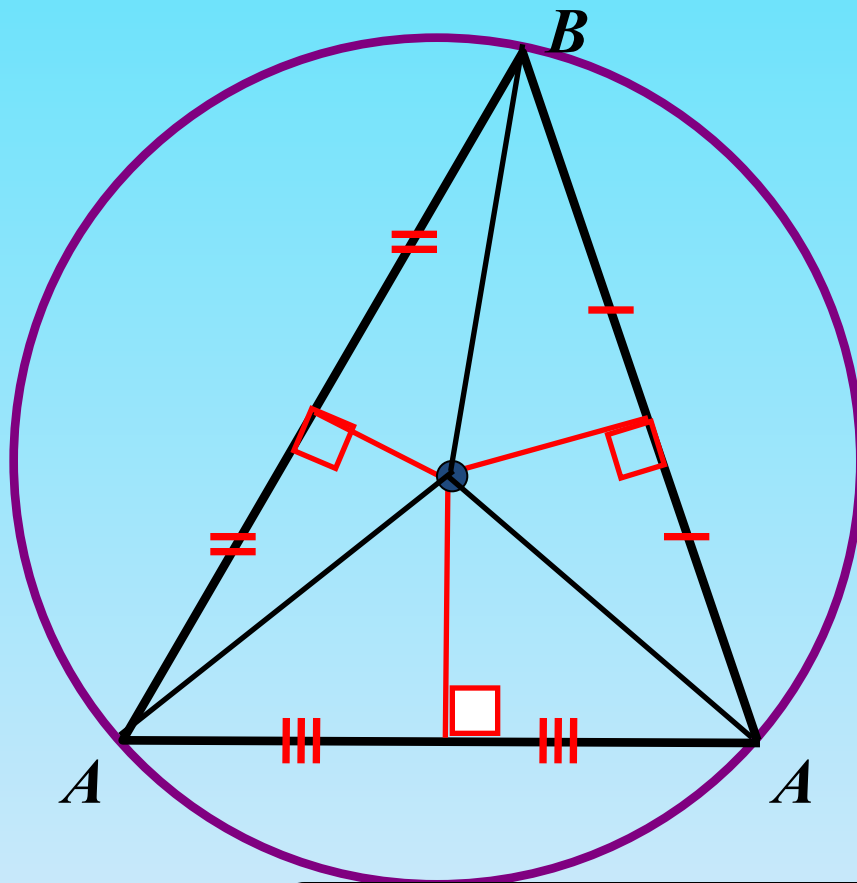


# Описанная окружность. Треугольник, вписанный в окружность.



- Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины. В этом случае треугольник называется вписанным в окружность.
- Стороны вписанного треугольника являются хордами описанной около него окружности.
- Где лежит центр окружности, описанной около треугольника?

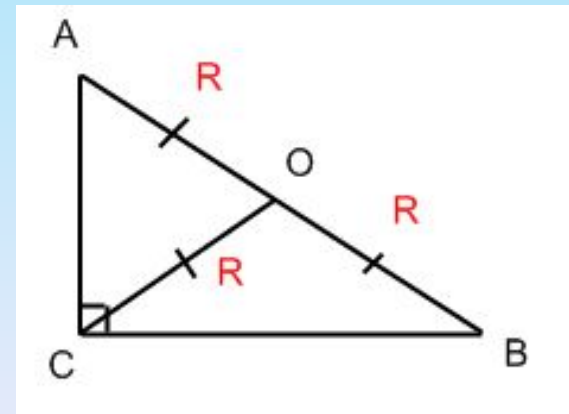
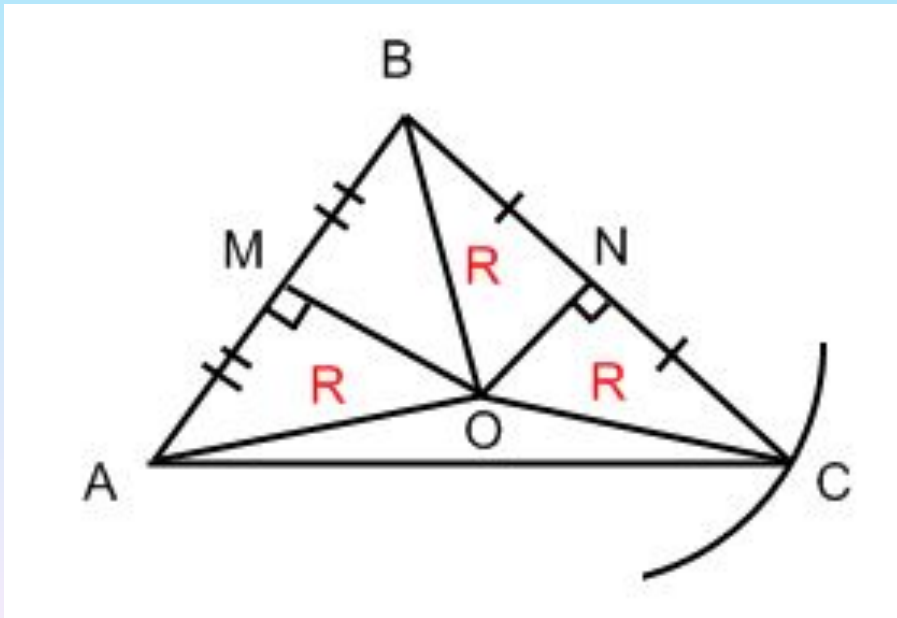




**Центром описанной около  
треугольника окружности является  
точка пересечения серединных  
перпендикуляров треугольника.**

# Треугольник. Описанная окружность.

- 1) Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
- 2) Центр описанной окружности равноудалён от всех вершин треугольника.
- 3) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы.



$$R = \frac{1}{2} AB$$

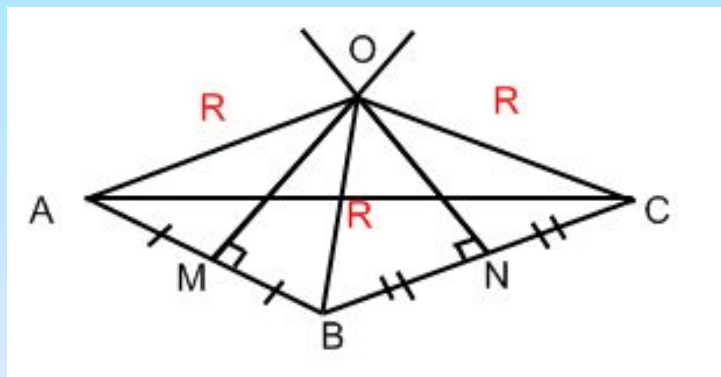
## Треугольник. Описанная окружность

4)  $R$  – радиус описанной окружности  
 $R=OA=OB=OC$  в любом треугольнике.

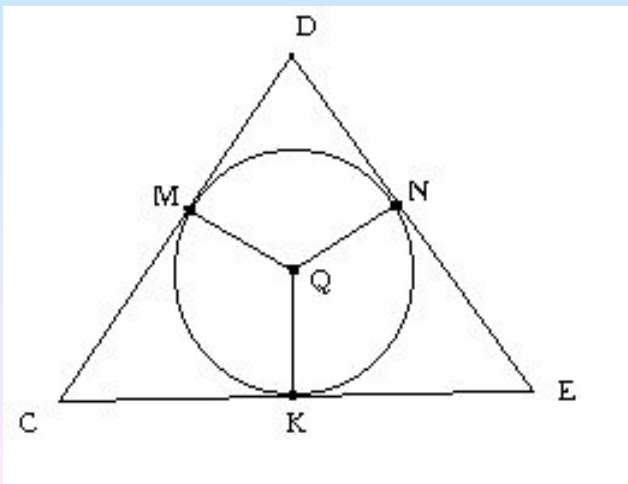
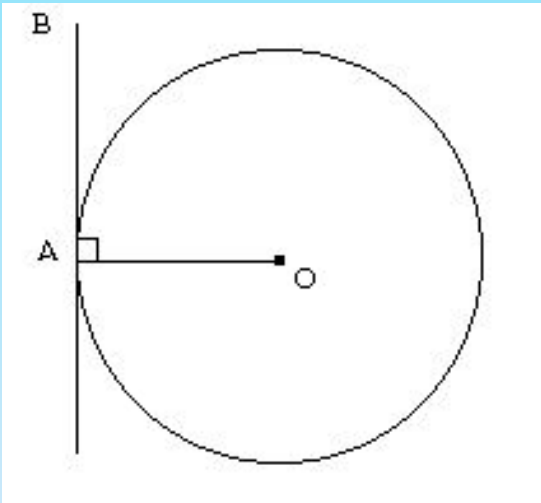
5) Центр окружности, описанной около тупого треугольника, находится вне треугольника.

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{- для правильного треугольника}$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

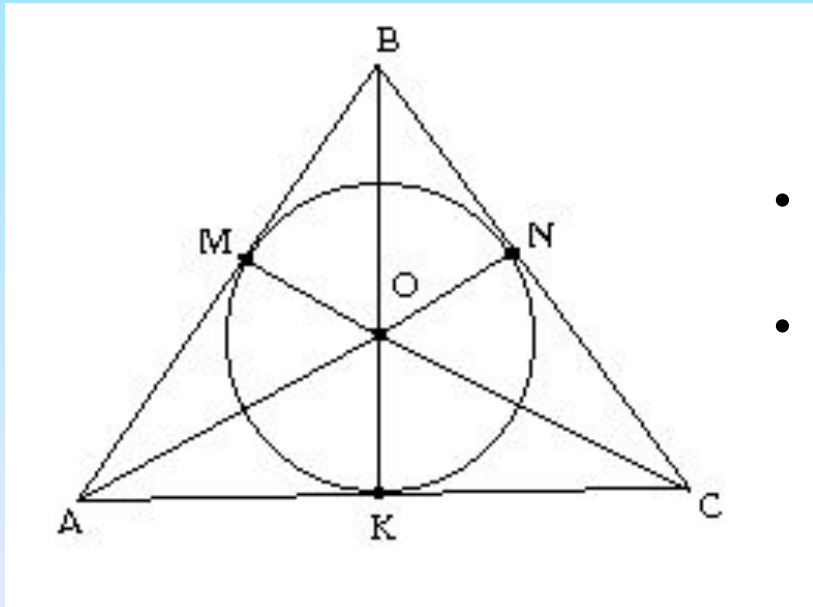


# Касательная к окружности

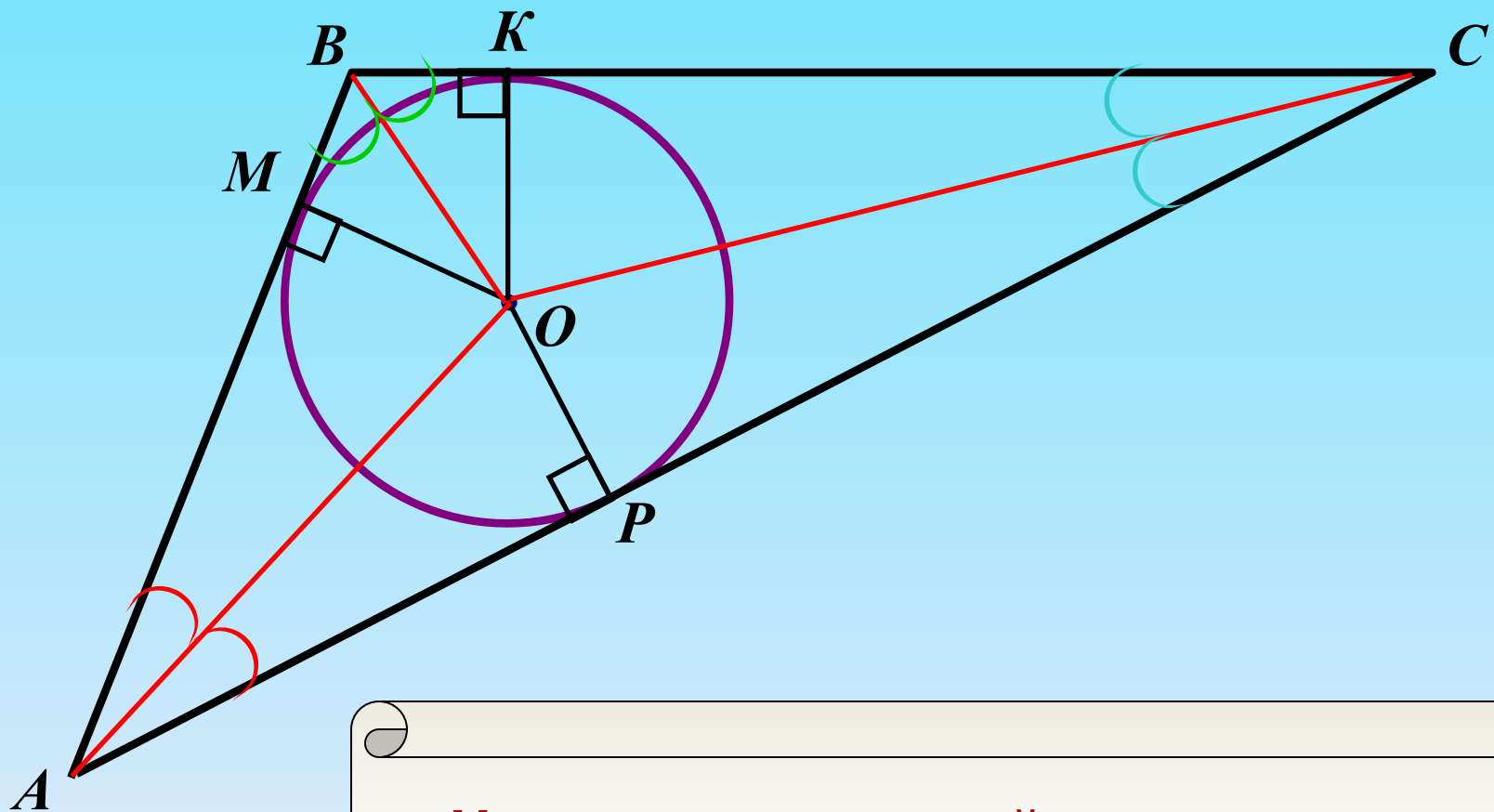


- Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности. Общая точка окружности и касательной называется точкой касания.
- Что можно сказать о сторонах треугольника CDE по отношению к окружности?

# Окружность, вписанная в треугольник.

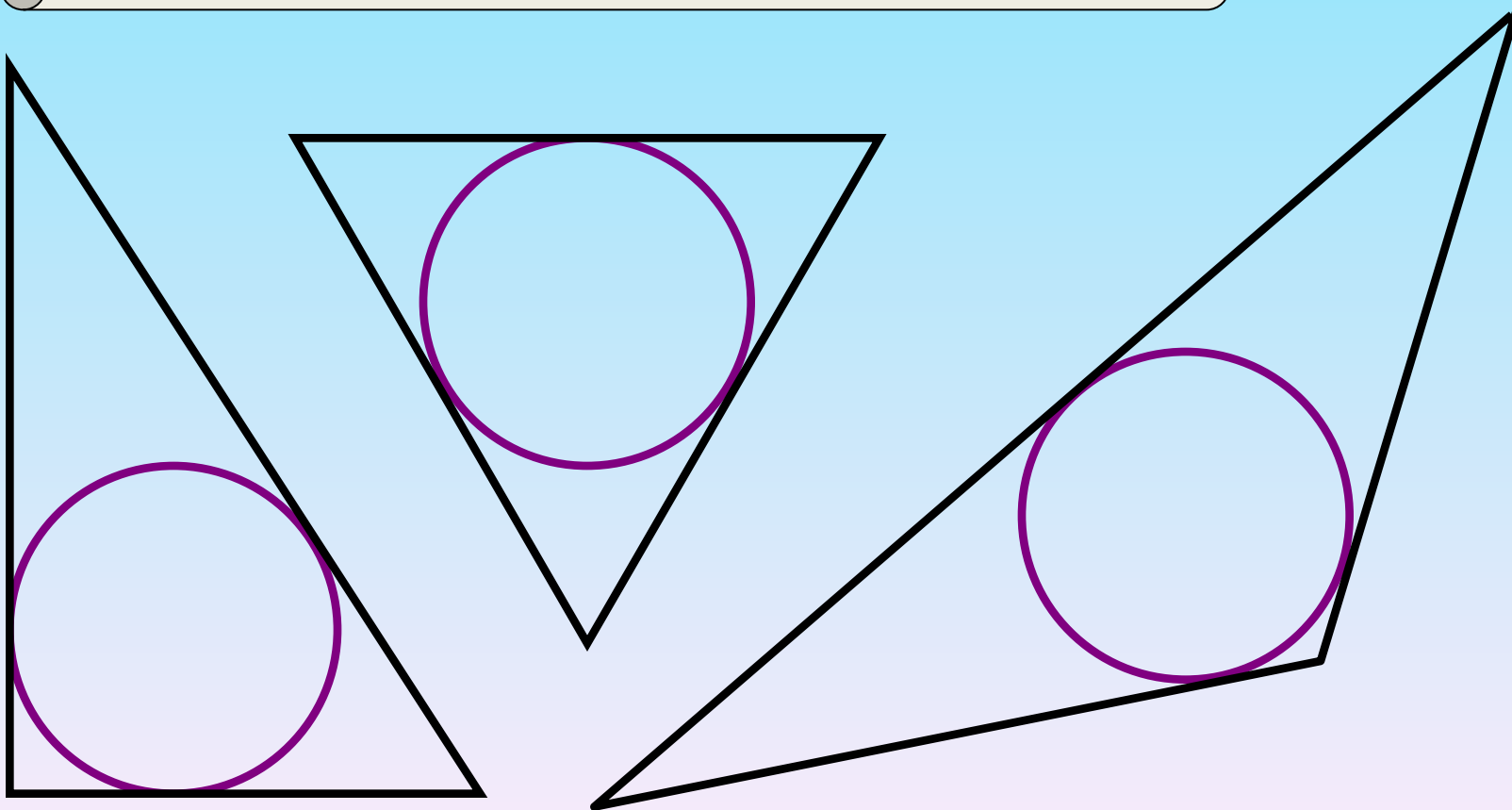


- Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон. В этом случае треугольник называется описанным около окружности.
- Где лежит центр окружности, вписанной в треугольник?
- Треугольник ABC-описанный около окружности. Какие из треугольников AOM, MOB, BON, NOC, COK, KOA-равные?



**Центром вписанной в треугольник  
окружности является точка  
пересечения биссектрис  
треугольника.**

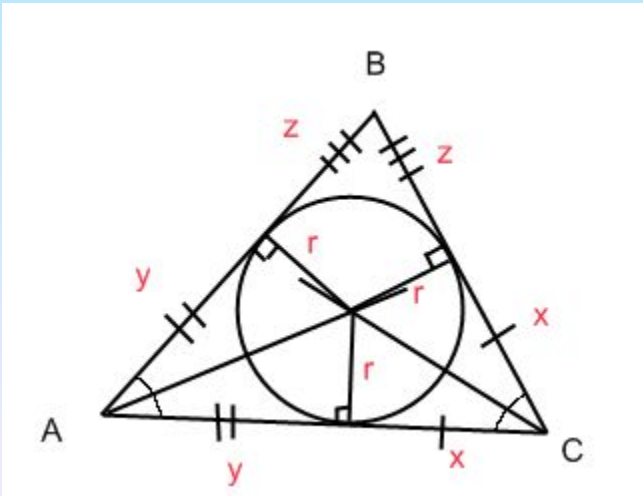
**В любой треугольник можно  
вписать окружность.**



# Треугольник. Вписанная окружность.

- 1) Центр вписанной окружности в треугольник – точка пересечения биссектрис.
- 2) Центр вписанной окружности равноудалён от сторон треугольника.
- 3)  $r = \frac{S}{p}$   $p$  – полупериметр треугольника,  $r$  – радиус вписанной окружности

**В правильном треугольнике**

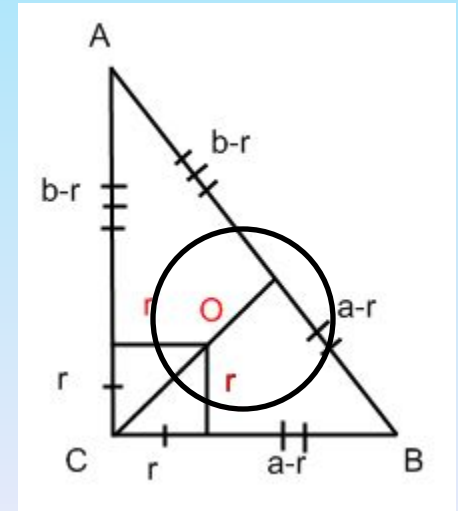


$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$c$  – гипотенуза

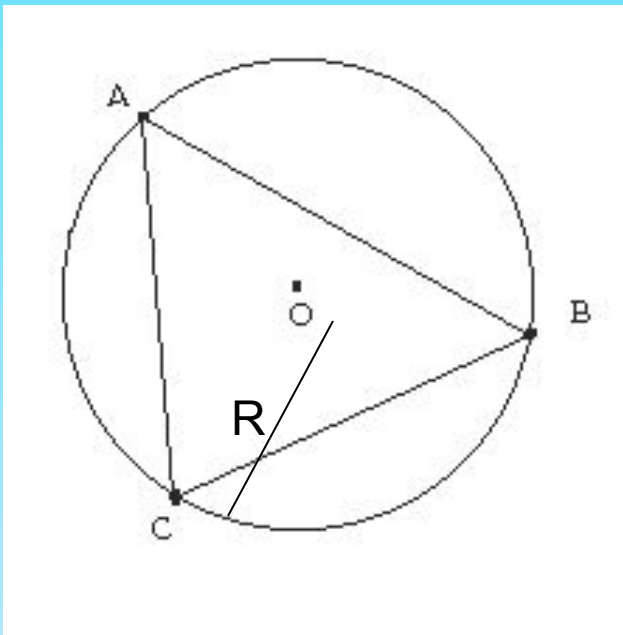
$$c = p - r$$

$p$  – полупериметр



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$



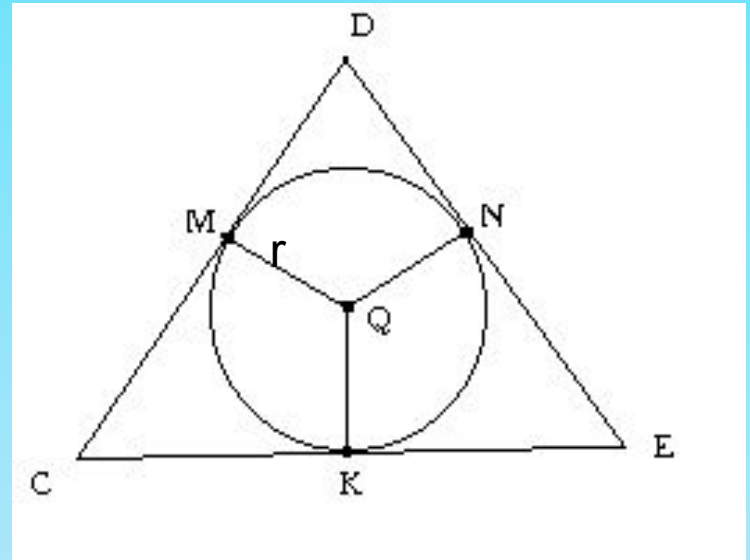


$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

**В правильном треугольнике**

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

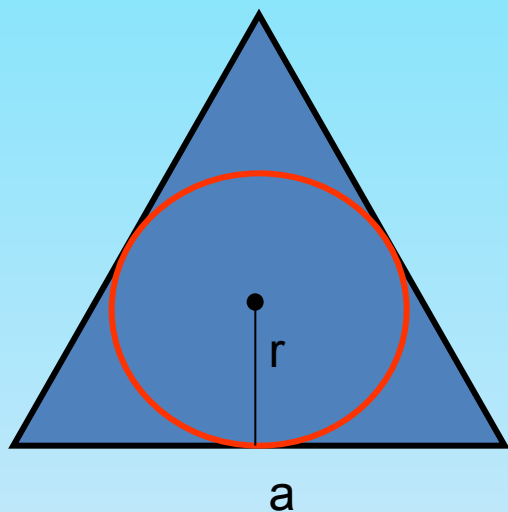


$$r = \frac{S}{p}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

**№ 1.** В равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.



Решение:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

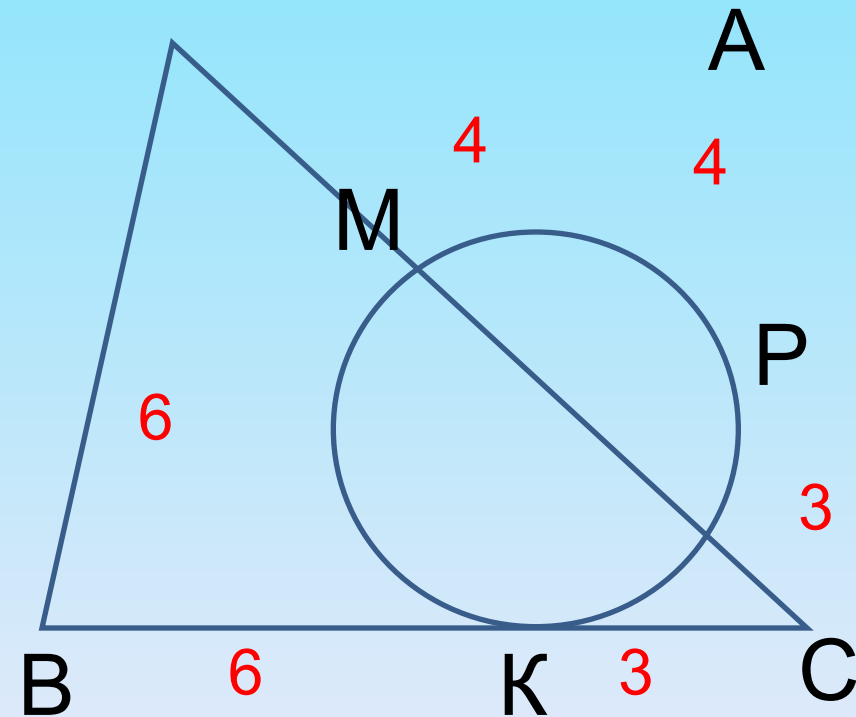
$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6(\text{см}) - \text{полупериметр}$$

$$4\sqrt{3} = 6 \cdot r$$

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{2\sqrt{3}}{3} (\text{см})$$

**№2.** Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, K и P соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если  $AP = 4$  см,  $BM = 6$  см,  $CK = 3$  см.

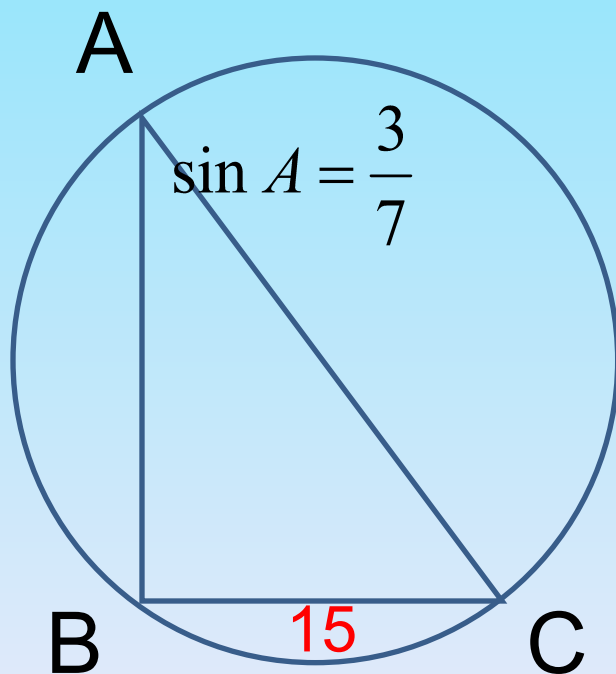


Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны.

$$\begin{array}{ll} BM = BK & AB = 10 \\ AM = AP & AC = 7 \\ CP = CK & BC = 9 \end{array}$$

$$P = 10 + 7 + 9 = 26$$

**№3.** Найдите диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если синус одного из углов треугольника равен  $\frac{3}{7}$ , а противолежащий этому углу катет равен 15 см.



Центр описанной около п/у треугольника окружности лежит на середине гипотенузы.

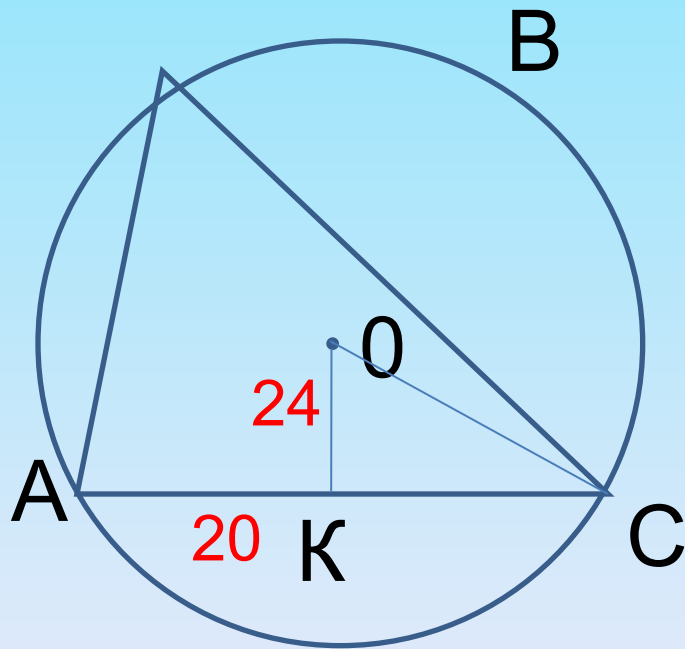
$$d = AC$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{AC}$$

$$AC = 35$$

**№4.** Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, если одна из сторон треугольника равна 20 см, а расстояние от центра окружности до этой стороны равно 24 см.



Т.к.  $OK \perp AC$ , то  
 $AK=KC=10$

по т. Пифагора

$$OC = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$$

# Домашнее задание

В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса  $r$ . Найдите периметр треугольника, если:  
а) гипотенуза равна 26 см,  $r = 4$  см; б) точка касания

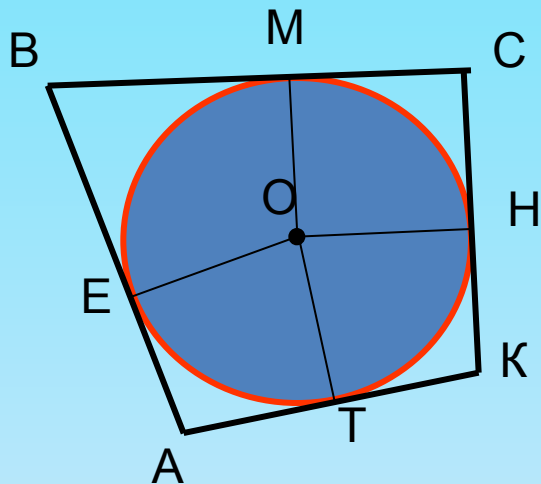
Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении  $12 : 5$ , считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.





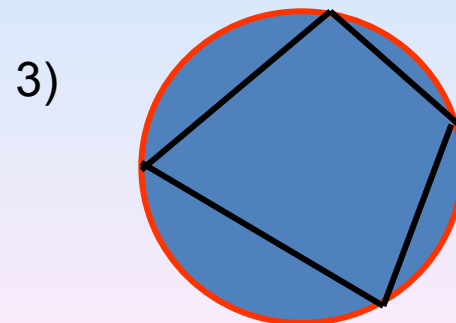
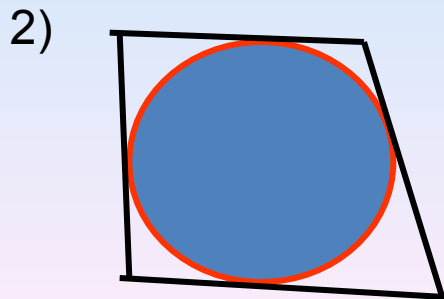
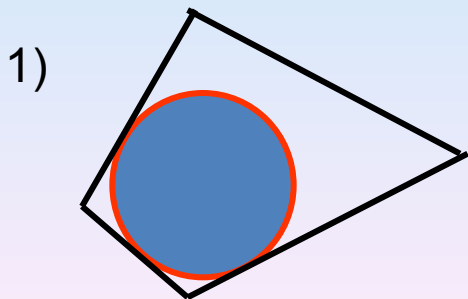


# Окружность, вписанная в четырёхугольник

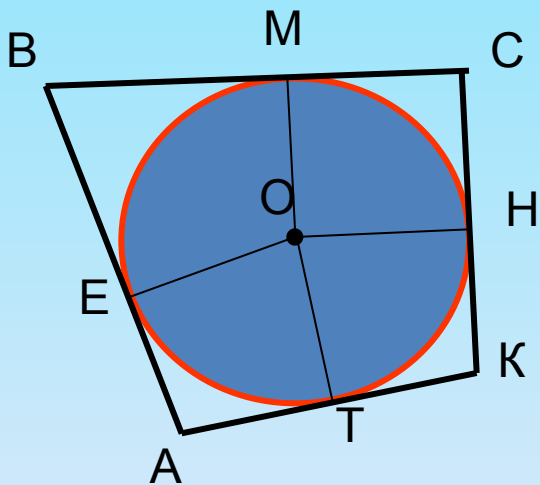


Определение: **окружность называется вписанной в четырёхугольник, если все стороны четырёхугольника касаются её.**

На каком рисунке окружность вписана в четырёхугольник:



Теорема: **если в четырёхугольник вписана окружность, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны** ( в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны).

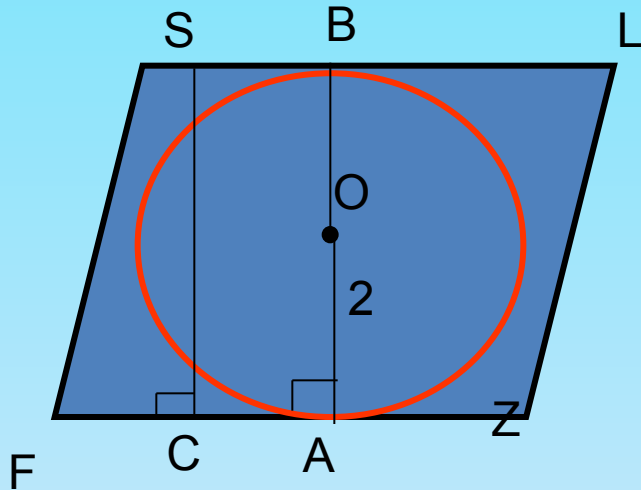


$$AB + CK = BC + AK.$$

Обратная теорема: **если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.**

( доказательство – в учебнике № 724 )

Задача: в ромб, острый угол которого  $60^\circ$ , вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Найти периметр ромба.



Дано: Окр.(O; 2 см) вписана в ромб FSLZ,  $\angle F = 60^\circ$ .

Найти:  $P_{FSLZ}$

Решение:

Т. к. окружность вписана в ромб, то стороны ромба касаются окружности, значит,  $AB \perp FZ$ ,  $AB = 2r = 4$  см – диаметр.

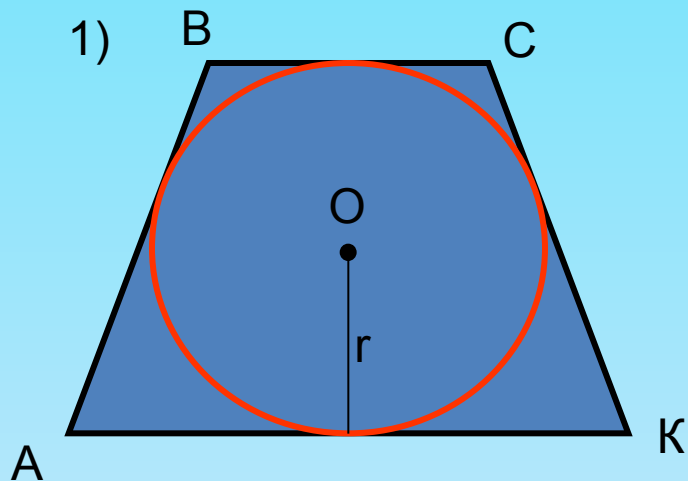
Проведём  $SC \perp FZ$ ,  $SC = AB$  (как перпендикуляры между параллельными прямыми),  $SC = 4$  см

$$\triangle FSC \text{ – прямоугольный, } \sin F = \frac{SC}{FS}; \sin 60^\circ = \frac{4}{FS}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{FS}; FS = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{FSLZ} = 4FS = 4 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ (см).}$$

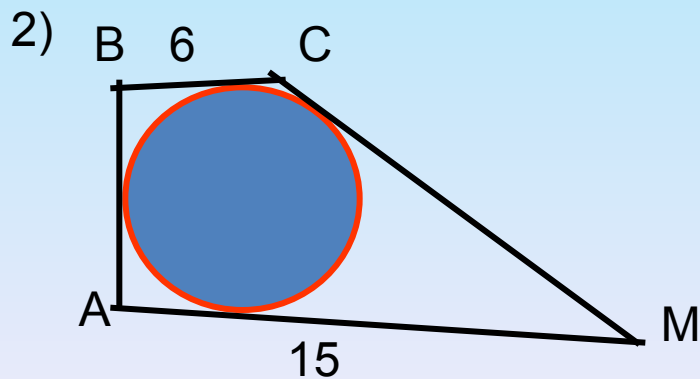
Ответ:  $\frac{32\sqrt{3}}{3}$  см

# Реши задачи



Дано: Окр.  $(O; r)$  вписана в  $ABCK$ ,  
 $P_{ABCK} = 10$

Найти:  $BC + AK$



Дано:  $ABCM$  описан около Окр.  $(O; r)$   
 $BC = 6$ ,  $AM = 15$ ,

$$CM = 2 AB$$

Найти:  $AB$ ,  $CM$

