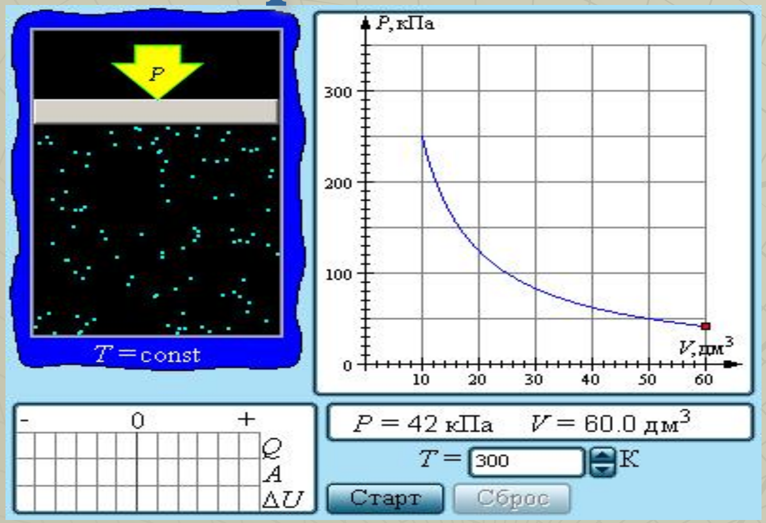
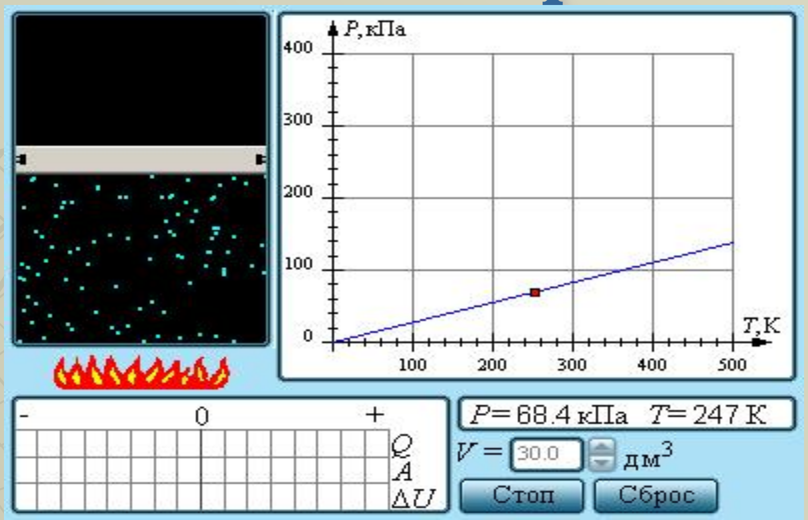
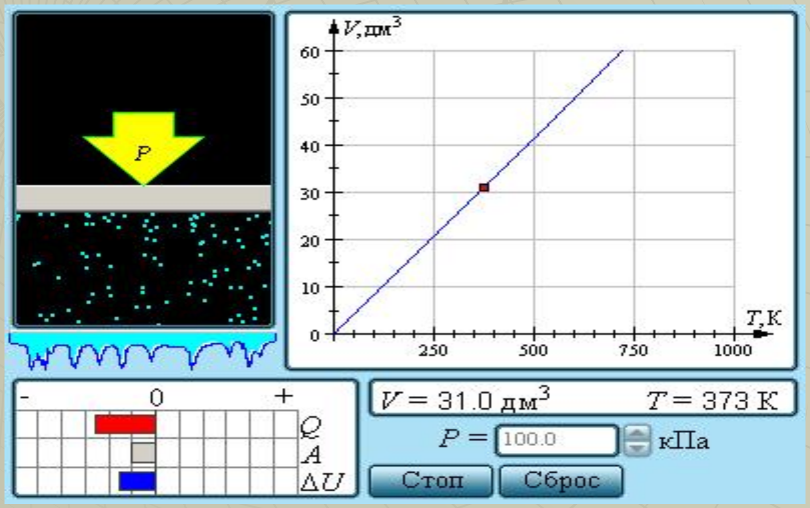
Электронный задачник по теме "Изопроцессы"





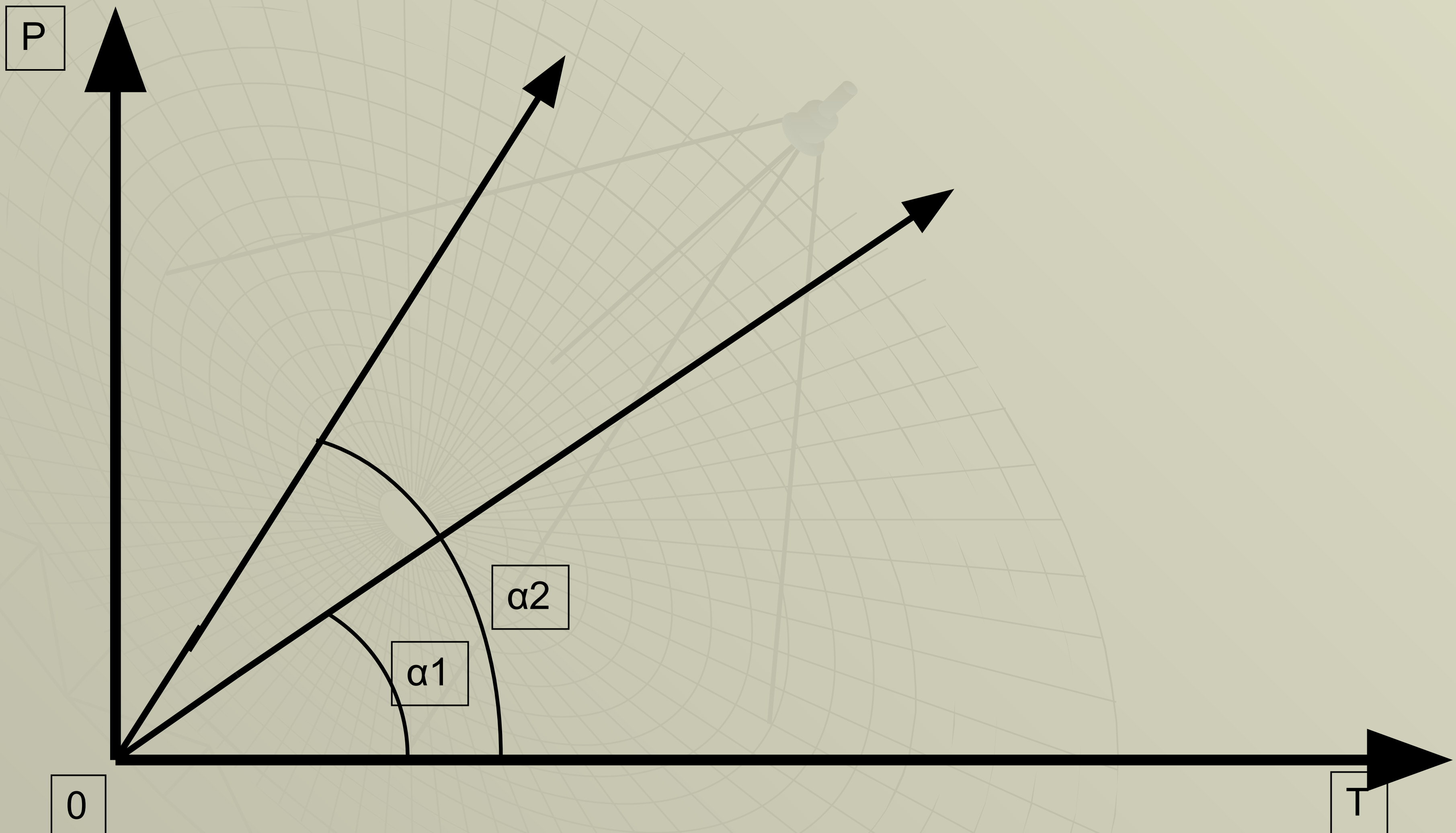


ЗАДАЧИ

Задача №1.
Задача №2.
Задача №3.
Задача №4.
Задача №5.
Задача №6.
Задача №7.
Задача №8.
Задача №9.
Задача №10.
Задача №11.

ЗАДАЧА №1

На рисунке представлены две изохоры для газа одной и той же массы. Как относятся объёмы газа, если углы наклона изохор к абсцисс равны α_1 и α_2?



Дано:

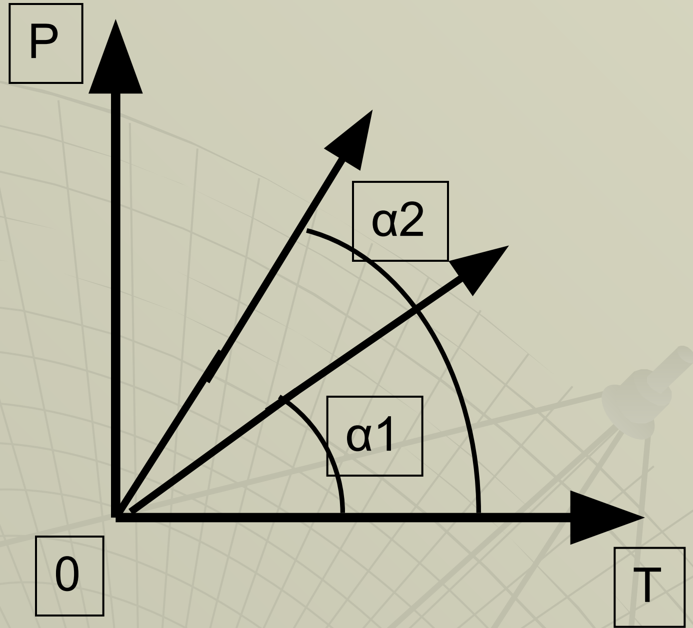
α_1

α_2

Найти

$\frac{V_2}{V_1} = ?$

Решение:



Уравнение Менделеева - Клайперона: $pV = \frac{m}{M}RT \cdot$

Зная, что $\frac{m}{\mathrm{M}} = \nu$, можно записать в виде $pV = \nu RT \cdot$

В первом случае: $pV_1 = \nu RT \Rightarrow P = \frac{\nu RT}{V_1} \cdot$

$$\frac{\nu R}{V_1} = tg\alpha_1 \Rightarrow p = tg\alpha_1 T$$

Отсюда следует, что $V_1 \approx ctg\alpha_1$

Во втором случае: $pV_2 = \nu RT \Rightarrow P = \dfrac{\nu RT}{V_2}$.

$$\frac{\nu R}{V_2} = tg\alpha_2 \Rightarrow p = tg\alpha_2 T \Rightarrow V_2 \approx ctg\alpha_2 \cdot$$

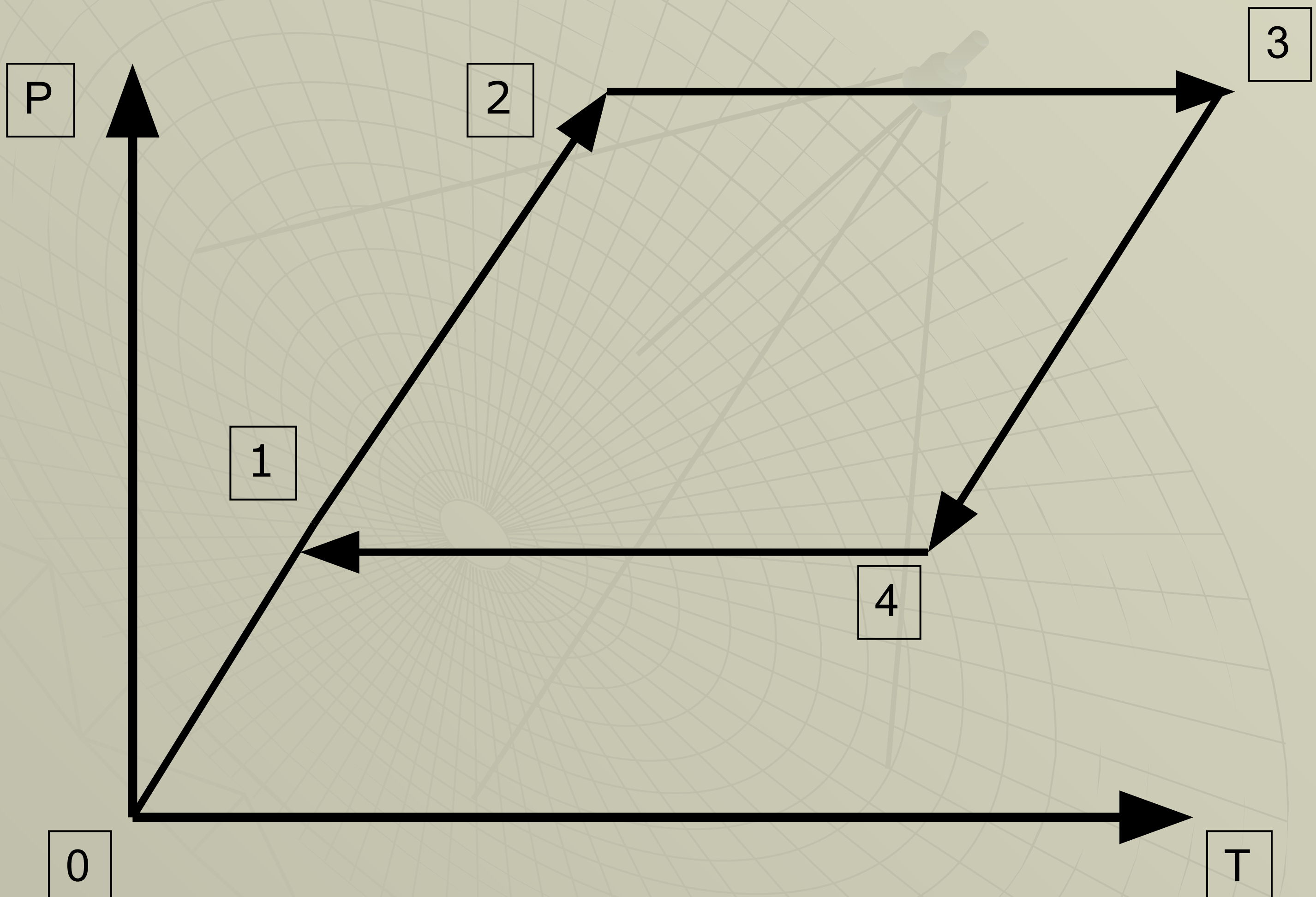
Исходя из выше написанного следует, что

$$\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{ctg\alpha_2}{ctg\alpha_1}$$

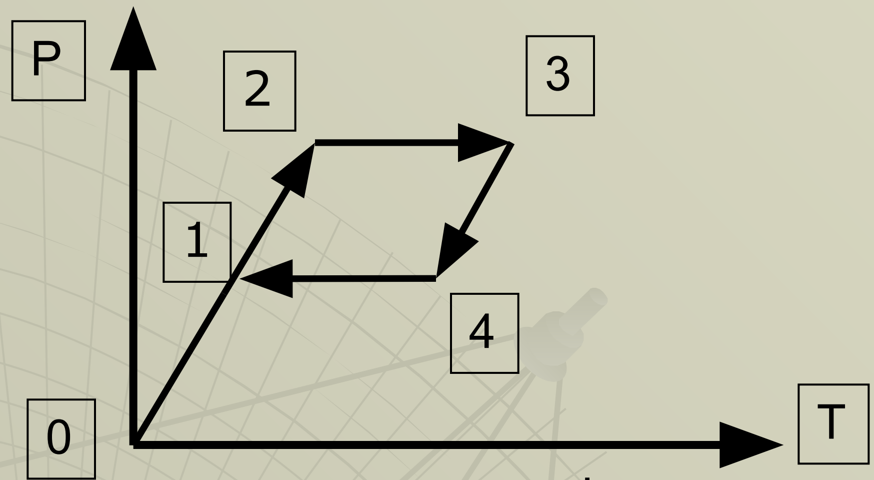
Ответ: $\dfrac{V_2}{V_1} \approx \dfrac{ctg\alpha_2}{ctg\alpha_1}$

ЗАДАЧА №2

С газом некоторой массы был произведён замкнутый процесс, изображенный на рисунке. Объяснить, как изменялся объём газа при переходах 1-2, 2-3, 3-4, 4-1.



Решение. Используем для анализа процесса изображенного на рисунке,



уравнение состояния идеального газа в форме

$$pV = \frac{m}{M} R = const. \qquad (1)$$

Согласно этой формуле процесс 1-2 является изохорным, так как соответствующий отрезок диаграммы лежит на луче, выходящем из начала координат p=βT, где β-константа. Таким образом, на отрезке 1-2 объём был постоянным. Процесс 2-3 согласно рисунку – изобарный. При этом из записанной выше формулы следует, что объём пропорционален температуре, поэтому на отрезке 2-3 объём увеличивался. На отрезке 3-4 зависимость давления от температуры, соответствующую рисунку, можно представить в форме

$$p = p_0\left(T - T_0\right), \qquad (2)$$

где p_0 и T_0 - положительные константы. При этом, согласно формуле (1), зависимость объёма от температуры с учётом изменения давления (2) имеет вид:

$$V = \frac{mR}{M}\frac{T}{p_0\left(T - T_0\right)}, \qquad (3)$$

откуда следует, что на отрезке 3-4 объём увеличился из-за уменьшения температуры.Отрезок 4-1 – вновь изобара. Следовательно, согласно (1) здесь объём уменьшался пропорционально уменьшению температуры.

Ответ.1-2-оставался постоянным;
2-3-увеличивался пропорционально T;
3-4-увеличивался;
4-1-уменьшался пропорционально T.

ЗАДАЧА №3

Начертить изотерму процесса для случая pV=40. Пользуясь графиком ответить на вопрос: на сколько изменился объем данной массы газа, если давление увеличился на 1\4 первоначальной величины.

Дано:

pV=40

T=const

$$\Delta p = \frac{1}{4}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{4} p_1 = \frac{5}{4} p_1$$

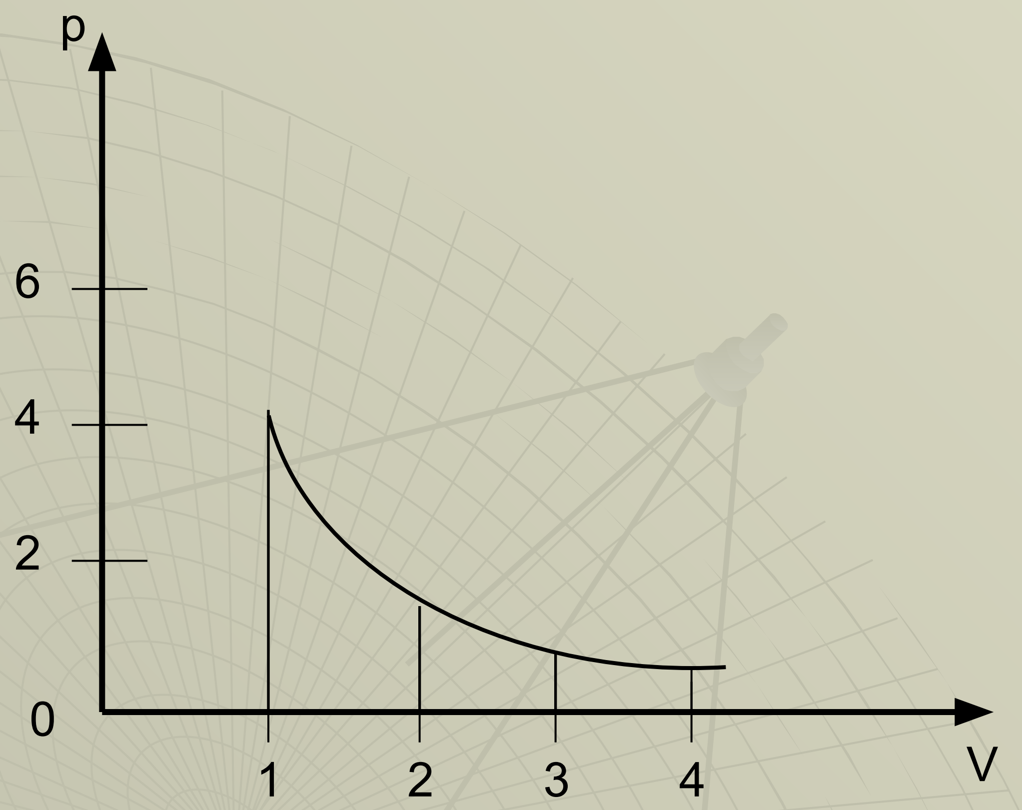
Найти:

p(V)=?

$$\Delta V = ?$$

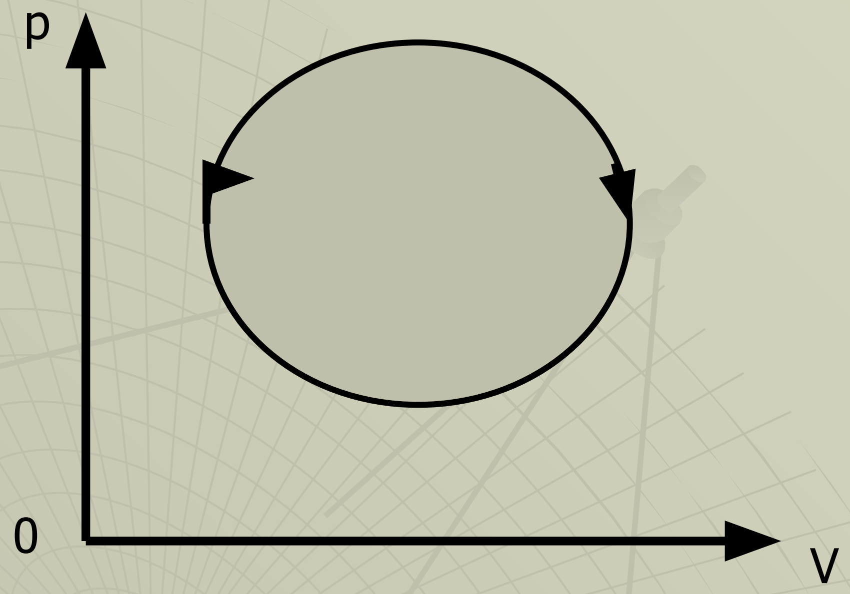
Решение:

p	10^5	$2*10^5$	$4*10^5$	$1{,}33*10^5$
V	$4*10^{-4}$	$2*10^{-4}$	10^{-4}	$3*10^{-4}$

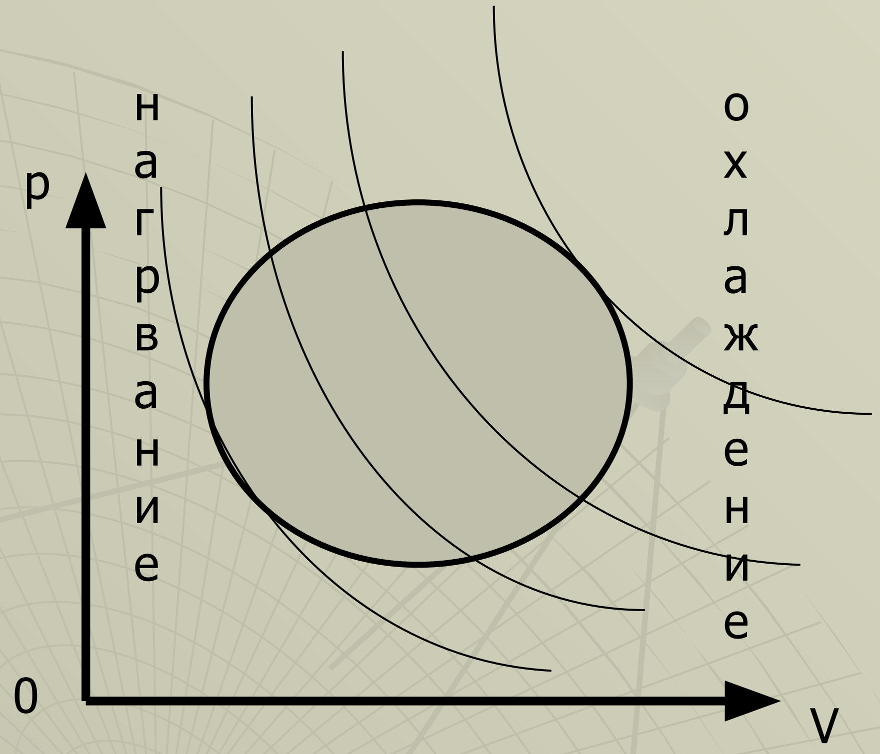

p
6
4
2
0
1
2
3
4
V

ЗАДАЧА №4

Как менялось температура идеального газа – увеличивалась или уменьшалась – при процессе, график которого в координатах p, V изображен на рисунке.



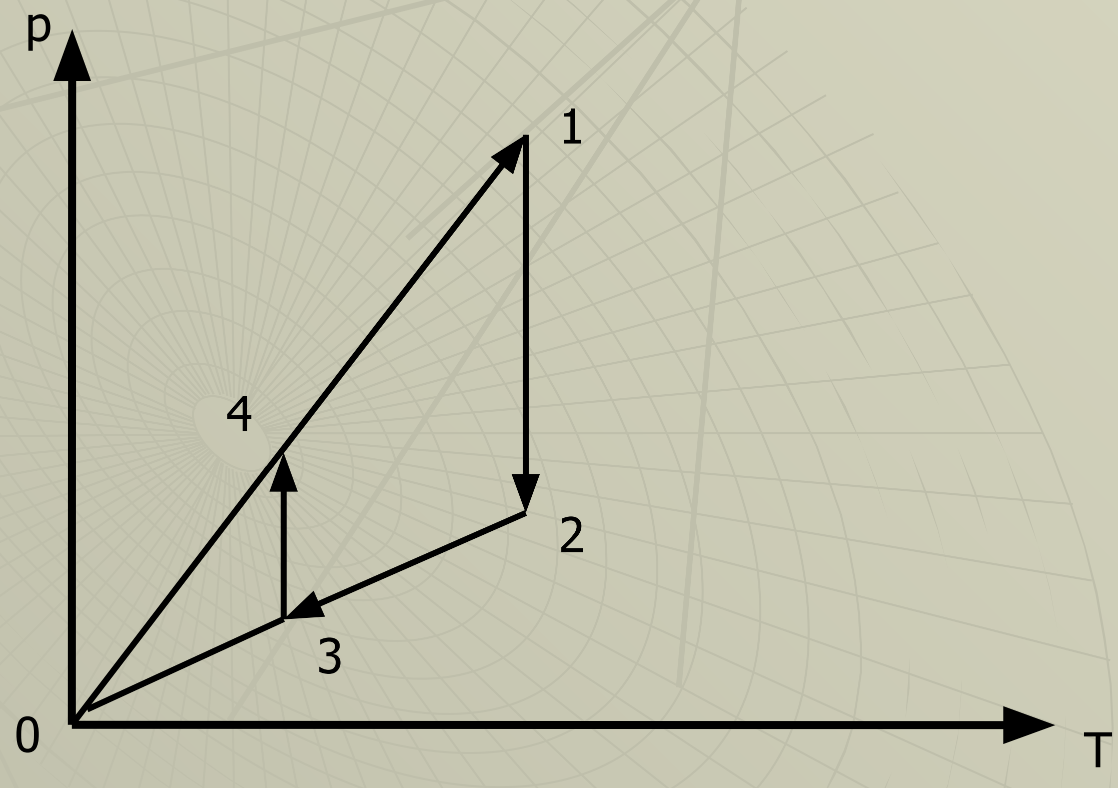
Решение.



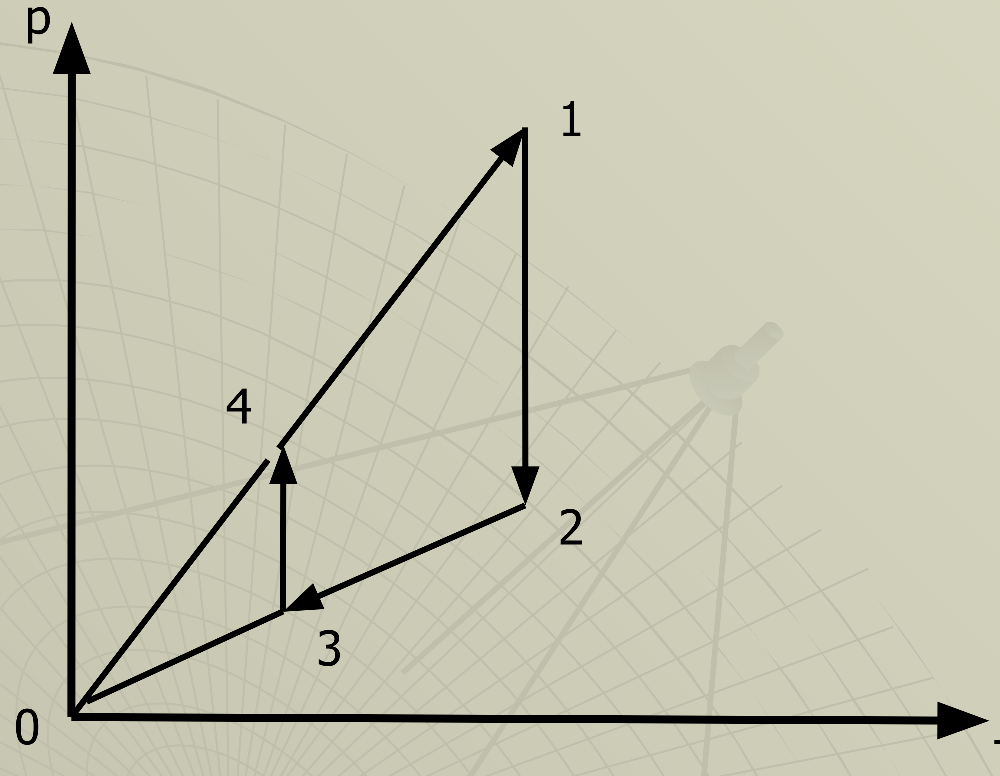
Кривая уравнения изотермы в координатах p, V – гипербола; pV=const, причем чем меньше температура газа, тем больше гипербола прижимается к осям координат. Нарисовав семейство гипербол, находим ответ.

ЗАДАЧА №5

Идеальный газ совершает замкнутый процесс, изображенный на рисунке в координатах (p,T). Изобразите этот процесс в координатах (p,V) и укажите, на каких стадиях газ получал, а на каких отдавал тепло.



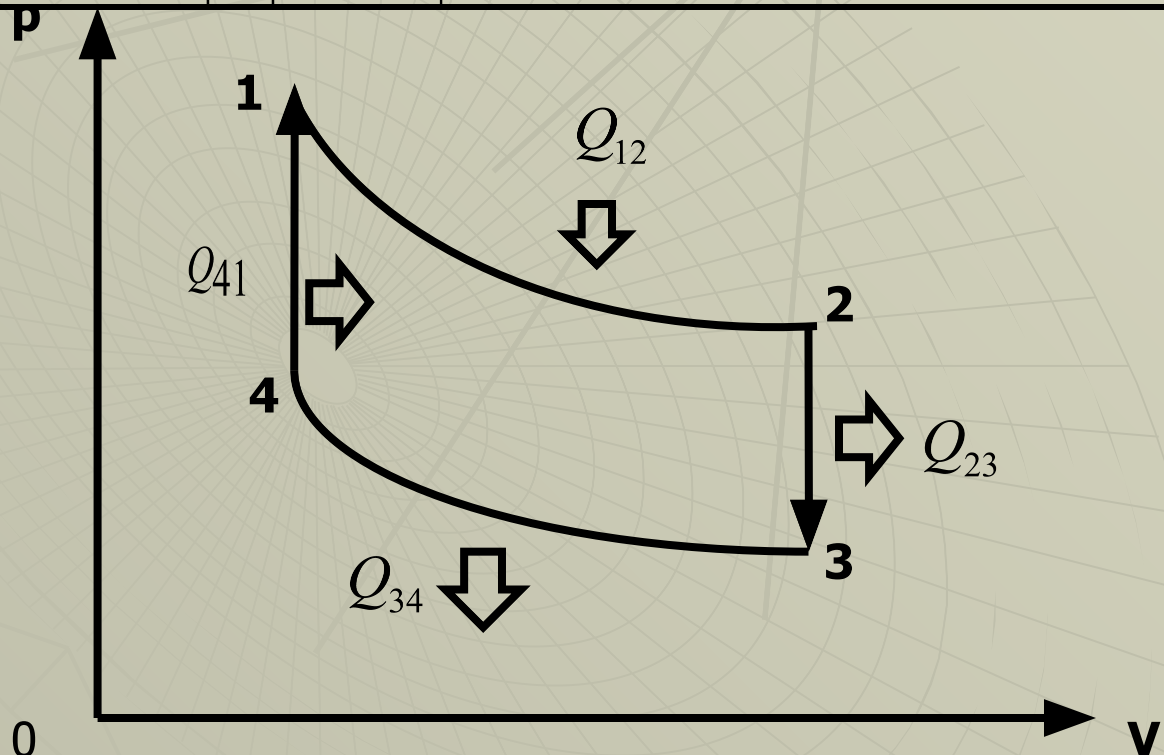
Решение.



1-2 изотермический , 2-3 изохорический, 3-4 изотермический, 4-1 изохорический. Составим таблицу для основных термодинамических характеристик соответствующих процессов: работы А, изменения внутренней энергии

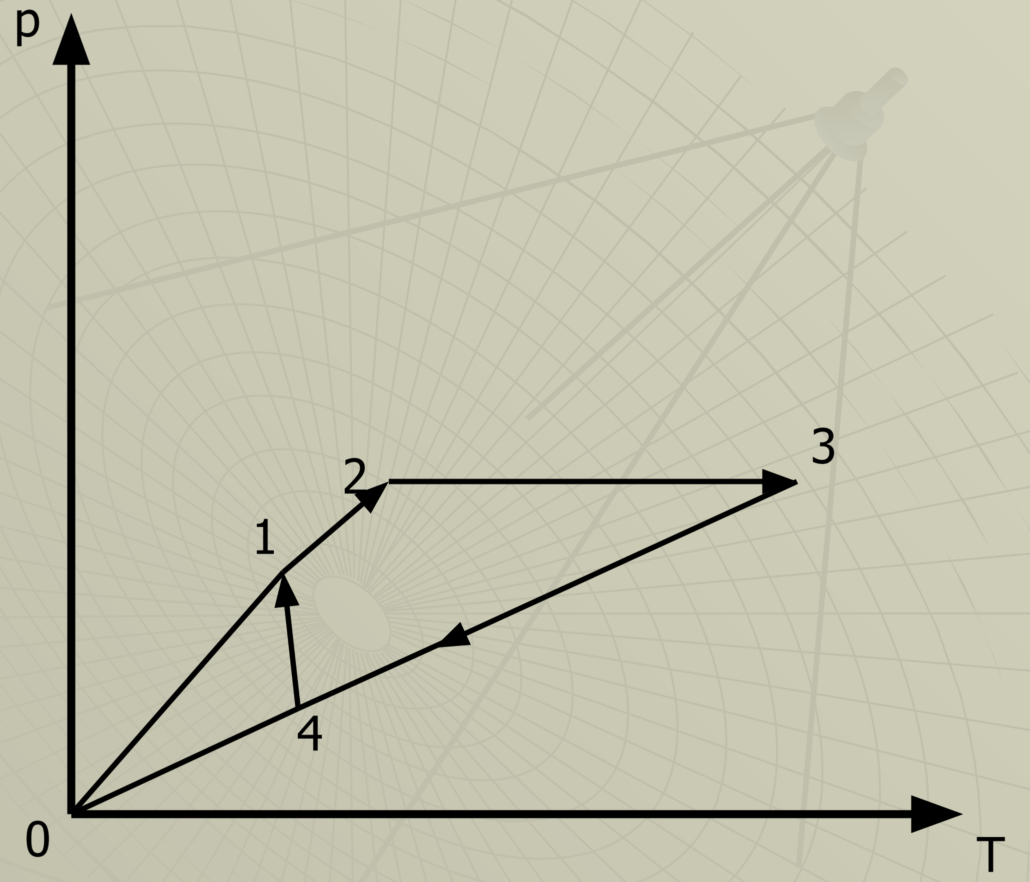
ΔU , количества теплоты $Q = A + \Delta U$

Процесс	A	ΔU	$Q = A + \Delta U$
1-2	+	0	+, поглощается: $Q = \Delta U < 0$
2-3	0	-	-, отводится: $Q = A < 0$
3-4	-	0	-, отводится: $Q = A > 0$
4-1	0	+	+, поглощается: $Q = \Delta U > 0$



ЗАДАЧА №6

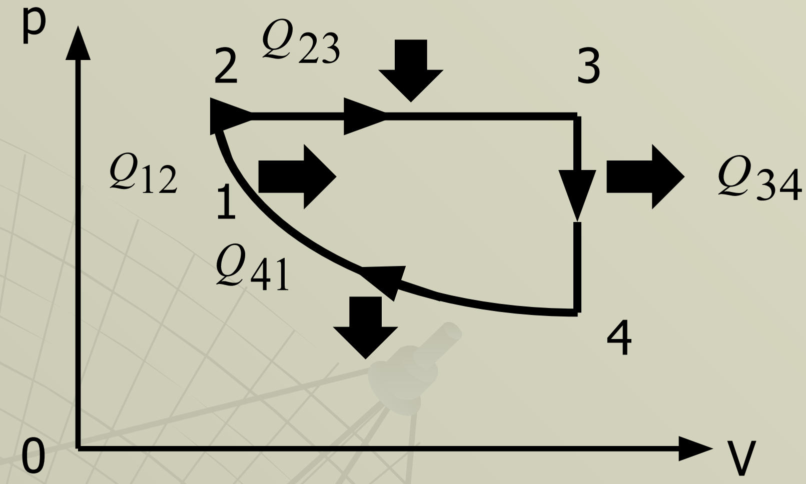
Газ совершает замкнутый процесс. Какое количество теплоты больше: полученное от нагревателя или отданное холодильнику? Какой машине этот цикл соответствует: тепловому двигателю или холодильнику?



Сформулируем общий алгоритм решения этой задачи:

- перевести цикл в координаты (p, V) и составить таблицу;
- установить направление обхода цикла и тип машины; оценить величины поглощенного и отданного количеств теплоты и общую работу;
- рассчитать КПД машины.

Решение:



В координатах (p,V) цикл обходится по часовой стрелке, следовательно, мы имеем дело с тепловым двигателем. Работа газа за цикл $A_0 = Q_1 - Q_2 > 0$ тепло Q_1, полученное от нагревателя, больше тепла Q_2 отданного холодильнику.

Для полноты картины приведем таблицу, отвечающую разным участкам цикла: изохоры 1-2, изобары 2-3, изохоры 3-4, изотермы 4-1.

Процесс	А	ΔU	$Q = A + \Delta U$
1-2	0	+	+, поглощается: $Q = \Delta U > 0$
2-3	+	+	+, поглощается: $Q = A + \Delta U > 0$
3-4	0	-	- , отводится: $Q = \Delta U < 0$
4-1	-	0	- , отводится: $Q = A < 0$

При контакте с нагревателем система получает тепло

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23},$$

а тепло $Q_2 = \left|Q_{34}\right| + \left|Q_{41}\right| = Q_1 - A_0$ отдает холодильнику.

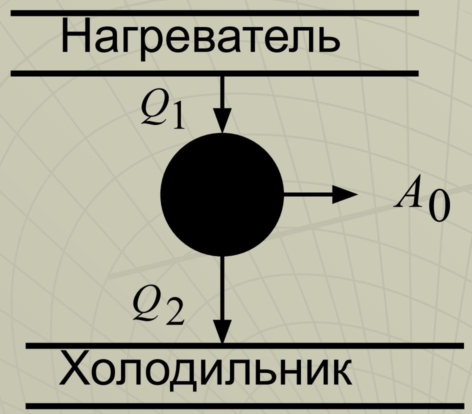
Если цикл запустить в обратном направлении (1 – 4 – 3 – 2 – 1), то получится холодильная машина: над газом (рабочим телом) совершается работа

$$A'_0 = -A_0 > 0,$$

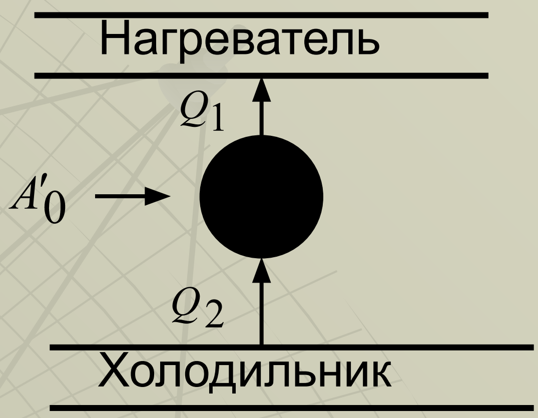
от менее нагретого (холодного) тела забирается количество теплоты $Q_1 = Q_{14} + Q_{43} > 0$ и отдается более нагретому телу количество теплоты

$$Q_1 = \left|Q_{32}\right| + \left|Q_{21}\right| = Q_2 + A'_0 .$$

а)



б)



а) если цикл соответствует тепловому двигателю (обход по часовой стрелке), КПД равен:

$$\eta = \frac{A_0}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}; \qquad (1)$$

б) если цикл соответствует идеальной тепловой машине (прямому циклу Карно), то её КПД

$$\eta_к = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 - температуры нагревателя и холодильника соответственно;

в) если цикл соответствует холодильной машине (обход против часовой стрелки), то ее КПД (точнее, холодильный коэффициент) определяется по формуле:

$$\xi_к = \frac{Q_2}{A'_0} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{1-\eta}{\eta_k}; \qquad (2)$$

г) если цикл соответствует идеальной холодильной машине (обратному циклу Карно), то ее холодильный коэффициент

$$\xi_к = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1-\eta_к}{\eta_k},$$

где T_1 - температура более нагретого тела, T_2 - температура холодного тела, от которого отбирается тепло;

д) если обратный цикл соответствует так называемому тепловому насосу, то КПД теплового насоса

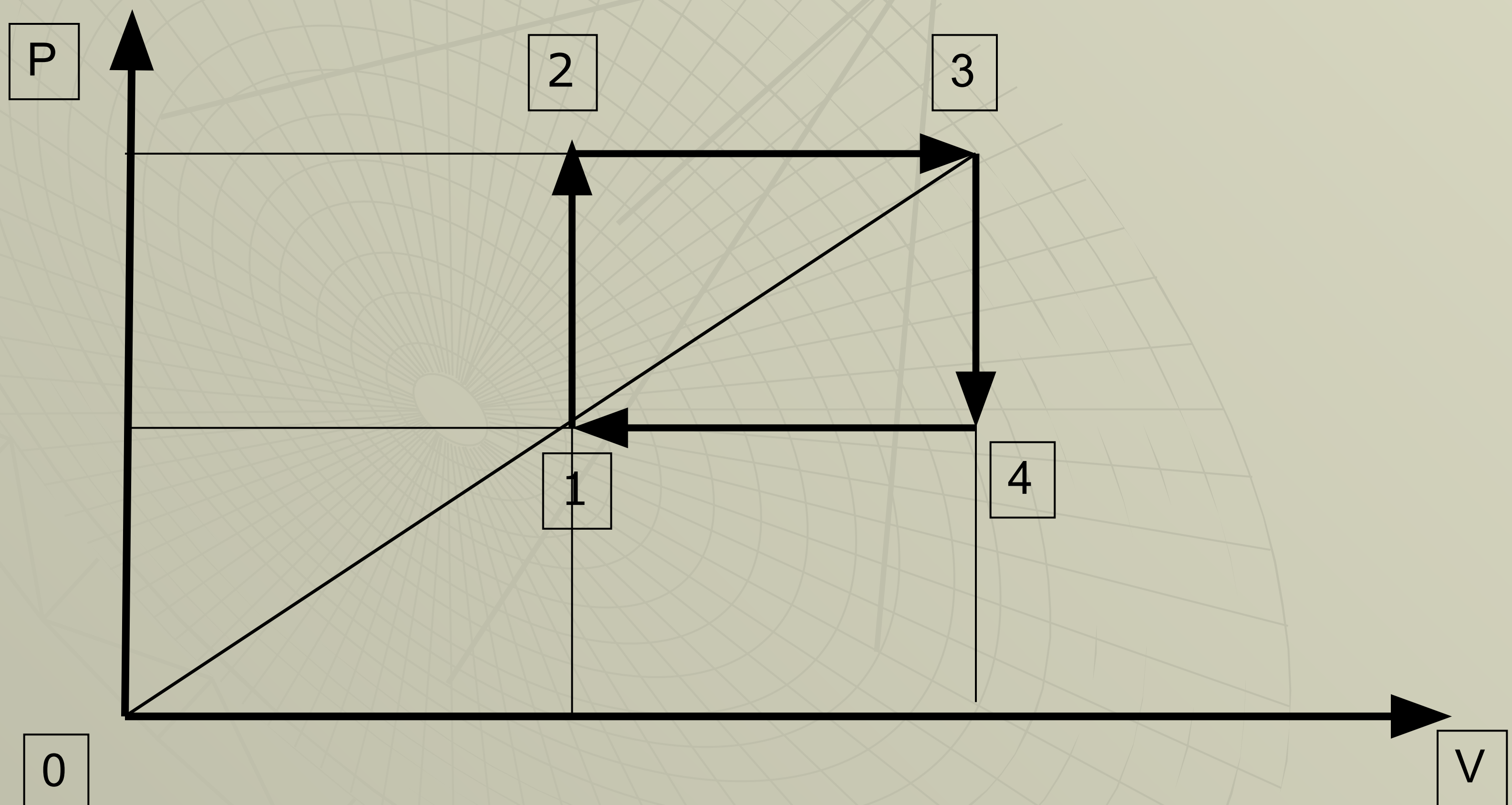
$$\eta' = \frac{Q_1}{A'_0} = \frac{1}{\eta} > 1;$$

для идеального цикла Карно:

$$\eta'_к = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta_k} > 1.$$

ЗАДАЧА №7

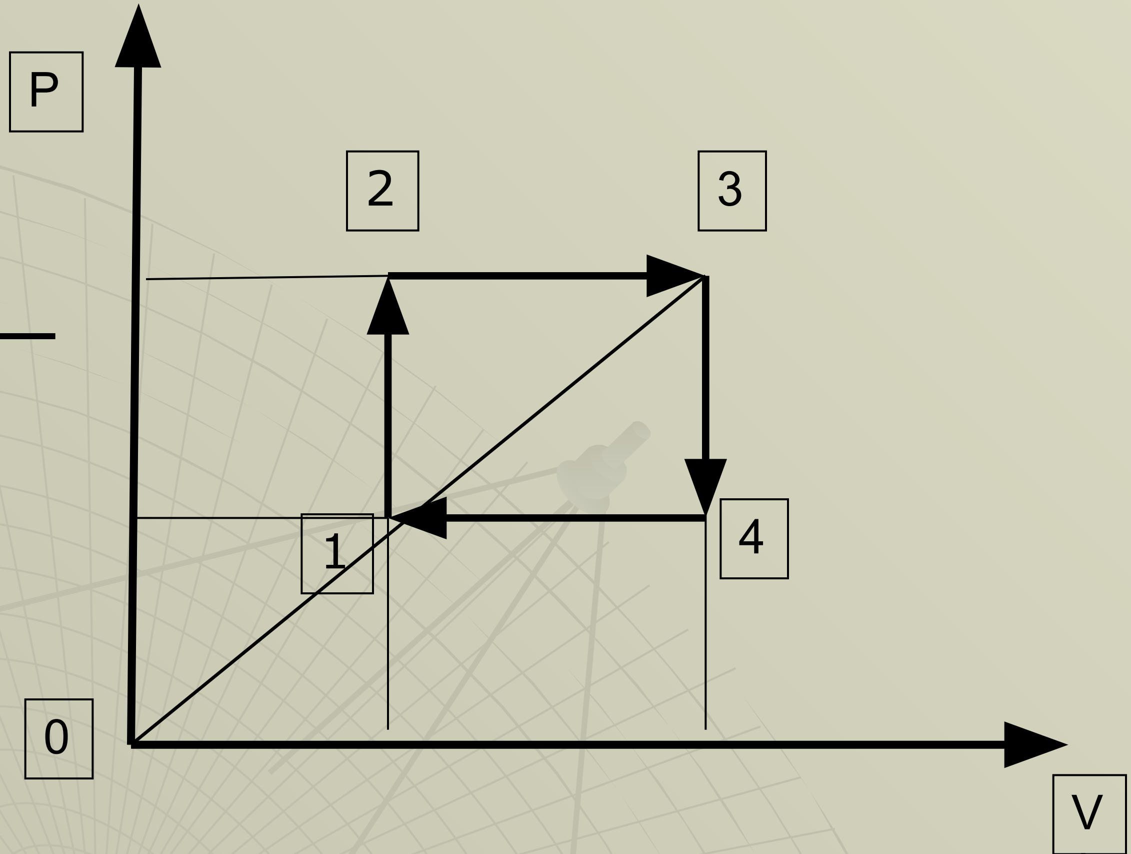
Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа в цикле 1-2-3-4-1, если известны температуры T_1 и T_3 в точках 1 и 3 соответственно, причём эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.



Дано:

T_1, T_3

A=?



Решение:

Так как работа газа, совёршенная им за цикл, равна площади фигуры, ограниченной циклом (только в координатах p, V!), то

$$A = \left(V_4 - V_1\right)\left(p_2 - p_1\right) = V_4 p_2 - V_4 p_1 + V_1 p_2 =$$

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2,$$

$$p_3 V_3 = \nu R T_3,$$

$$p_4 V_4 = \nu R T_4.$$

В системе уравнений:

$$p_1V_1=\nu RT_1,$$
$$p_2V_2=\nu RT_2,$$
$$p_3V_3=\nu RT_3,$$
$$p_4V_4=\nu RT_4.$$

Уменьшаем индексы:

$$p_1V_1=\nu RT_1, \qquad (1)$$
$$p_2V_1=\nu RT_2, \qquad (2)$$
$$p_2V_3=\nu RT_3, \qquad (3)$$
$$p_1V_3=\nu RT_4. \qquad (4)$$

Исходя из уравнения Менделеева-Клайперона, можно записать:

$$A=\left(V_4-V_1\right)\left(p_2-p_1\right)=V_4p_2-V_4p_1+V_1p_2=\left(V_1p_1+V_3p_3\right)-\left(V_2p_2+V_4p_4\right)=$$
$$\nu RT_1+\nu RT_3-\nu RT_2-\nu RT_4=\nu R\left(T_1+T_3-T_2-T_4\right).$$

Из этого равенства, а также из второго и четвёртого уравнений последней системы сразу вытекает: $T_4=T_2\cdot$

Так как точки 1 и 3 лежат на прямой, проходящей через начало координат, то $\dfrac{p_3}{p_1} = \dfrac{V_3}{V_1}$

или после следующего уменьшения индекса, $\dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{V_3}{V_1}$.

Из этого равенства, а также из второго и четвёртого уравнений последней системы сразу вытекает: $T_4 = T_2$.

Перемножив почленно первое и третье, а затем второе и четвёртое уравнения системы:

$$\begin{cases} p_1 p_2 V_1 V_3 = (\nu R)^2 T_1 T_3 \\ p_1 p_2 = (\nu R)^2 T_2 T_4. \end{cases}$$

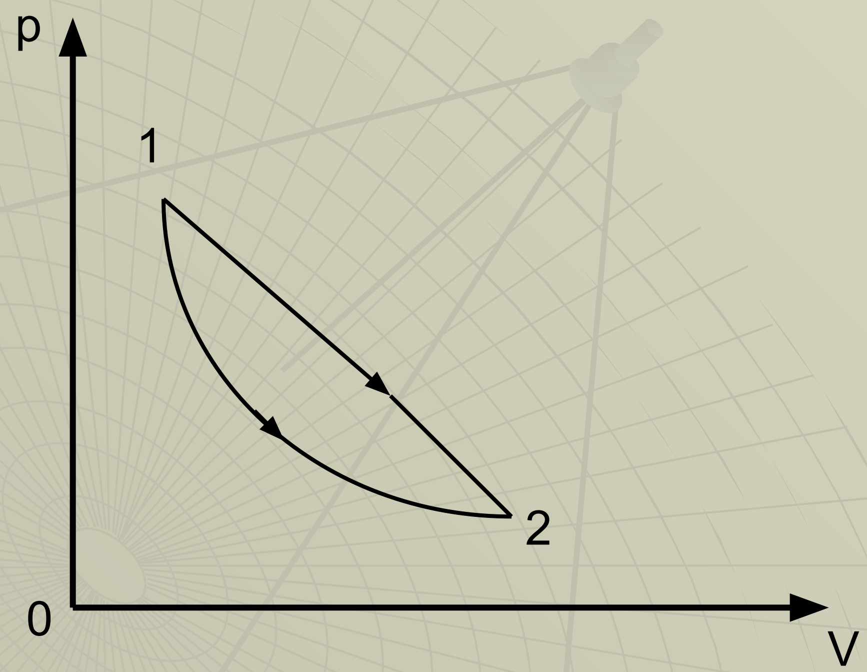
Получим: $T_2 T_4 = T_1 T_3$, или $T_4 = T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$.

Отсюда $A = \nu R\left(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3}\right) = \nu R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)$.

Ответ. $A = \nu R\left(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3}\right) = \nu R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)\cdot$

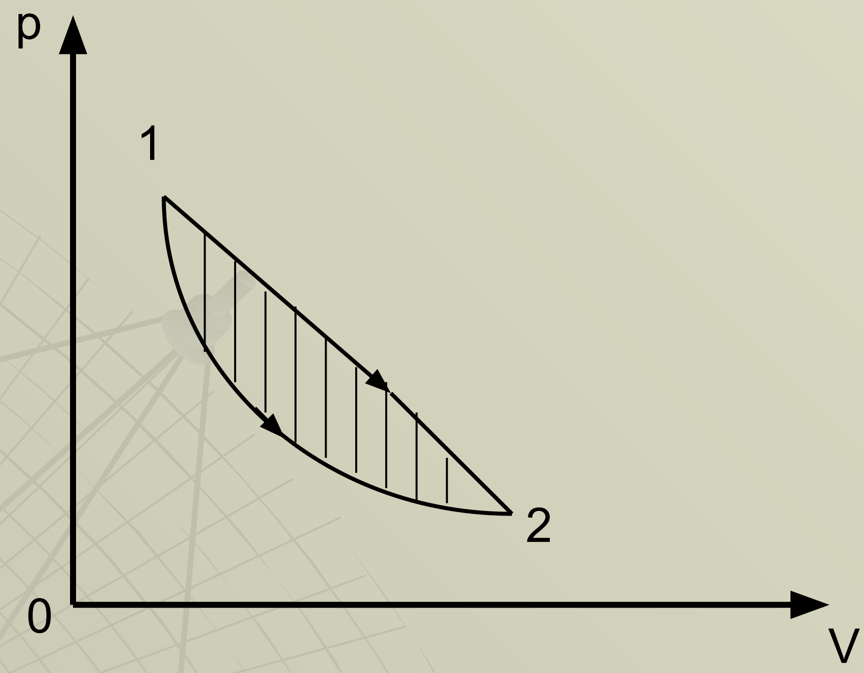
ЗАДАЧА №8

Может ли существовать такое вещество, которое можно перевести из некого начального состояния в одно и то же конечное состояние и адиабатически, и изотермически?



Решение:

Идеальный газ не может служить примером такого вещества. При адиабатическом расширении температура газа падает. При изотермическом расширении температура остается постоянной.



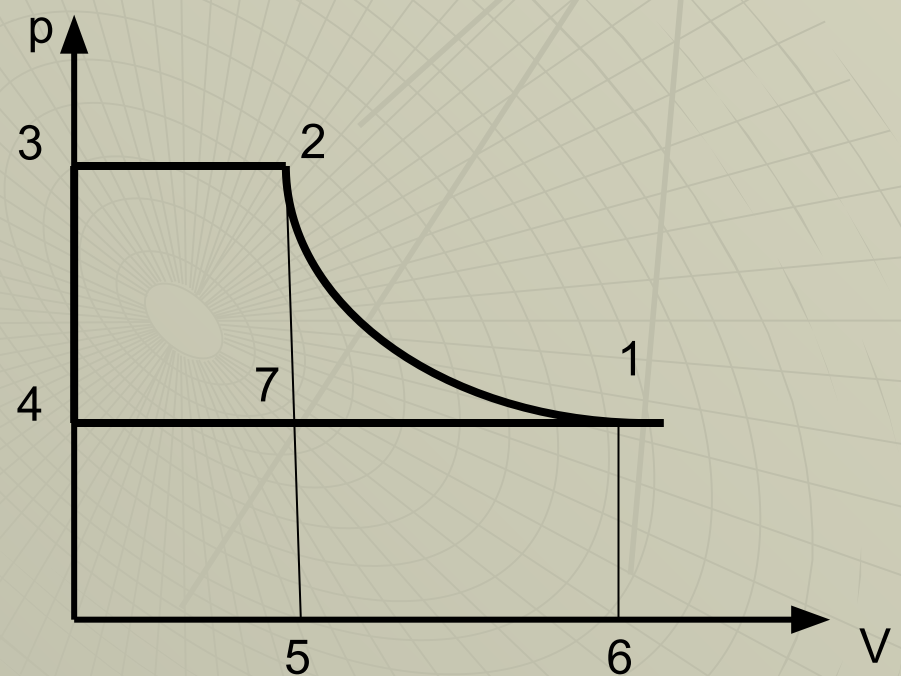
Значит точка 2 никогда не совпадет. Если представить такой процесс как цикл тепловой машины реального газа, состоящий из изотермического расширения и адиабатического сжатия.

Но тогда он представляет из себя вечный двигатель II рода. Невозможно создать тепловую машину, которая все тепло превращала в работу.

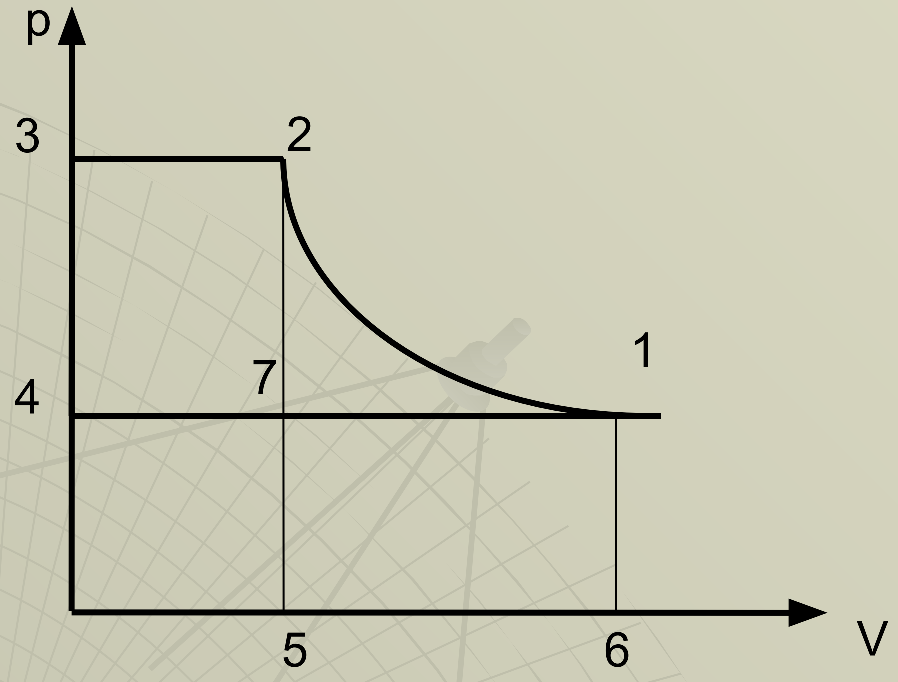
Значит такого вещества нет.

ЗАДАЧА №9

На рисунке показана теоретическая диаграмма работы компрессора двойного действия. Участок 1 – 2 соответствует изотермическому сжатию; участок 2 – 3 проталкиванию воздуха в резервуар (p=const); на участке 3 – 4 происходит мгновенное уменьшение давления в цилиндре компрессора при закрытии выпускного клапана и открытии впускного; участок 4 – 1 соответствует впуску воздуха при нормальном давлении. Показать, что работа, производимая компрессором за один оборот, характеризует изотермический процесс и может быть представлена площадью фигуры 1 – 2 – 5 – 6.



Решение:



Работа за цикл изображается площадью фигуры 1 – 2 – 3 – 4 – 1. Площадь фигуры 2 – 3 – 4 – 7, соответствующая работе при совершении части цикла, равна

$$(p_2 - p_1)V_2 = V_2 p_2 - V_2 p_1$$

Площадь фигуры 1 – 7 – 5 – 6 равна

$$(V_1 - V_2)p_1 = V_1 p_1 - V_2 p_1.$$

Так как точки 1 и 2 лежат на одной изотерме, то

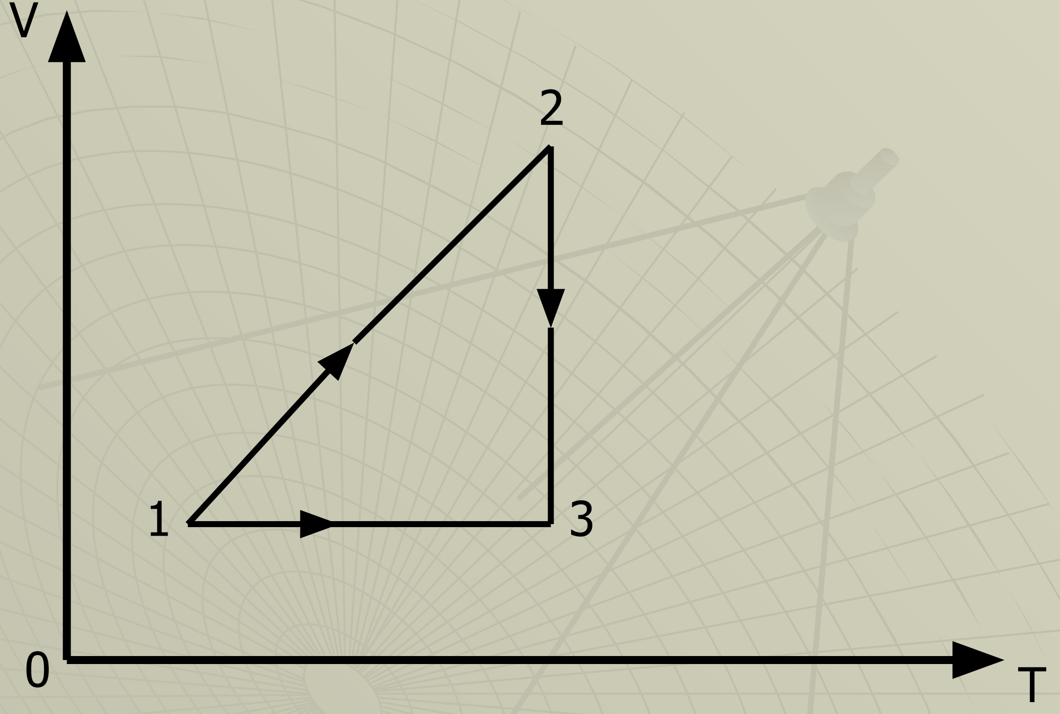
$$V_2 p_1 = V_1 p_1.$$

Следовательно, $S_{12341} = S_{1271} + S_{17561} = S_{12561},$

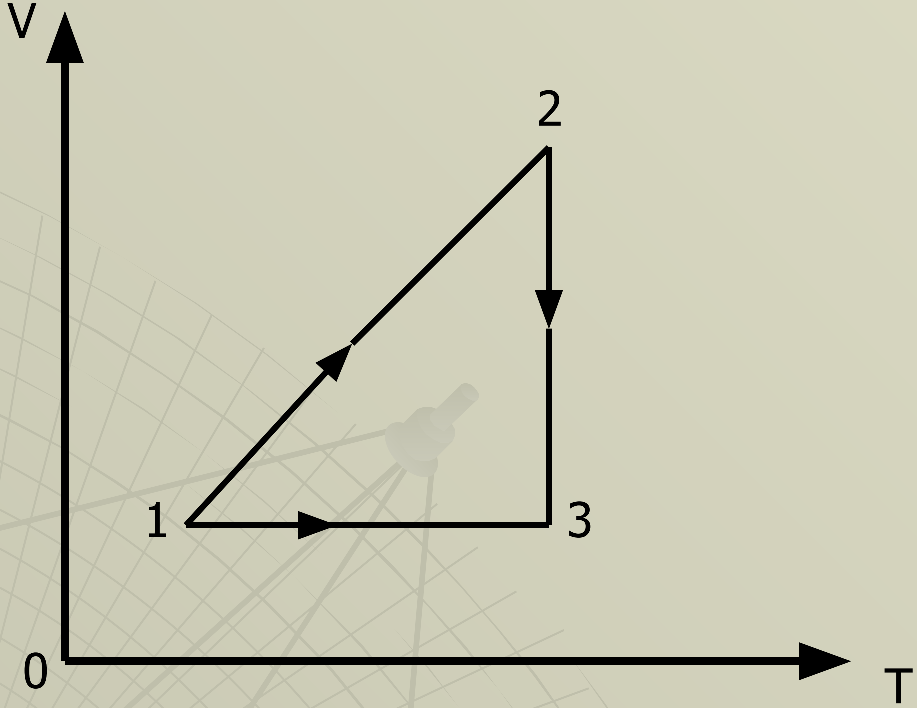
то есть за один оборот равна работе при изотермическом процессе.

ЗАДАЧА №10

На рисунке дан график изменения состояния идеального газа в координатных осях $V, T.$ Представьте этот процесс на графиках в координатных осях $p, V;$ $p, T.$



Решение.



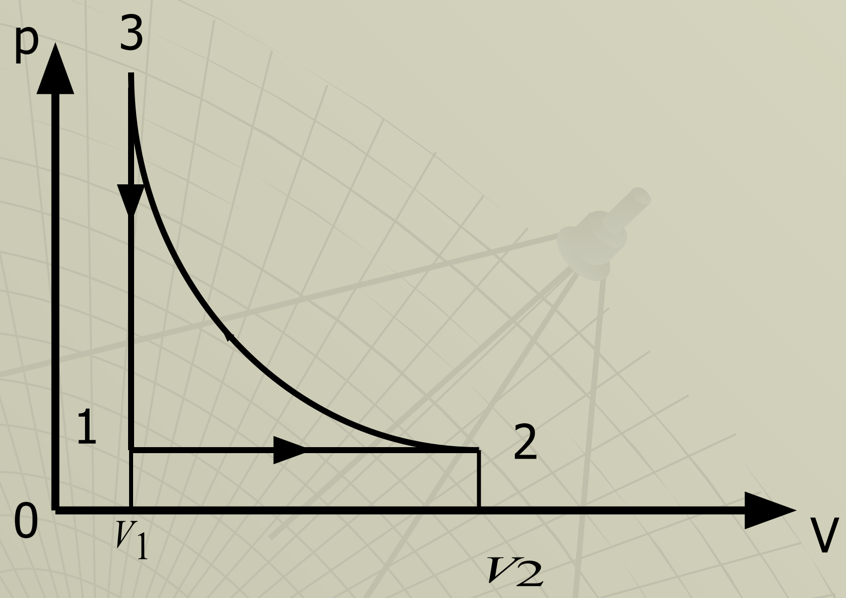
Поскольку на осях координат не указан масштаб, то по графику можно установить только относительное значение объемов и температур газа для различных моментов замкнутого процесса.

Переход из состояния в 1 в состояние 2, судя по прямолинейной зависимости V от T, осуществляется согласно по формуле $V = V_0 \alpha T$, то есть изобарно.

Переход из состояния 2 в состояние 3 происходит при постоянной температуре, то есть изотермически $pV = const.$

Переход 3 – 1 осуществляется при постоянном объеме, то есть изохорно $p = p_0 \gamma T$.

Представим теперь этот процесс в координатных осях p, V.

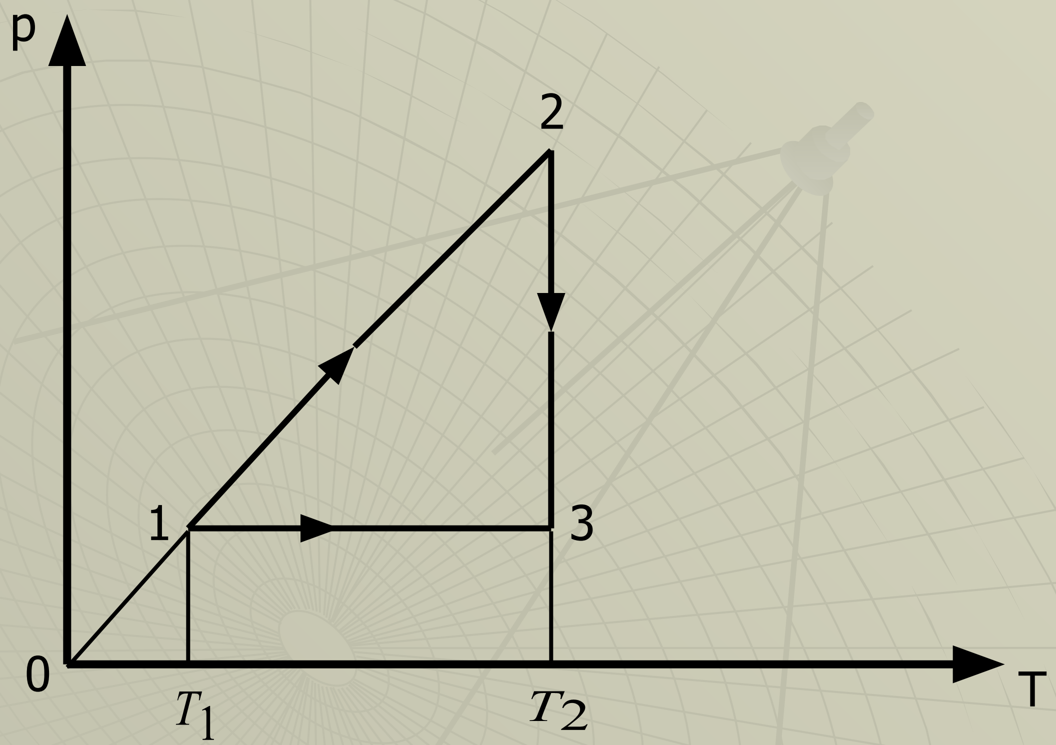


Изобарный переход 1 – 2 в координатных осях p, V изобразится прямой линией, параллельной оси OV. Значения V_1 и V_2 можно определить по заданному графику, а значение p_1 взять произвольно.

Изотерма 2 – 3 в координатных осях p, V – гипербола. При ее построении учтем, что в заданном изотермическом процессе объем газа уменьшается.

Изохорный процесс при уменьшении температуры сопровождается уменьшением давления, поэтому на графике он изображен вертикальной линией 3 – 1.

При построении графика в координатных осях p, T.



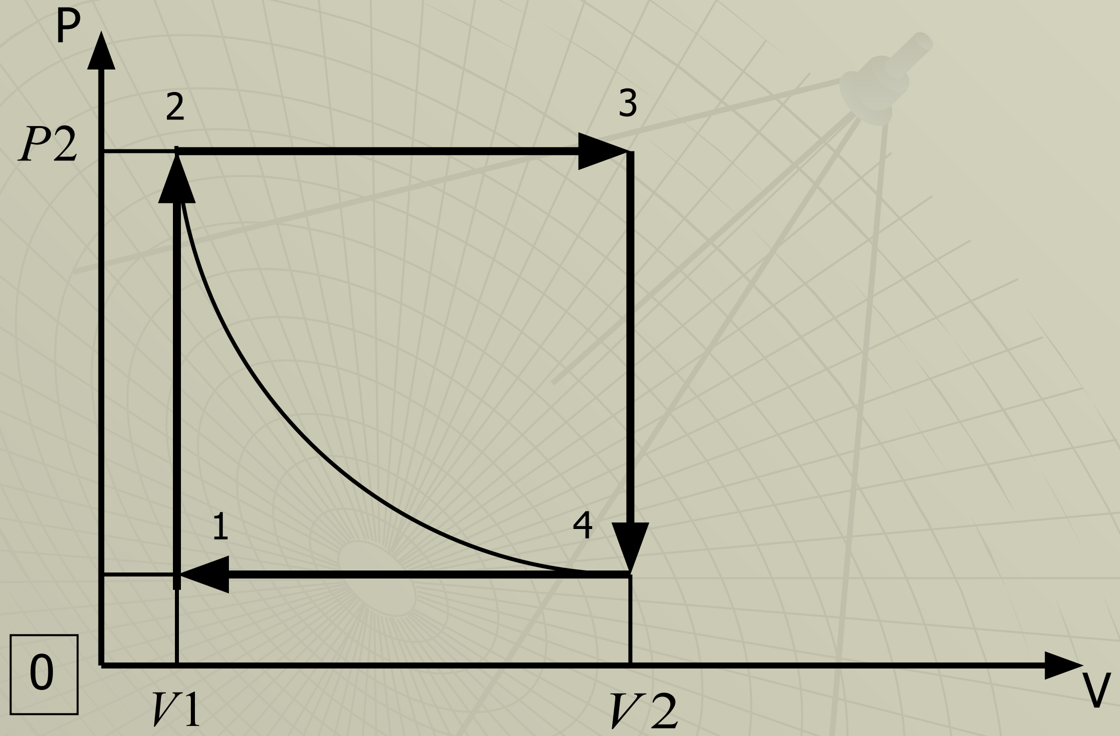
Значение p_1 выберем произвольно. Изобарный процесс 1 – 2 изобразится прямой линией, параллельной оси ОТ. Поскольку по условию изотермический процесс сопровождается уменьшением объема, изотерма 2 – 3 изобразится вертикальной линией.

Точка 3 должна находиться на изотерме T_2 - 2 и на изохоре, часть которой О – 1 изображена пунктиром. Продолжая прямую О – 1 до пересечения с прямой T_2 - 2, найдем точку 3.

После этого ясно, что изохорный процесс изобразится отрезком 3 – 1.

ЗАДАЧА №11

Один моль газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Температуры, соответствующие состояниям 1 и 3 - T_1 и T_3 соответственно. Определить работу, совершенную газа за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.



Дано:

T_1

T_3

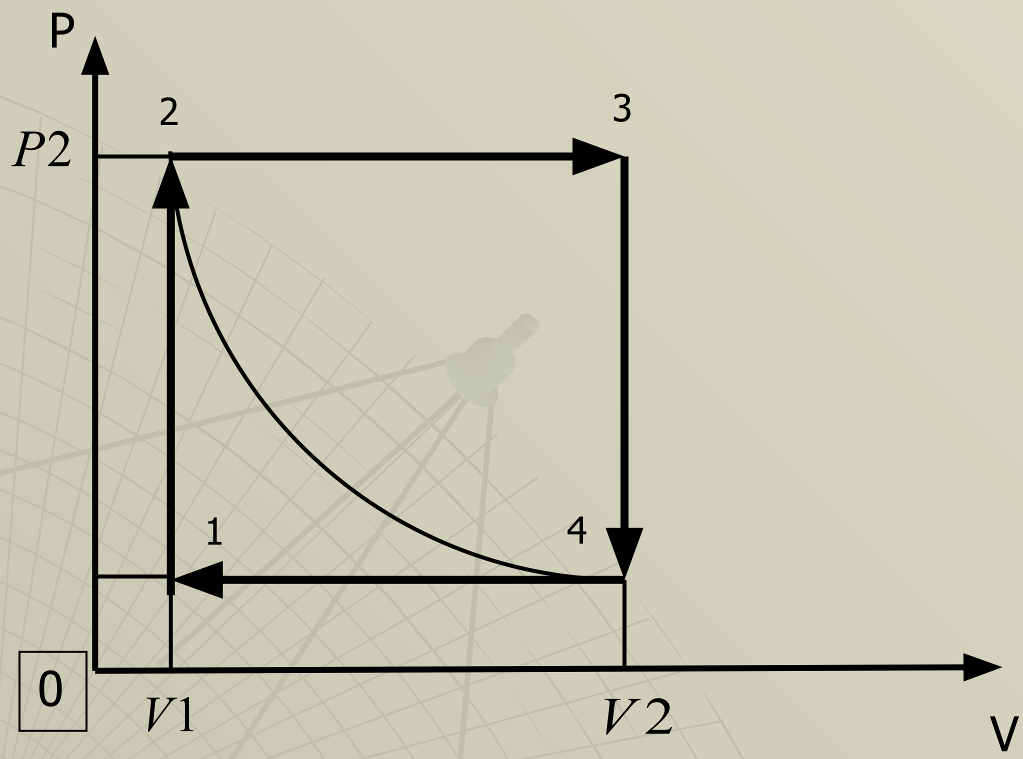
$m = \mu$

$T_2 = T_4$

Найти:

A=?

Решение:



$1 - P_1; V_1; T_1;$

$3 - P_2; V_3; T_3;$

$2 - P_2; V_1; T_2;$

$4 - P_1; V_3; T_4;$

$A = (P_2 - P_1)(V_3 - V_1) -$ работа равна площади прямоугольника.

Так как $T2 = T4 \Rightarrow P_2V_1 = P_1V_3$ (1)

Уравнение Клайперона-Менделеева:

$$P_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \Rightarrow \quad (\text{ так как } \frac{m}{\mu} = 1) \quad \Rightarrow P_1V_1 = RT_1; \qquad (2)$$

$$P_2V_3 = \frac{m}{\mu}RT_3 \Rightarrow P_2V_3 = RT_3. \qquad (3)$$

$$\frac{(1)}{(3)} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} * \frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_3} \qquad (4)$$

Из $(1) \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{V_3} \Rightarrow (4) \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^2 = \frac{T_1}{T_3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_3} = \sqrt{\frac{T_1}{T_3}}.$

Преобразуем уравнение для работы:

$$A = (P_2 - P_1)(V_3 - V_1) = (P_2V_3 - P_1V_3 - P_2V_1 + P_1V_1) =$$

$$= P_2V_3\left(1 - \frac{P_1}{P_2} - \frac{V_1}{V_3} + \frac{P_1V_1}{P_2V_3}\right) = P_2V_3\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)\left(1 - \frac{V_1}{V_3}\right) =$$

$$= RT_3\left(1-\frac{V_1}{V_3}\right)^2 = RT_3\left(1-\sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right)^2.$$

Ответ: $$A = RT_3\left(1-\sqrt{\frac{T_1}{T_3}}\right)^2.$$