ГРАДИЕНТ И ЕГО СВОЙСТВА.

Рассмотрим скалярное поле функции $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$. Выберем некоторую точку поля $M(\mathbf{r})$; проведем через нее какую-либо прямую и обозначим через $\mathbf{s}$ единичный вектор, направленный по этой прямой.

Возьмем на этой прямой соседнюю с M точку $M'(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s})$, где ε − MM' − бесконечно малая величина. При переходе от M к M' функция ϕ приобретает приращение $\Delta\phi = \phi(M') - \phi(M) = \phi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \phi(\mathbf{r})$.

Составим отношение $\frac{\Delta\varphi}{\varepsilon}$ и перейдем к пределу, устремив ε к 0, полученный предел назовем ***производной φ по направлению*** **s** в точке *M* и обозначим через $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{MM'\to 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \qquad (9.5)$$

Знание производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ для любого направления **s** позволяет вычислить во всех точках, соседних с точкой *M*, значение функции ϕ с точностью до членов второго порядка малости.

Для вычисления $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ введем систему координат *x, y, z* и заметим, что функция $\phi(x, y, z)$ будет сложной функцией от *s* через посредство *x, y, z.* По правилу дифференцирования сложных функций мы получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad (9.6)$$

и так как

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{s}, x) \qquad \frac{dy}{ds} = \cos(\mathbf{s}, y) \qquad \frac{dz}{ds} = \cos(\mathbf{s}, z) \qquad (9.8)$$

то получается соотношение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\mathbf{s}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\mathbf{s}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\mathbf{s}, z) \qquad (9.9)$$

вспомним правило преобразования составляющих вектора **a**

$$a_s = a_x \cos(s, x) + a_y \cos(s, y) + a_z \cos(s, z) \qquad (9.10)$$

Если мы определим вектор, составляющие которого по основным ортам есть $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, то его составляющая по любому направлению **s** будет $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$.

Назовем этот вектор ***градиентом*** ϕ в точке *M* и обозначим символом **grad** $\boldsymbol{\phi}$. Его составляющие

$$\mathrm{grad}_x\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \mathrm{grad}_y\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \mathrm{grad}_z\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \mathrm{grad}_s\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s} \qquad (9.11)$$

Таким образом

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (9.12)$$

Этот вектор не зависит от выбора системы координат *x, y, z,* так как его составляющие по любому направлению были определены непосредственно.

Величина grad ϕ равна

$$|\mathrm{grad}\,\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \qquad (9.13)$$

Производная по любому направлению **s** равна проекции grad ϕ на это направление, следовательно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \mathbf{s}\cdot\operatorname{grad}\varphi = |\operatorname{grad}\varphi|\cos(\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{s}) \qquad (9.14)$$

Из этой формулы видно, что $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ достигает наибольшего значения для направления **s**, совпадающего как раз с направлением grad ϕ, причем это наибольшее значение равно величине grad ϕ. Поэтому можно дать другое определение градиента:

Градиентом ф называется вектор, имеющий направление быстрейшего увеличения ф и по величине равный производной по этому направлению.

Из других обозначений градиента ϕ укажем, как наиболее употребляемое, $\nabla\phi$, где знак ∇ читается «набла». При этом обозначении мы будем иметь

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad (9.15)$$

Из этой формулы видно, что ∇ является дифференциальным оператором.

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (9.16)$$

который, будучи применен к скаляру ϕ, дает grad ϕ. Этот оператор, можно рассматривать также как символический вектор. Его называют иногда ***оператором Гамильтона***.

СВОЙСТВА ВЕКТОРА grad ϕ

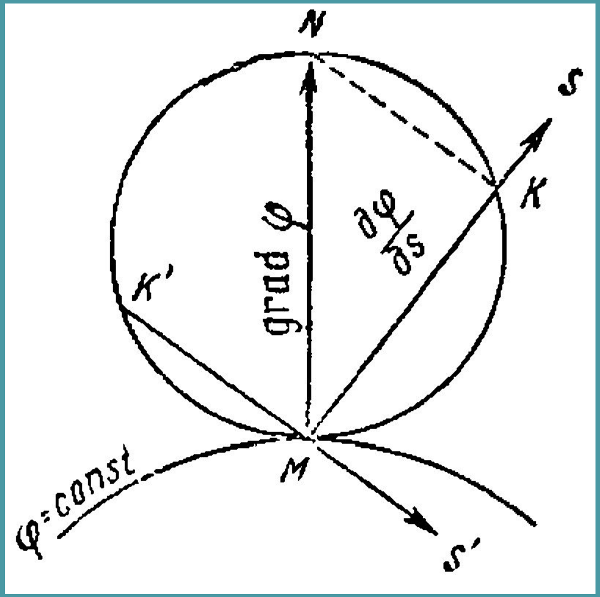
Проведем через точку M поверхность уровня функции ϕ и докажем, что вектор градиента ϕ направлен по нормали к этой поверхности уровня в точке M.

Так как на поверхности уровня $\phi = \text{const}$, то производная по всякому направлению **s**, лежащему в касательной плоскости к поверхности уровня в точке M, равна нулю, следовательно, для всякого такого направления по (9.14)

$$\cos\,(\text{grad}\,\varphi,\ \mathbf{s}) = 0 \qquad (10.1)$$

что может быть только, если **grad ϕ** ***перпендикулярен к поверхности уровня в точке*** M.

grad ϕ ***направлен в ту сторону нормали, куда ϕ возрастает***.



Связь между градиентом функции ϕ и производной от ϕ по различным направлениям имеет очень простое геометрическое истолкование.

Проведем через точку M (**рис. 10.1**) поверхность уровня ϕ = const, к этой поверхности уровня восставим в точке M нормаль MN и отложим по этой нормали вектор $\overline{MN} = \text{grad}\,\varphi$.

Построим далее на *MN*, как на диаметре, сферу и рассмотрим какой-нибудь луч *Ms*, проходящий через точку *M* и имеющий направление **s**. Пусть этот луч пересечет сферу в точке *K*.

Так как угол при *K* в Δ *MNK* есть прямой (по известному свойству окружности), то *MK* является проекцией *MN* на направление *Ms*; но проекция grad ϕ на какое-либо направление есть производная ϕ по этому направлению, следовательно, мы получаем, что $MK = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$

Если бы луч *Ms'* не пересекал сферу, то, продолжив его в другую сторону, мы нашли бы точку *K'* и получили бы, что $\frac{\partial\varphi}{\partial s'} = -MK'$

Если единичный вектор нормали к поверхности уровня обозначить через **n**, а производную от функции ϕ по направлению этой нормали через $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то, очевидно, будет

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathbf{n} \qquad (10.2)$$

Из формулы $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \mathbf{s}\cdot\operatorname{grad}\varphi$

вытекает, если через $d\,\mathbf{r} = \mathbf{s}\,ds$ обозначить бесконечно малый вектор, идущий из точки *M* в направлении **s**, следующее соотношение:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds = \mathbf{s}\,ds\cdot\operatorname{grad}\varphi = d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi \qquad (10.3)$$

Если мы найдем такой вектор **a**, что для произвольного $d\mathbf{r}$ будет

$$d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \qquad (10.3^*)$$

то можем утверждать, что $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\phi$, ибо $d\phi = d\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\phi$ приводит к соотношению $d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a} - \operatorname{grad}\phi) = 0$; откуда видно, что $\mathbf{a} - \operatorname{grad}\phi$ перпендикулярно к любому направлению, что может быть только, если $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\phi$.

Разберем ***несколько примеров вычисления градиента***.

Самым важным случаем является тот, когда ϕ зависит только от расстояния точки до некоторой определенной точки, которую мы выберем за начало координат.

Пусть $\varphi = \varphi(r)$. Поверхностями уровня служат концентрические сферы с центром в начале координат. Нормаль к поверхности уровня совпадает с радиусом-вектором, поэтому по величине $\operatorname{grad}\phi$ равен

$$\left|\frac{d\varphi}{dr}\right| = |\varphi'(r)| \qquad (10.4)$$

а направлен $\operatorname{grad}\phi$ в ту сторону, куда ϕ возрастает, т. е. при положительном $\phi'(r)$ ортом $\operatorname{grad}\phi$ служит $\frac{\mathbf{r}}{r}$, а при отрицательном $\phi'(r)$ ортом $\operatorname{grad}\phi$ является - $\frac{\mathbf{r}}{r}$

Таким образом, всегда будет $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (10.5)

Докажем основные в теории градиента формулы

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi \qquad (10.6)$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi \qquad (10.7)$$

$$\operatorname{grad} F(\varphi) = F'(\varphi) \operatorname{grad}\varphi \qquad (10.8)$$

Проектируя, например, обе части равенства (10.6) на какое-либо направление **s**, мы получаем

$$\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial s} \qquad (10.9)$$

что производная суммы равна сумме производных.

Вектор, являющийся градиентом некоторого скаляра ϕ, называется ***потенциальным вектором***, а поле такого вектора называется ***потенциальным***. Величина же ϕ называется ***потенциалом***.