

ГРАДИЕНТ И ЕГО СВОЙСТВА.

Рассмотрим скалярное поле функции $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$. Выберем некоторую точку поля $M(\mathbf{r})$; проведем через нее какую-либо прямую и обозначим через \mathbf{s} единичный вектор, направленный по этой прямой.

Возьмем на этой прямой соседнюю с M точку $M'(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s})$, где $\varepsilon = MM'$ – бесконечно малая величина. При переходе от M к M' функция ϕ приобретает приращение $\Delta\phi = \phi(M') - \phi(M) = \phi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \phi(\mathbf{r})$.

Составим отношение $\frac{\Delta\varphi}{\varepsilon}$ и перейдем к пределу, устремив ε к 0, полученный предел назовем **производной ϕ по направлению \mathbf{s}** в точке M и обозначим через

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (9.5)$$

Знание производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ для любого направления \mathbf{s} позволяет вычислить во всех точках, соседних с точкой M , значение функции ϕ с точностью до членов второго порядка малости.

Для вычисления $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ введем систему координат x, y, z и заметим, что функция $\phi(x, y, z)$ будет сложной функцией от s через посредство x, y, z . По правилу дифференцирования сложных функций мы получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \quad (9.6)$$

и так как

$$\frac{dx}{ds} = \cos(s, x) \quad \frac{dy}{ds} = \cos(s, y) \quad \frac{dz}{ds} = \cos(s, z) \quad (9.8)$$

то получается соотношение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(s, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(s, z) \quad (9.9)$$

вспомним правило преобразования составляющих вектора \mathbf{a}

$$a_s = a_x \cos(s, x) + a_y \cos(s, y) + a_z \cos(s, z) \quad (9.10)$$

Если мы определим вектор, составляющие которого по основным ортам есть $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, то его составляющая по любому направлению \mathbf{s} будет $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$.

Назовем этот вектор **градиентом** φ в точке M и обозначим символом $\mathbf{grad} \varphi$. Его составляющие

$$\mathbf{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \mathbf{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \mathbf{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \mathbf{grad}_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (9.11)$$

Таким образом

$$\mathbf{grad} \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (9.12)$$

Этот вектор не зависит от выбора системы координат x, y, z , так как его составляющие по любому направлению были определены непосредственно.

Величина $\mathbf{grad} \varphi$ равна

$$|\mathbf{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \quad (9.13)$$

Производная по любому направлению \mathbf{s} равна проекции $\mathbf{grad} \varphi$ на это направление, следовательно

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \text{grad } \phi = |\text{grad } \phi| \cos(\text{grad } \phi, \mathbf{s}) \quad (9.14)$$

Из этой формулы видно, что $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ достигает наибольшего значения для направления \mathbf{s} , совпадающего как раз с направлением $\text{grad } \phi$, причем это наибольшее значение равно величине $\text{grad } \phi$. Поэтому можно дать другое определение градиента:

Градиентом ϕ называется вектор, имеющий направление быстрого увеличения ϕ и по величине равный производной по этому направлению.

Из других обозначений градиента ϕ укажем, как наиболее употребляемое, $\nabla \phi$, где знак ∇ читается «набла». При этом обозначении мы будем иметь

$$\nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (9.15)$$

Из этой формулы видно, что ∇ является дифференциальным оператором.

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.16)$$

который, будучи применен к скаляру ϕ , дает $\text{grad } \phi$. Этот оператор, можно рассматривать также как символический вектор. Его называют иногда **оператором Гамильтона**.

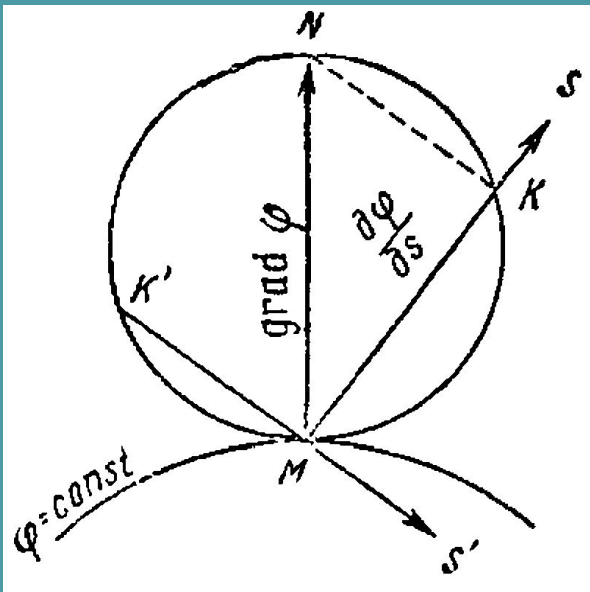
СВОЙСТВА ВЕКТОРА $\text{grad } \phi$

Проведем через точку M поверхность уровня функции ϕ и докажем, что вектор градиента ϕ направлен по нормали к этой поверхности уровня в точке M .

Так как на поверхности уровня $\phi = \text{const}$, то производная по всякому направлению \mathbf{s} , лежащему в касательной плоскости к поверхности уровня в точке M , равна нулю, следовательно, для всякого такого направления по (9.14)

$$\cos(\text{grad } \phi, \mathbf{s}) = 0 \quad (10.1)$$

что может быть только, если $\text{grad } \phi$ перпендикулярен к поверхности уровня в точке M .



$\text{grad } \phi$ направлен в ту сторону нормали, куда ϕ возрастает.

Связь между градиентом функции ϕ и производной от ϕ по различным направлениям имеет очень простое геометрическое истолкование.

Проведем через точку M (рис. 10.1) поверхность уровня $\phi = \text{const}$, к этой поверхности уровня восставим в точке M нормаль MN и отложим по этой нормали вектор

$$\overline{MN} = \text{grad } \phi.$$

Построим далее на MN , как на диаметре, сферу и рассмотрим какой-нибудь луч Ms , проходящий через точку M и имеющий направление \mathbf{s} . Пусть этот луч пересечет сферу в точке K .

Так как угол при K в ΔMNK есть прямой (по известному свойству окружности), то MK является проекцией MN на направление Ms ; но проекция $\text{grad } \phi$ на какое-либо направление есть производная ϕ по этому направлению, следовательно, мы получаем, что

$$MK = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

Если бы луч Ms' не пересекал сферу, то, продолжив его в другую сторону, мы нашли бы точку K' и получили бы, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial s'} = -MK'$$

Если единичный вектор нормали к поверхности уровня обозначить через \mathbf{n} , а производную от функции ϕ по направлению этой нормали через $\frac{\partial \phi}{\partial n}$, то, очевидно, будет

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathbf{n} \quad (10.2)$$

Из формулы $\frac{\partial \phi}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \text{grad } \phi$

вытекает, если через $d\mathbf{r} = \mathbf{s} ds$ обозначить бесконечно малый вектор, идущий из точки M в направлении \mathbf{s} , следующее соотношение:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = \mathbf{s} ds \cdot \text{grad } \phi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \phi \quad (10.3)$$

Если мы найдем такой вектор \mathbf{a} , что для произвольного $d\mathbf{r}$ будет

$$d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \quad (10.3^*)$$

то можем утверждать, что $\mathbf{a} = \text{grad } \phi$, ибо $d\phi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \phi$ приводит к соотношению $d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} - \text{grad } \phi) = 0$; откуда видно, что $\mathbf{a} - \text{grad } \phi$ перпендикулярно к любому направлению, что может быть только, если $\mathbf{a} = \text{grad } \phi$.

Разберем *несколько примеров вычисления градиента*.

Самым важным случаем является тот, когда ϕ зависит только от расстояния точки до некоторой определенной точки, которую мы выберем за начало координат.

Пусть $\varphi = \varphi(r)$. Поверхностями уровня служат концентрические сферы с центром в начале координат. Нормаль к поверхности уровня совпадает с радиусом-вектором, поэтому по величине $\text{grad } \phi$ равен

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = |\varphi'(r)| \quad (10.4)$$

\mathbf{a} направлен $\text{grad } \phi$ в ту сторону, куда ϕ возрастает, т. е. при положительном $\phi'(r)$ ортом $\text{grad } \phi$ служит $\frac{\mathbf{r}}{r}$, а при отрицательном $\phi'(r)$ ортом $\text{grad } \phi$ является $-\frac{\mathbf{r}}{r}$

Таким образом, всегда будет

$$\text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (10.5)$$

Докажем основные в теории градиента формулы

$$\text{grad } (\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi \quad (10.6)$$

$$\text{grad } (\varphi\psi) = \varphi \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \varphi \quad (10.7)$$

$$\text{grad } F(\varphi) = F'(\varphi) \text{grad } \varphi \quad (10.8)$$

Проектируя, например, обе части равенства (10.6) на какое-либо направление \mathbf{s} , мы получаем

$$\frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (10.9)$$

что производная суммы равна сумме производных.

Вектор, являющийся градиентом некоторого скаляра ϕ , называется **потенциальным вектором**, а поле такого вектора называется **потенциальным**. Величина же ϕ называется **потенциалом**.