Основы цифровой обработки сигналов

Лекция 14 (7_3)

Тема 7. Дискретные случайные процессы(окончание)

Преподаватель: Недашковский В. М.

Тема 7. Дискретные случайные процессы

7. Дискретные случайные процессы

7.1. О характеристиках случайных величин

7.2. О характеристиках случайных процессов

7.3. Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

7.4. Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

7.5. О спектральной факторизации

7.6. Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

7.6. Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

<u>О классических методах спектрального оценивания</u>

Существует два метода определения спектральной плотности мощности (СПМ):

- ***прямой метод*** основан на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье для бесконечной последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения;

- ***косвенный метод*** основан на использовании бесконечной последовательности значений данных для расчета автокорреляционной последовательности, преобразования Фурье которой дает искомую спектральную плотность мощности.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

<u>О методе периодограмм</u>

Рассмотрим практические способы вычисления спектральной плотности дискретного случайного процесса. Напомним, что спектральную плотность можно определить как преобразование Фурье от корреляционной функции $R_x[m]$ дискретного случайного процесса (косвенный метод)

$$S_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m]\, e^{-j\omega m T}$$

Другой путь определения спектральной плотности - это осреднение спектров реализаций (прямой метод). Этот другой путь перспективен, так как известна эффективность БПФ при вычислении спектров. Напомним, что для реализации $x_1(t)$ непрерывного случайного процесса со спектром

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

после усреднения выражения

$$S_1(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \overline{F_1(j\omega) F_1^*(j\omega)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left| F_1(j\omega) \right|^2$$

по всем реализациям получаем

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} M\left[\left| F_1(j\omega) \right|^2 \right]$$

Видим, что спектральная плотность непрерывного случайного процесса пропорциональна среднеквадратичному значению квадратов случайных амплитуд гармоник случайного процесса с частотами, близкими к ω.

Спектр $F_x(j\omega)$ реализации $x[k]$ дискретного случайного процесса равен

$$F_x(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k T}$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

По аналогии с приведенным выше выражением для спектральной плотности $S_x(\omega)$ непрерывного случайного процесса, полученной путем усреднения по всем реализациям случайного процесса,

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} M\left[\left|X_T(j\omega)\right|^2\right]$$

мы получим выражение для спектральной плотности дискретного случайного процесса путем усреднения по одной реализации

$$S_x(\omega) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n T} \right|^2$$

Так полученная спектральная плотность называется ***периодограммой.***

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Если значения случайного процесса в начале и конце обрабатываемого отрезка не совпадают, возникает эффект растекания спектра. Дело в том, что БПФ обрабатывает случайный процесс, предполагая его периодическим. Несовпадение значений случайного процесса в начале и в конце эквивалентно разрыву непрерывности. Это вызывает появление высоких частот в спектре, он становится шире – «растекается». Для борьбы с растеканием спектра и по ряду других причин при определении спектра используют окна, отсчеты которых обозначим w[k] . Вычисление идет в этом случае по формуле

$$S_x(\omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \frac{\left|\sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, w[k]\, e^{-j\omega k T}\right|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} \left|w[k]\right|^2}$$

Так вычисленная спектральная плотность называется ***модифицированной периодограммой*.**

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

В пакете MATLAB вычисление периодограммы проводится с помощью следующей команды

[S_x,f] = periodogram[x,, N_{fft}, $f_{s...}$]

Здесь наиболее важные параметры:

x – вектор отсчетов случайного процесса (обязательный параметр),

w– вектор коэффициентов окна,

N_{fft} - размерность БПФ,

f_s - частота дискретизации в герцах,

S_x - вычисленная спектральная плотность,

f - значения частоты, на которых вычислялась спектральная плотность.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

О методе Уэлча

Периодограмма как результат работы БПФ сильно изрезана, поскольку каждый случайный отсчет входит в обработку и отображается в результате. Для уменьшения изрезанности можно применить усреднение. Так можно в качестве сигнала для обработки использовать значения полусумм соседних отсчетов (метод Даниела). Можно разбить интервал обработки на отрезки, равные интервалу корреляции, и периодограммы отрезков усреднить (метод Бартлета).

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Уэлч внес две модификации в эти методы обработки:

1. Использовал весовые функции для уменьшения растекания спектра, которое усиливается при разрезании интервала обработки на отрезки.

2. Использовал перекрытие сегментов, когда начало следующего отрезка находится не в конце, а в середине предыдущего отрезка. При этом увеличивается количество отрезков, количество периодограмм, подлежащих усреднению, и повышается точность. С другой стороны, в обработке участвуют коррелированные отсчеты, что понижает точность.

На практике величину перекрытия выбирают около 50%. В MATLABе метод Уэлча реализуется функцией pwelch.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

<u>О параметрических методах</u>

Среди возможных параметрических методов спектрального анализа наибольшее распространение получили методы, основанные на авторегрессионной модели формирования сигнала. Эта модель предполагает, что анализируемый сигнал *x[n]* можно представить в виде выхода фильтра, на вход которого подан белый шум *g[n].*

Уравнение авторегрессионного фильтра имеет вид

$$x[n] + a_1 x[n-1] + \ldots + a_p x[n-p] = g[n]$$

или

$$x[n] = -a_1 x[n-1] - \ldots - a_p x[n-p] + g[n]$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Если все коэффициенты фильтра a_i известны, и известна дисперсия входного белого шума σ_g^2, то спектральная плотность выхода вычисляется по формуле:

[illegible]

Постановка задачи

Предположим, что *x[n]* является выходом фильтра, но коэффициенты фильтра неизвестны.

Покажем, что тогда можно с помощью адаптивного фильтра найти эти коэффициенты.

Конец постановки задачи

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Построим схему линейного предсказания сигнала *x[n]* по предыдущим его отсчетам:

$$x_{пр}[n] = b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \dots + b_p x[n-p]$$

Сравнив предсказание с истинным значением *x[n]* получим ошибку *y[n]* (см. выражение и рис. ниже):

$$y[n] = x[n] - x_{пр}[n]$$

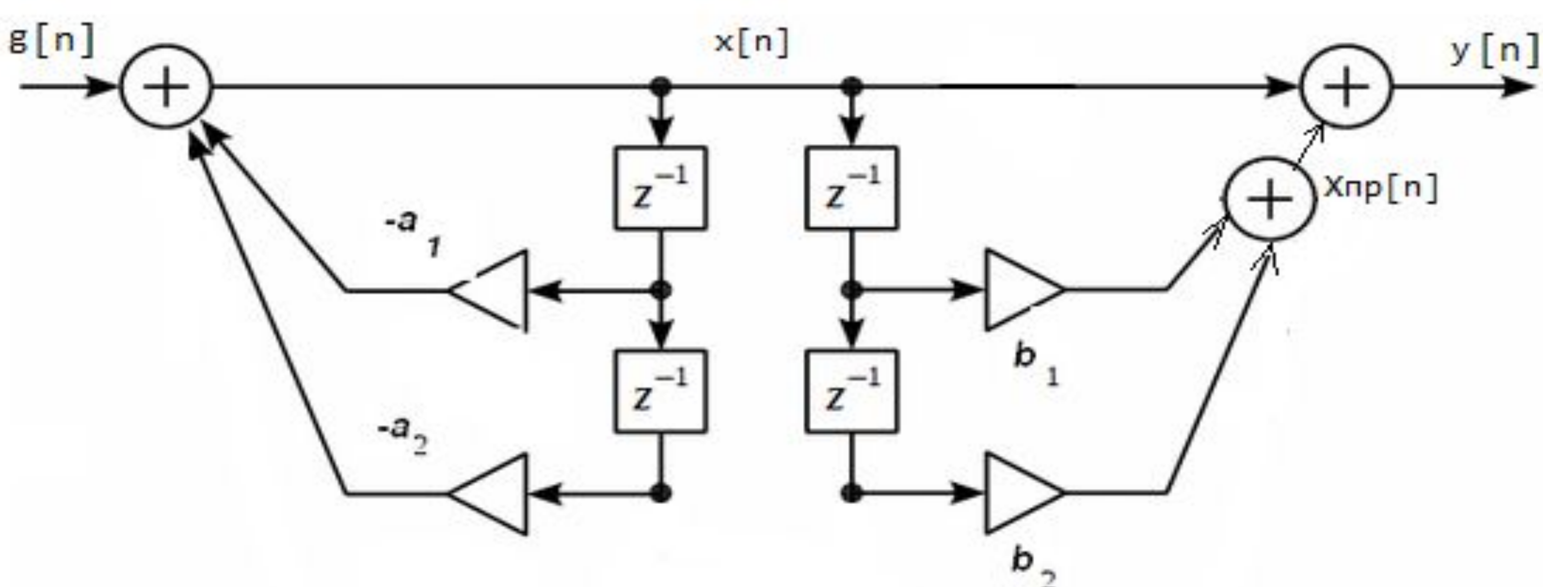

Рис. Поясняющая схема прогнозирования

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Для Z– преобразования ошибки из рис. выше следует:

$$\square(\square) = \square(\square)\frac{1 - \square_1\square^{-1} - \square_2\square^{-2} - \dots - \square_{\square}\square^{-\square}}{1 - \square_1\square^{-1} - \square_2\square^{-2} - \dots - \square_{\square}\square^{-\square}}$$

Разложим дробь в ряд, получим:

$$\square(\square) = \square(\square)\left(1 + \square_1\square^{-1} + \square_2\square^{-2} + \dots\right)$$

Тогда выражение для ошибки можно записать:

$$\square[\square] = \square[\square] + \square_1\square[\square - 1] + \square_2\square[\square - 2] + \dots$$

Поскольку отсчеты белого шума независимы, то для дисперсии ошибки получим

$$\square_{\square}^2 = \square_{\square}^2\left(1 + \square_1^2 + \square_2^2 + \dots\right)$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Минимальное значение дисперсии ошибки σ_y^2 можно получить, если все $\gamma_i = 0$. Тогда из приведенного ранее выражения

$$Y(z) = X(z)\,\frac{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_p z^{-p}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_p z^{-p}}$$

Следует

$b_i = a_i$

Следовательно, если минимизировать ошибку $y[n]$, то b_i дадут оценку коэффициентов a_i неизвестного фильтра. Определив коэффициенты вычисляем спектральную плотность по соотношению

$$P_x(e^{j\omega}) = \sigma_y^2\,\frac{1}{\left|1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega} - \dots - a_p e^{-jp\omega}\right|^2}$$

Спасибо за внимание