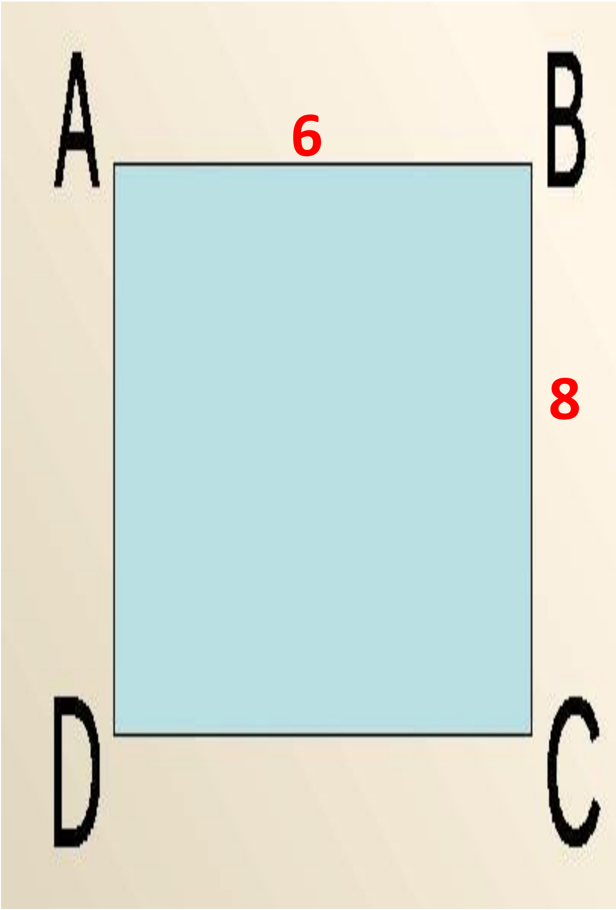
# Задачи по геометрии

## Цилиндр.

## Шар

# Площади и объем цилиндра. Решение задач.

**№1 Найдите объем и площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 и 8 см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.**



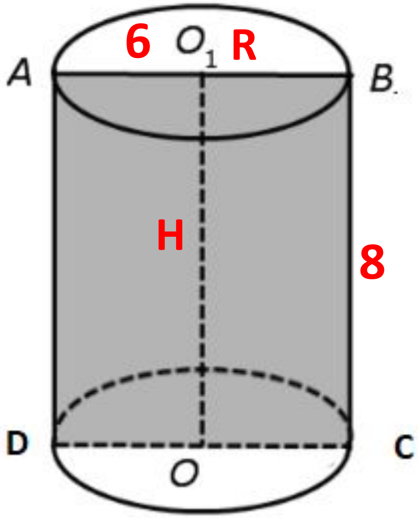

Дано:

ABCD – прямоугольник вращается вокруг оси симметрии меньших сторон, образуется цилиндр высокий.

AB = 6 см, BC = 8 см.

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$, $S_{\text{бок. цилиндра}}$

# Решение:




$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{\text{бок. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

У цилиндра $R = O_1B = AB/2$, $H = BC$

$O_1B = AB/2 = 6/2 = 3$ см $= R$

$H = BC = 8$ см

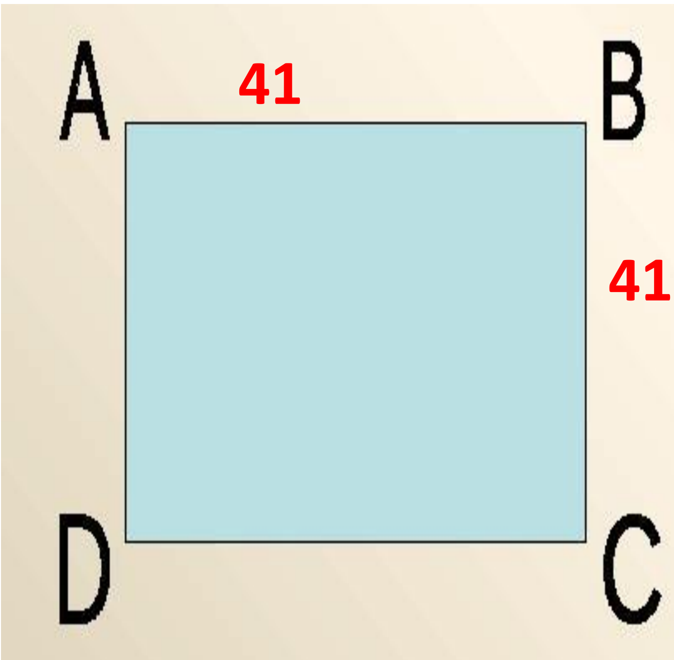
$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi$ см$^3$

$S_{\text{бок. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\ \pi$ см$^2$

Ответ: $V_{\text{цилиндра}} = 72\pi$ см$^3$,

$S_{\text{бок. цилиндра}} = 48\ \pi$ см$^2$

**№2 Найдите объем и площадь полной поверхности тела, полученного при вращении квадрата со стороной 41 см вокруг прямой, которая проходит через середины противоположных сторон**

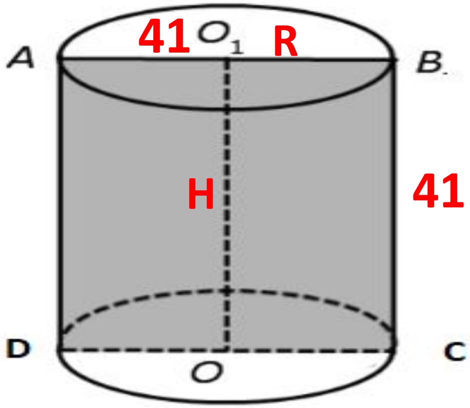



Дано: ABCD – квадрат вращается вокруг оси симметрии, образуется цилиндр.

AB=BC = 41 см.

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$ , $S_{\text{полн. цилиндра}}$

# Решение:




$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}}$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$

У цилиндра $R = O_1B = AB/2$, $H = BC$

$O_1B = AB/2 = 41/2 = 20{,}5$ см $= R$

$H = BC = 41$ см

$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot 20{,}5^2 \cdot 41 = 17230{,}25\ \pi$ см$^3$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot 20{,}5 \cdot 41 + 2 \cdot \pi \cdot 20{,}5^2 =$

$= 1681\ \pi + 840{,}5\ \pi = 2521{,}5\ \pi$ см$^2$

Ответ: $V_{\text{цилиндра}} = 17230{,}25\ \pi$ см$^3$ ,

$S_{\text{бок. цилиндра}} = 2521{,}5\ \pi$ см$^2$

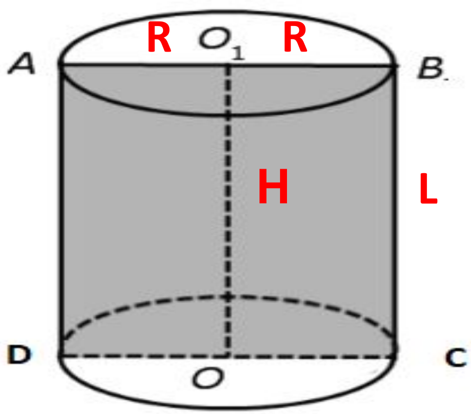
# Практическая работа

## **Вариант В=20**

В – 2 последние цифры по студенческому билету

| | |
|---|---|
| **№1 Найдите объем и площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 10 и В см вокруг прямой, которая проходит через середины его больших сторон.** | **№2 Найдите объем и площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении квадрата со стороной В0 см вокруг прямой, которая проходит через середины противоположных сторон** |

## №3 Площадь осевого сечения цилиндра равна 64 см$^{2}$, а его образующая L равна диаметру d основания. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.



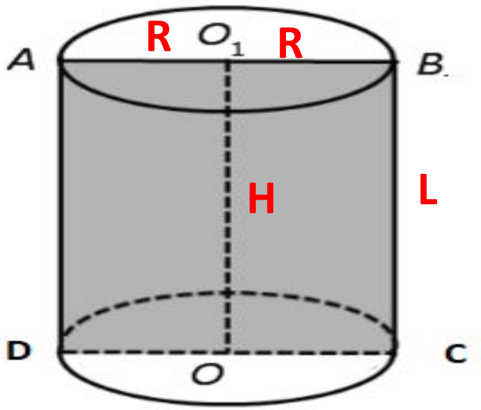

Дано: цилиндр, сечение ABCD

$S_{сеч} = 64$ см$^2$

$d = L$

Найти: $V_{цилиндра}$, $S_{полн.\ цилиндра}$

# Решение:




$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}}$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$

У цилиндра d=2R = L, таким образом у сечения ABCD стороны AB=BC . Поэтому ABCD является квадратом.

$S_{\text{квадрата}} = 64$ см$^2$

$a^2 = 64$

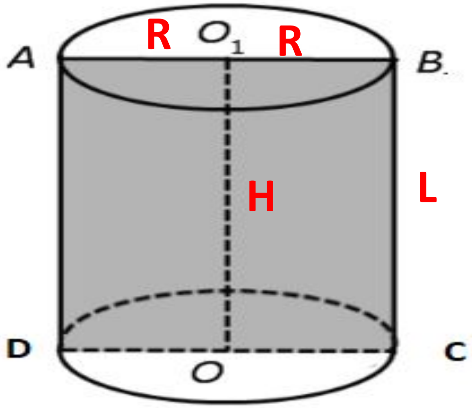
$a = \sqrt{64} = 8$ см = AB=BC = d=2R = L

L = 8 см , d = 8 см,

R = d/2 = 8/2 = 4 см

L = H = 8 см

# Решение:




$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}}$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$

$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\ \pi\ \text{см}^3;$

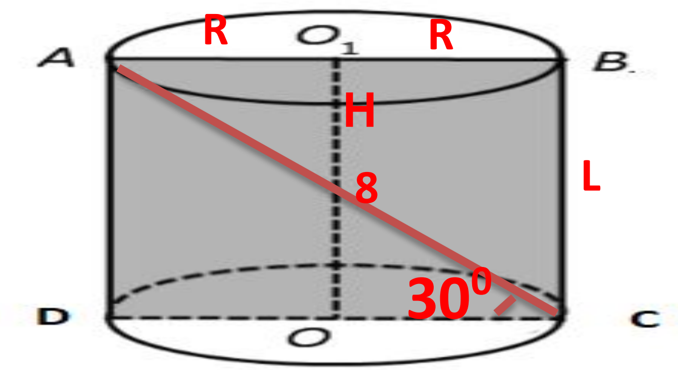
$S_{\text{полн. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2 =$

$= 64\ \pi + 32\ \pi = 96\ \pi\ \text{см}^2$

Ответ: $V_{\text{цилиндра}} = 128\ \pi\ \text{см}^3;$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = 96\ \pi\ \text{см}^2$

**№4 Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $30^0$ . Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра.**




Дано: цилиндр, сечение ABCD

AC = 8 см, угол ACD= **$30^0$**

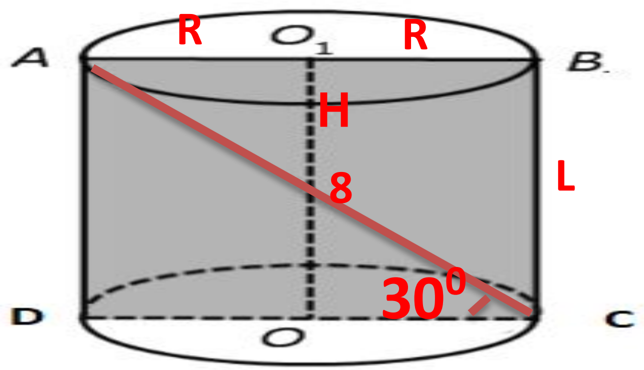
Найти: $V_{\text{цилиндра}}$ , $S_{\text{полн. цилиндра}}$

# Решение:

$V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}}$

$S_{\text{полн. цилиндра}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$




Рассмотрим ∆ ACD – прямоугольный.

Катет против угла **$30^0$**

равен половине гипотенузы.

AD = ½ * AC

AD = ½ * 8 = 4 см

У цилиндра H = AD = 4 см

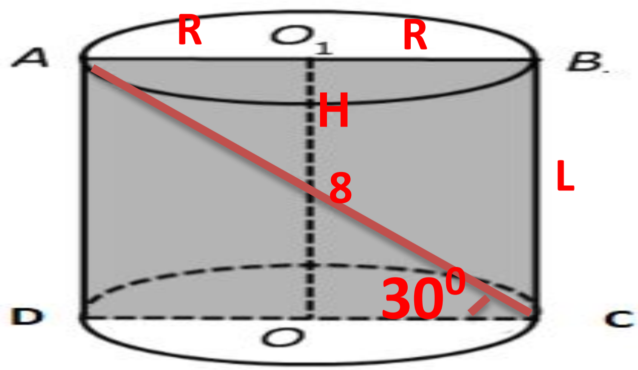
R = DO = ½ * DC

Решение:

$V_{цилиндра} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{полн.\ цилиндра} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$

$S_{полн.\ цилиндра} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$




AD = ½ * AC

AD = ½ * 8 = 4 см

У цилиндра H = AD = 4 см

R = DO = ½ * DC

$DC^2 = AC^2 - AD^2$

$DC^2 = 8^2 - 4^2 = 64-16=48$

$DC = \sqrt{48} = \sqrt{16*3}=4\sqrt{3}$ см

$DO = ½ * 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ см = R

Решение:

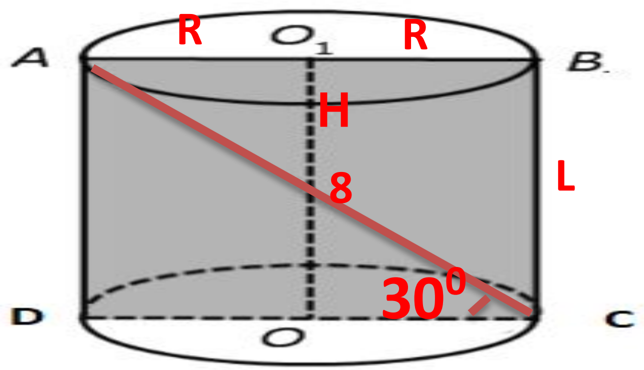
$V_{цилиндра} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{полн.\ цилиндра} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$

$S_{полн.\ цилиндра} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$

У цилиндра H = AD = 4 см

DO = ½ * 4√3 = 2√3 см = R




$V_{цилиндра} = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 4 = \pi \cdot (4 \cdot 3) \cdot 4 = =48\ \pi$ см$^3$

$S_{полн.\ цилиндра} =$

$2 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3}) \cdot 4 + 2 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 =$

$=16\sqrt{3}\,\pi + 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 3 = 16\sqrt{3}\,\pi + 24\,\pi$ см$^2$

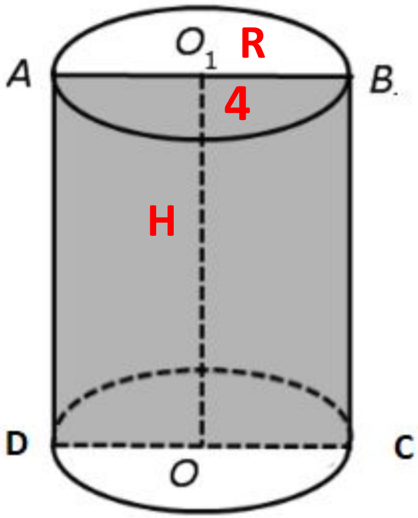
Ответ: $V_{цилиндра} = 48\ \pi$ см$^3$

$S_{полн.\ цилиндра} = 16\sqrt{3}\,\pi + 24\,\pi$ см$^2$

# Самостоятельная работа
# Вариант B=20

| | |
|---|---|
| **№3** Площадь осевого сечения цилиндра равна B см$^{2,}$ а его образующая равна диаметру основания. Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра. | **№4** Диагональ осевого сечения цилиндра равна B*2 см и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $30^0$ . Найдите объем и площадь полной поверхности цилиндра. |

# № 5 Радиус основания цилиндра равен 4 см, а высота в 2 раза больше длины окружности основания. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра




Дано: цилиндр,

H=2·C, C-длина окружности

R = 4 см

Найти: $V_{\text{цилиндра}}$, $S_{\text{бок. цилиндра}}$

# Решение:

$V_{цилиндра} = \pi \cdot R^2 \cdot H;$

$S_{бок.\ цилиндра} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

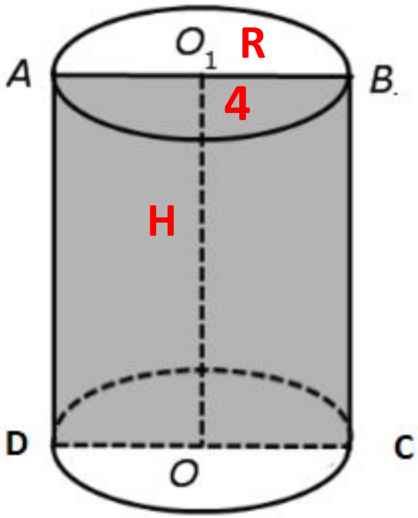
$H = 2 \cdot C$, где $C = 2 \cdot \pi \cdot R$

$C = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ см

$H = 2 \cdot 8\pi = 16\pi$ см

$V_{цилиндра} = \pi \cdot 4^2 \cdot 16\pi = 256\ \pi^2$ см$^3$

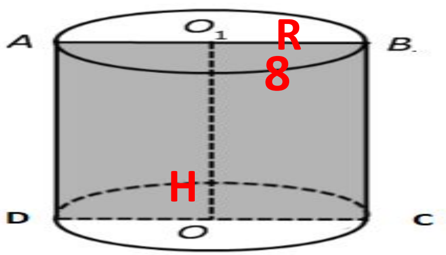
$S_{бок.\ цилиндра} = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 16\pi = 128\ \pi^2$ см$^2$




Ответ: $V_{цилиндра} = 256\ \pi^2$ см$^3$

$S_{бок.\ цилиндра} = 128\ \pi^2$ см$^2$

# № 6 Радиус основания цилиндра равен 8 см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра




Дано: цилиндр

R = 8 см, $S_{\text{бок. цил}} = 1/2 \cdot S_{\text{осн. цил}}$

Найти: $S_{\text{полн. цилиндра}}$

## Решение:

$$S_{\text{бок. цил}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$$

$$S_{\text{осн. цил.}} = \pi \cdot R^2$$

$$S_{\text{полн. цил.}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$$

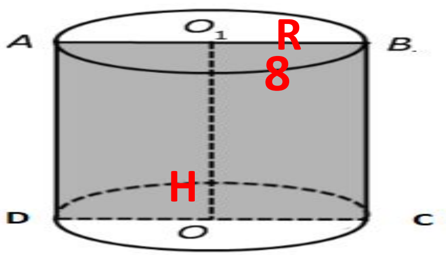
Решение:

$R = 8$ см, $S_{\text{бок. цил}} = 1/2 \cdot S_{\text{осн. цил}}$

$S_{\text{бок. цил}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H$

$S_{\text{осн. цил.}} = \pi \cdot R^2$

$S_{\text{полн. цил.}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot H + 2 \cdot \pi \cdot R^2$




$2 \cdot \pi \cdot R \cdot H = 1/2 \cdot \pi \cdot R^2$

$2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot H = 1/2 \cdot \pi \cdot 8^2 \mid : 8\pi$

$2 \cdot H = 1/2 \cdot 8$

$2 \cdot H = 4$

$H = 4:2 = 2$ см

$S_{\text{полн. цил.}} = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 2 + 2 \cdot \pi \cdot 8^2 = 32\pi + 128\pi = 160\pi$ см$^2$

Ответ: $S_{\text{полн. цил.}} = 160\pi$ см$^2$

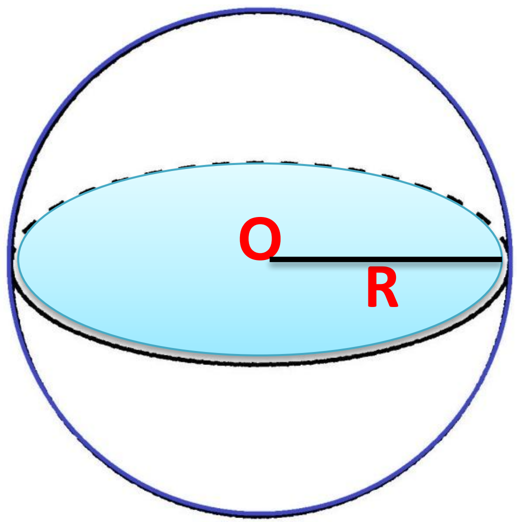
# Вариант В=20

**№ 5 Радиус основания цилиндра равен В0 см, а высота в 2 раза меньше длины окружности основания. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра**

**№ 6 Радиус основания цилиндра равен В см, площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра**

# Площадь и объем шара. Площадь сечения шара. Решение задач.

# № 1 Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна 4π см$^2$ . Найдите объем шара и площадь его поверхности.




- Дано: шар, сечение (круг) проходит через центр

$S_{сеч} = 4\pi$ см$^2$

Найти: $V_{шара}$

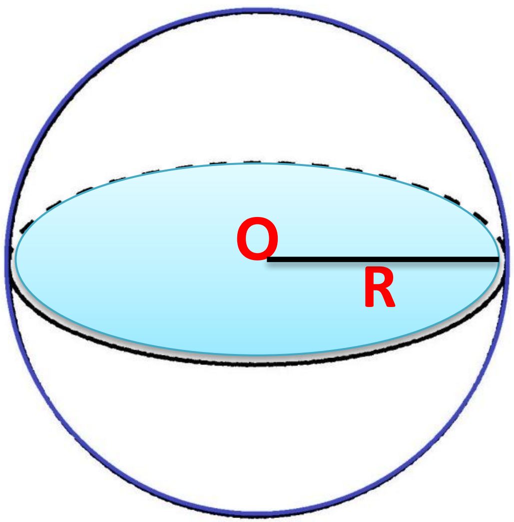
$S_{шара\ (сферы)}$

Решение:

$$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$S_{шара} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$S_{сечения\ (круга)} = \pi \cdot R^2$$




- Решение:

$$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

$$S_{шара} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$S_{сечения\ (круга)} = \pi \cdot R^2$$

$$\pi \cdot R^2 = 4\pi \quad | : \pi$$

$$R^2 = 4$$

$$R = \sqrt{4} = 2 \text{ см}$$

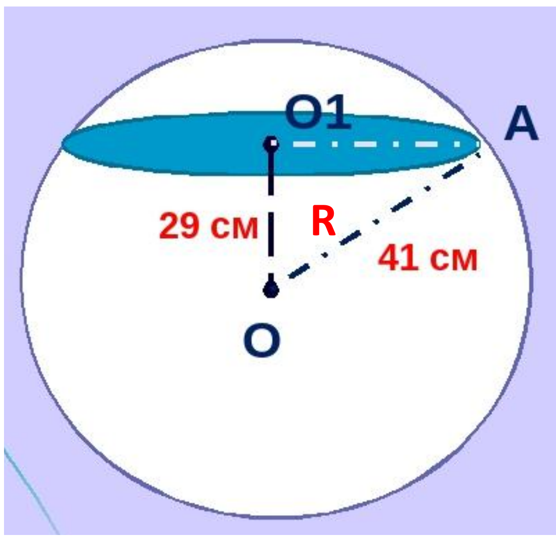
$$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi \text{ см}^3$$

$$S_{шара} = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ см}^2$$

Ответ: $V_{шара} = \frac{32}{3}\pi \text{ см}^3$

$S_{шара} = 16\pi \text{ см}^2$

# № 2 Найдите объем шара и площадь сечения шара радиуса 41 см плоскостью, проведенной на расстоянии 29 см от центра.




**Дано:** шар, сечение (круг) проходит на расстоянии $OO_1$ от центра

$OO_1$ = 29 см, R = OA =41см

**Найти:** $V_{шара}$

$S_{сеч.}$

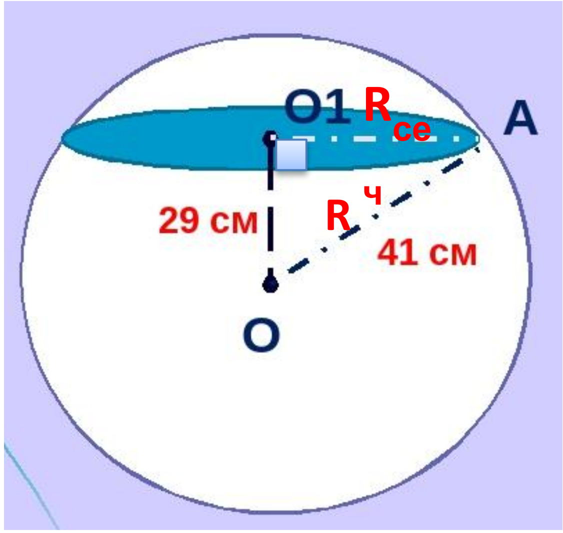
# Решение:

$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$S_{сечения\ (круга)} = \pi \cdot R^2_{сеч}$

$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 41^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 68921 =$

$= \frac{275\ 684}{3} \cdot \pi \quad см^3$




Радиус сечения $R_{сеч} = O_1A$

Рассмотрим $\Delta OO_1A$ – прямоугольный

$O_1A^2 = OA^2 - O_1O^2$

$O_1A^2 = 41^2 - 29^2 = 1681 - 841 = 840$

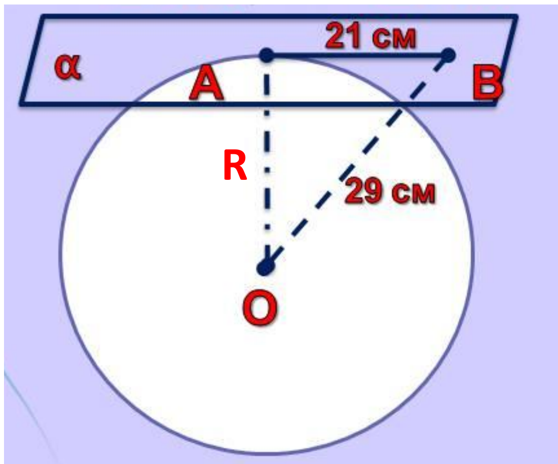
$O_1A = \sqrt{840}$ см $= R_{сеч}$

$S_{сечения\ (круга)} = \pi \cdot (\sqrt{840})^2 = 840\ \pi$ см$^2$

Ответ: $V_{шара} = \frac{275\ 684}{3} \cdot \pi$ см$^3$

$S_{сечения} = 840\ \pi$ см$^2$

# № 3 Шар с центром в точке О касается плоскости в точке А. Точка В лежит в плоскости касания. Найдите объем шара, если АВ=21 см, ВО = 29 см.



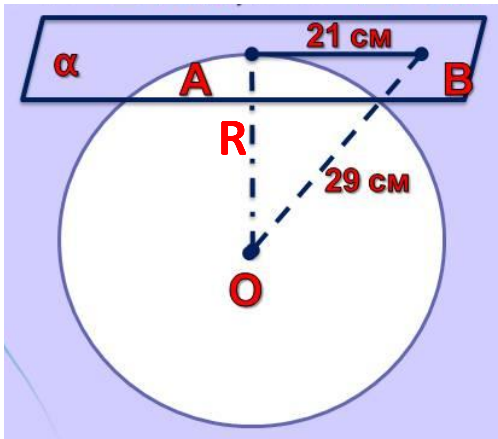

**Дано:** шар,

плоскость касания проходит на расстоянии ОА от центра,

точка В лежит в плоскости касания

АВ = 21 см, R = ОА, ВО=29 см

**Найти:** $V_{шара}$




**Решение:**

$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

$R = OA$

Рассмотрим $\Delta OAB$ – прямоугольный

$OA^2 = OB^2 - AB^2$

$OA^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400$

$OA = \sqrt{400} = 20$ см $= R_{шара}$

$V_{шара} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 8000 =$

$= \frac{32000}{3} \cdot \pi$ см$^3$

Ответ: $V_{шара} = \frac{32000}{3} \cdot \pi$ см$^3$

# Самостоятельная работа
# Вариант В= 5, № =3

**№ 1** Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна **В**π см$^2$ . Найдите объем шара и площадь его поверхности.

**№ 2** Найдите объем шара и площадь сечения шара радиуса **В0** см плоскостью, проведенной на расстоянии **№** см от центра.

**№ 3** Шар с центром в точке О касается плоскости в точке А. Точка В лежит в плоскости касания. Найдите объем шара, если АВ=**№** см, ВО = **В** см.