

Основы цифровой обработки сигналов

Лекция 14 (7_3)

Тема 7. Дискретные случайные процессы(окончание)

Преподаватель: Недашковский В. М.

Тема 7. Дискретные случайные процессы

7. Дискретные случайные процессы

7.1. О характеристиках случайных величин

7.2. О характеристиках случайных процессов

7.3. Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

7.4. Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

7.5. О спектральной факторизации

7.6. Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

7.6. Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

О классических методах спектрального оценивания

Существует два метода определения спектральной плотности мощности (СПМ):

- **прямой метод** основан на вычислении квадрата модуля преобразования Фурье для бесконечной последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения;
- **косвенный метод** основан на использовании бесконечной последовательности значений данных для расчета автокорреляционной последовательности, преобразования Фурье которой дает искомую спектральную плотность мощности.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

О методе периодограмм

Рассмотрим практические способы вычисления спектральной плотности дискретного случайного процесса. Напомним, что спектральную плотность можно определить как преобразование Фурье от корреляционной функции $R_x[m]$ дискретного случайного процесса (косвенный метод)

$$S_x(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x[m] e^{-j\omega m}$$

Другой путь определения спектральной плотности - это осреднение спектров реализаций (прямой метод). Этот другой путь перспективен, так как известна эффективность БПФ при вычислении спектров. Напомним, что для реализации $x_1(t)$ непрерывного случайного процесса со спектром

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

после усреднения выражения

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \overline{\sum_{k=-N}^N x[k] e^{-j\omega k}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \overline{\sum_{k=-N}^N x[k] e^{-j\omega k} x^*[k] e^{j\omega k}}$$

по всем реализациям получаем

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^N [x[k] e^{-j\omega k} x^*[k] e^{j\omega k}]$$

Видим, что спектральная плотность непрерывного случайного процесса пропорциональна среднеквадратичному значению квадратов случайных амплитуд гармоник случайного процесса с частотами, близкими к ω .

Спектр $F_x(j\omega)$ реализации $x[k]$ дискретного случайного процесса равен

$$F_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-j\omega k} \delta(\omega - \omega_k) d\omega$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

По аналогии с приведенным выше выражением для спектральной плотности $S_x(\omega)$ непрерывного случайного процесса, полученной путем усреднения по всем реализациям случайного процесса,

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \langle \tilde{x}(t) \tilde{x}^*(t) \rangle dt$$

мы получим выражение для спектральной плотности дискретного случайного процесса путем усреднения по одной реализации

$$S_x(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle \tilde{x}[n] \tilde{x}^*[n] \rangle e^{-j\omega n}$$

Так полученная спектральная плотность называется **периодограммой**.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Если значения случайного процесса в начале и конце обрабатываемого отрезка не совпадают, возникает эффект растекания спектра. Дело в том, что БПФ обрабатывает случайный процесс, предполагая его периодическим. Несовпадение значений случайного процесса в начале и в конце эквивалентно разрыву непрерывности. Это вызывает появление высоких частот в спектре, он становится шире – «растекается». Для борьбы с растеканием спектра и по ряду других причин при определении спектра используют окна, отсчеты которых обозначим $w[k]$. Вычисление идет в этом случае по формуле

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \frac{\left| \sum_{k=0}^{N-1} w[k] x[k] e^{-j\omega k} \right|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} w[k]^2}$$

Так вычисленная спектральная плотность называется ***модифицированной периодограммой***.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

В пакете MATLAB вычисление периодограммы проводится с помощью следующей команды

$$[S_x, f] = periodogram(x, N_{fft}, f_s, \dots)$$

Здесь наиболее важные параметры:

x – вектор отсчетов случайного процесса (обязательный параметр),

w – вектор коэффициентов окна,

N_{fft} – размерность БПФ,

f_s – частота дискретизации в герцах,

S_x – вычисленная спектральная плотность,

f – значения частоты, на которых вычислялась спектральная плотность.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

О методе Уэлча

Периодограмма как результат работы БПФ сильно изрезана, поскольку каждый случайный отсчет входит в обработку и отображается в результате. Для уменьшения изрезанности можно применить усреднение. Так можно в качестве сигнала для обработки использовать значения полусумм соседних отсчетов (метод Даниела). Можно разбить интервал обработки на отрезки, равные интервалу корреляции, и периодограммы отрезков усреднить (метод Бартлета).

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Уэлч внес две модификации в эти методы обработки:

1. Использовал весовые функции для уменьшения растекания спектра, которое усиливается при разрезании интервала обработки на отрезки.
2. Использовал перекрытие сегментов, когда начало следующего отрезка находится не в конце, а в середине предыдущего отрезка. При этом увеличивается количество отрезков, количество периодограмм, подлежащих усреднению, и повышается точность. С другой стороны, в обработке участвуют коррелированные отсчеты, что понижает точность.

На практике величину перекрытия выбирают около 50%. В MATLABе метод Уэлча реализуется функцией `pwelch`.

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

О параметрических методах

Среди возможных параметрических методов спектрального анализа наибольшее распространение получили методы, основанные на авторегрессионной модели формирования сигнала. Эта модель предполагает, что анализируемый сигнал $x[n]$ можно представить в виде выхода фильтра, на вход которого подан белый шум $g[n]$.

Уравнение авторегрессионного фильтра имеет вид

$$x[n] + a_1 x[n-1] - 1 \cdot x[n] + a_2 x[n-2] - a_2 = g[n]$$

или

$$x[n] = -a_1 x[n-1] - 1 \cdot x[n] - a_2 x[n-2] - a_2 + g[n]$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Если все коэффициенты фильтра a_i известны, и известна дисперсия входного белого шума σ_g^2 , то спектральная плотность выхода вычисляется по формуле:

$$S_x(\omega) = |A(\omega)|^2 S_g(\omega)$$

Постановка задачи

Предположим, что $x[n]$ является выходом фильтра, но коэффициенты фильтра неизвестны.

Покажем, что тогда можно с помощью адаптивного фильтра найти эти коэффициенты.

Конец постановки задачи

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Построим схему линейного предсказания сигнала $x[n]$ по предыдущим его отсчетам:

$$\hat{x}[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \dots + a_M x[n-M] + g[n]$$

Сравнив предсказание с истинным значением $x[n]$ получим ошибку $y[n]$ (см. выражение и рис. ниже):

$$y[n] = x[n] - \hat{x}[n]$$

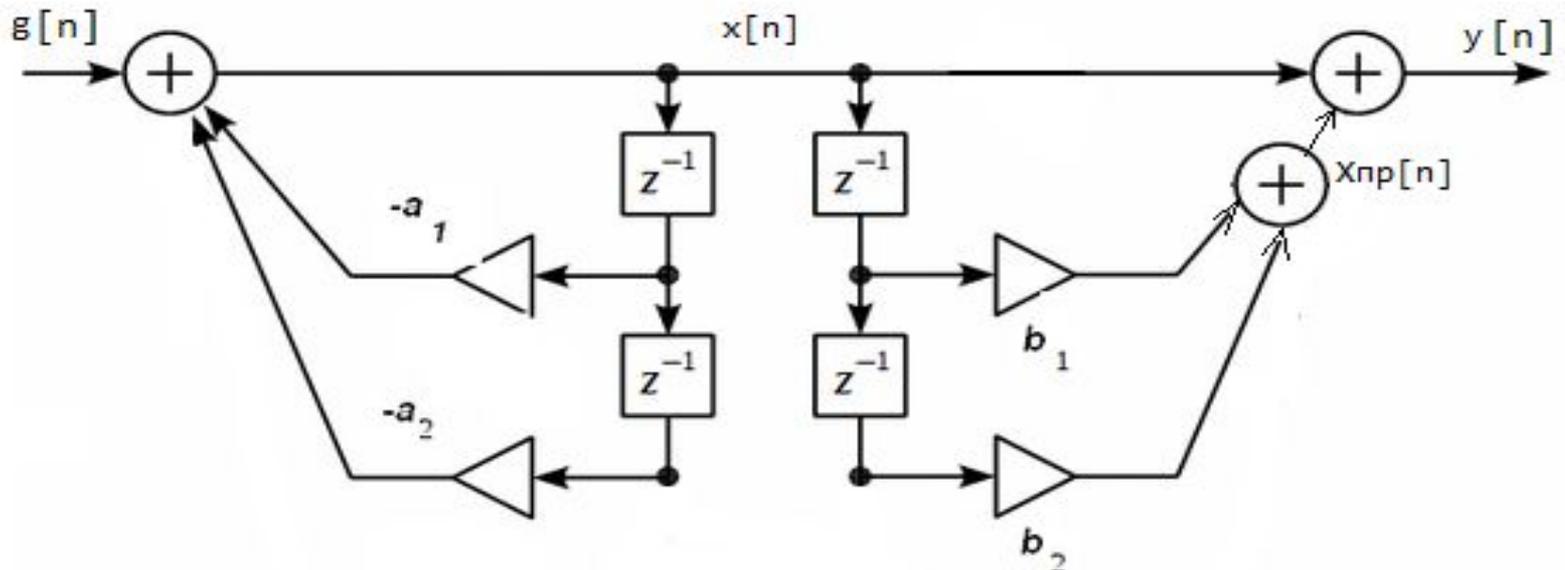


Рис. 1 поясняющая схема прогнозирования

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Для Z- преобразования ошибки из рис. выше следует:

$$S_{\varepsilon}(z) = S_{\varepsilon}(z) \frac{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} - \dots - \alpha_N z^{-N}}{1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} - \dots - \alpha_N z^{-N}}$$

Разложим дробь в ряд, получим:

$$S_{\varepsilon}(z) = S_{\varepsilon}(z) (1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots)$$

Тогда выражение для ошибки можно записать:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k + \alpha_1 \varepsilon_{k-1} - 1 + \alpha_2 \varepsilon_{k-2} - 2 + \dots$$

Поскольку отсчеты белого шума независимы, то для дисперсии ошибки получим

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots)$$

Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

Минимальное значение дисперсии ошибки σ_y^2 можно получить, если все $\gamma_i = 0$. Тогда из приведенного ранее

выражения

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \frac{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}}$$

Следует

$$b_i = a_i$$

Следовательно, если минимизировать ошибку $y[n]$, то b_i дадут оценку коэффициентов a_i неизвестного фильтра.

Определив коэффициенты вычисляем спектральную плотность по соотношению

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_M z^{-M}}$$

Спасибо за внимание