Арифметичні і логічні основи цифрових і електронних обчислювальних машин

Дисципліна Інформаційні технології

Лекція 1

Арифметичні основи
Системи числення

- Непозиційна система числення (кожен символ зберігає своє значення незалежно від його місця (позиції) в числі)
- Позиційна система числення (кожен символ має своє значення в залежності від місця (позиції) в числі)

2596,23 = 2·1000+5·100+9·10+6·1+2·0,1+3·0,01 =

$$=2\cdot10^{3}+5\cdot10^{2}+9\cdot10^{1}+6\cdot10^{0}+2\cdot10^{-}1+3\cdot10^{-2}$$

$$\sum_{i=-2}^{3} a_i \cdot 10^i$$

Загальна алгебраїчна форма числа в позиційній системі числення

$$A = \pm \sum_{i=-m}^{n} a_i \cdot p^i =$$

$$= a_n \cdot P^n + a_{n-1} \cdot P^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot P^0 + a_{-1} \cdot P^{-1} + \cdots + a_{-m} \cdot P^{-m}$$

a_i **-** кількість одиниць і-того розряду числа, $a_i<P$
P **-** основа системи числення
P_i **-** називають вагою розряду

$(15)_{10}$ $(1011)_2$ $(735)_8$ $(1EA9F)_{16}$

15_{10} 1011_2 735_8 $1EA9F_{16}$

15D 1011B 735Q 1EA9FH

Двійкова система числення

В цій системі P = 2, a_i може приймати значення **0 або 1**

$$a_i = 0 \text{ або } a_i = 1;$$

число в десятковій системі числення $(\quad)_{10}$	число в двійковій системі числення $(\quad)_2$
0	**0**
1	**1**
2	$10 = 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 2+0$
3	$11 = 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 2+1$
4	$100 = 1\cdot 2^2$
5	$101 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^0 = 4+1$
6	$110 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 = 4+2$
7	$111 = 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 4+2+1$
8	$1000 = 1\cdot 2^3$
9	$1001 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^0 = 8+1$
10	$1010 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 = 8+2$
11	$1011 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+2+1$
.	.
.	.
.	.
15	$1111 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8+4+2+1$
16	$10000 = 1\cdot 2^4$
і т.д.	

Вісімкова система числення

В цій системі основа **P = 8**, а a_i може приймати значення: $a_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

$$(367)_8 = (\underline{011}\ \underline{110}\ \underline{111})_2$$

тріади

число в десятковій системі числення $(\ )_{10}$	число в вісімковій системі числення $(\ )_8$
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	$10=1\cdot 8^1$
9	$11=1\cdot 8^1+1\cdot 8^0$
10	$12=1\cdot 8^1+2\cdot 8^0$
11	$13=1\cdot 8^1+3\cdot 8^0$
12	$14=1\cdot 8^1+4\cdot 8^0$
13	15
14	16

Шістнадцяткова система числення

В цій системі числення основа **P = 16,** а $\boldsymbol{a_i}$ може приймати значення:

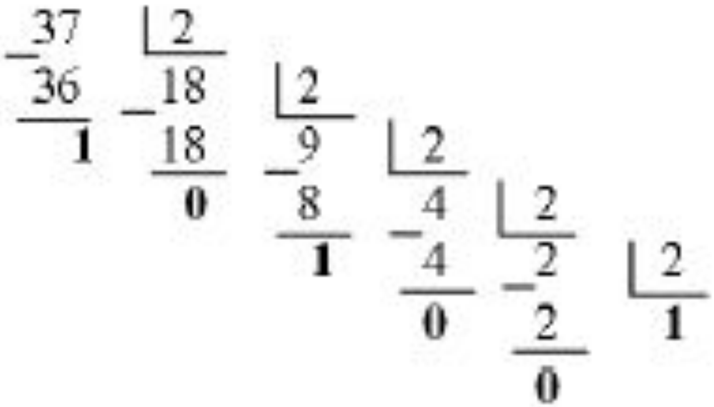
$\boldsymbol{a_i}$ **= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F;**

$$(4AC)_{16} = (\underline{0100}\ \underline{1010}\ \underline{1100})_2$$

тетради

число в десятковій системі числення $(\ \ )_{10}$	число в шістнадцятковій системі числення $(\ \ )_{16}$
0	**0**
1	**1**
2	**2**
3	**3**
4	**4**
5	**5**
6	**6**
7	**7**
8	**8**
9	**9**
10	**A**
11	**B**
12	**C**
13	**D**
14	**E**
15	**F**
16	**10**
17	**11**
18	**12**

Переведення числа з двійкової системи числення і навпаки



$$(37)_{10} = (100101)_2$$

$$\begin{array}{rr}
 & 0.1875 \\
 & \underline{\text{x} \quad\quad 2} \\
0 \leftarrow & 0.3750 \\
 & \underline{\text{x} \quad\quad 2} \\
0 \leftarrow & 0.7500 \\
 & \underline{\text{x} \quad\quad 2} \\
1 \leftarrow & 1.5000 \\
 & \underline{\text{x} \quad\quad 2} \\
1 \leftarrow & 1.0000
\end{array}$$

$$0.1875D = 0.0011B$$

Приклади переведення

$$
\begin{array}{r|l}
164 & 8 \\
\underline{160} & \\
4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
20 & 8 \\
\underline{16} & 2 \\
4 &
\end{array}
$$

$$(164)_{10} = (244)_8.$$

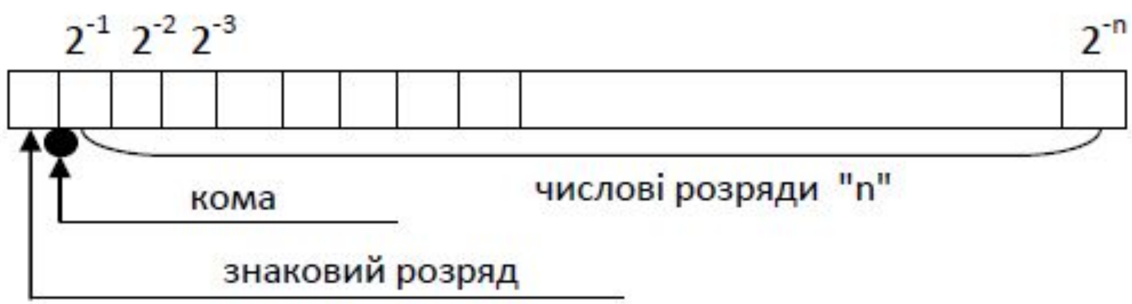
$$
\begin{array}{cccccc}
(3 & 0 & 5\,. & 4)_8 & = & (11000101.1)_2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
011 & 000 & 101. & 100 & & \\
\uparrow & & & \uparrow\uparrow & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
(7 & D & 2. & E)_{16} & = & (11111010010.111)_2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0111 & 1101 & 0010. & 1110 & & \\
\uparrow & & & \uparrow & &
\end{array}
$$

Форми представлення чисел
Представлення чисел з фіксованою комою (крапкою)

Кількість двійкових розрядів якими оперує машина визначає довжину її розрядної сітки. Довжина розрядної сітки може бути 20 біт, 32 біти, 64 біти і т.д.

Розрядна сітка вміщає розряд для зображення знаку (знаковий розряд) та числові розряди. В розрядній сітці розміщується машинне зображення числа.



Мінімальне число, яке можна записати в n-розрядній сітці: ,0000….01 тобто:

$$|X|_{min} = 2^{-n}$$

Максимальне число складається з усіх одиниць в числових розрядах 1111……11 тобто:

$$|X|_{max} = 1 - 2^{-n}$$

Діапазон чисел, що можуть розміститися в n-розрядній сітці обмежується цими двома значенями.

$$2^{-n} \le |X| \le 1 - 2^{-n}$$

Представлення чисел з плаваючою комою (крапкою)

В машинах з плаваючою комою числа зображаються у вигляді:

$$X = P^q \cdot M \qquad |M| < 1$$

де : X— машинне зображення числа

P — основа системи числення

q — порядок машинного числа

M — мантиса

Для десяткових чисел:

Десяткове число	Десяткове число, що представлене з плаваючою комою
2576,34	$0{,}257634 \cdot 10^{4}$
25,7634	$0{,}257634 \cdot 10^{2}$
0,000257634	$0{,}257634 \cdot 10^{-3}$

порядок машинного числа

основа системи

мантиса

Для двійкових чисел:

Двійкове число	Двійкове число, що представлене з плаваючою комою	
10111,0110	$0{,}101110110 \cdot 2^{5}$	$0{,}101110110 \cdot 10^{101}$
10,1110110	$0{,}101110110 \cdot 2^{2}$	$0{,}101110110 \cdot 10^{010}$
0,101110110	$0{,}101110110 \cdot 2^{0}$	$0{,}101110110 \cdot 10^{000}$
0,000101110110	$0{,}101110110 \cdot 2^{-3}$	$0{,}101110110 \cdot 10^{1011}$

знак порядку

Нормалізовані числа

Число називається нормалізованим, якщо в старшому, першому після коми розряді його мантиси стоїть цифра відмінна від нуля.

В двійковій системі числення в цьому розряді повинна стояти "1".

Найменше число, яке може стояти в цьому розряді, в вісімковій системі числення:

$$,\underline{001}\ 101\ldots.$$

це один вісімковий розряд

Найменше число, яке може стояти в цьому розряді, в шістнадцятковій системі числення:

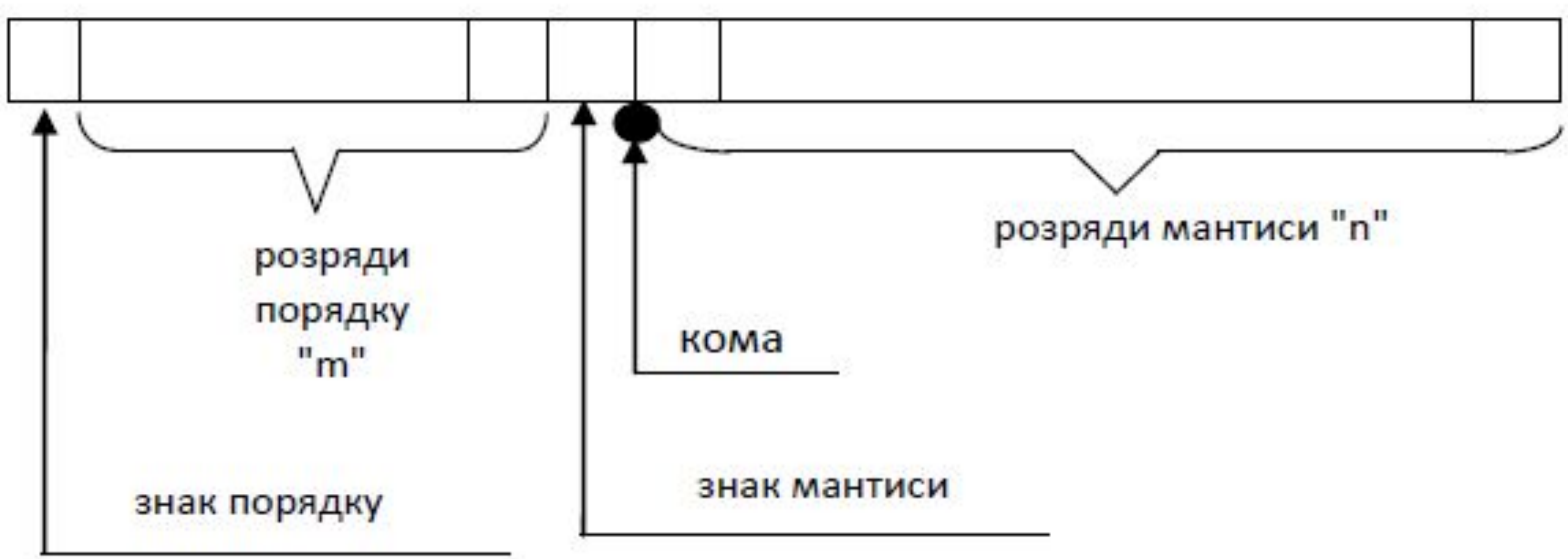
$$,\underline{0001}\ 1001\ldots..$$

це один шістнадцятковий розряд

Вага старшого розряду мантиси в двійковій системі числення рівна $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Це означає, що мантиса двійкового нормалізованого числа лежить в межах:

$$\frac{1}{2} \le |M| < 1$$

Розрядна сітка машини з плаваючою комою



При великій кількості розрядів порядку "m" діапазон чисел рівний:

$$2^{-2^{m}} \leq |X| \leq 2^{-2^{m}-1}$$

Кодування чисел

- **Прямий код**
- Прямий код додатних і від'ємних чисел відрізняється від зображення самих чисел тільки значенням знакового розряду. Для додатних чисел в цьому розряді записують "0", а для від'ємних "1".
- X = + 0,11001101 X = - 0,11001101
- $[X]_{пр.}$ = 0,11001101 $[X]_{пр.}$ = 1,11001101
- **Обернений код**
- Обернений код додатного числа співпадає по зображенню з самим числом. Щоб утворити обернений код від'ємного числа необхідно – в знаковому розряді записати "1", а числові розряди проінвертувати, тобто нулі замінити одиницями, а одиниці – нулями.
- X = + 0,11001101 X = - 0,11001101
- $[X]_{об.}$ = 0,11001101 $[X]_{об.}$ = 1,00110010

Доповняльний код

- Цей код найчастіше використовується в обчислювальній техніці.
- Доповняльний код додатного числа співпадає по зображенню з самим числом.
- Щоб утворити доповняльний код від'ємного числа необхідно - в знаковому розряді записати "1", числові розряди про інвертувати і до молодшого розряду додати 1.
- X = + 0,11001101 X = - 0,11001101
- $[X]_{\text{доп.}}$ = 0,11001101 $[X]_{\text{доп}}$ = 1,00110011
- Цей код називається доповняльним тому, що сума розрядів від'ємного числа і числових розрядів $[\ ]_{\text{доп.}}$ дорівнюють 1.
- ,11001101
- +,00110011
- 1,00000000

Операції додавання та віднімання двійкових чисел з фіксованою комою

1) $X1 = +0{,}10011010; \quad X2 = +0{,}00010110$

$$
\begin{array}{rl}
 & [X]_{доп.} = \ 0{,}10011010 \\
+ & [X]_{доп.} = \ 0{,}00010110 \\
\hline
 & [X1+X2]_{доп.} = \ 0{,}10110000 \\
 & X1+X2 = \ 0{,}10110000
\end{array}
$$

2) $X1 = +\,0{,}10011010; \quad X2 = -\,0{,}00010110$

$$
\begin{array}{rl}
 & [X1]_{доп.} = \ 0{,}10011010 \\
+ & [X2]_{доп.} = \ 0{,}11101010 \\
\hline
 & [X1+X2]_{доп.} = \ \cancel{1}0{,}10000100 \\
 & X1+X2 = +\,0{,}10000100
\end{array}
$$

3) $X1 = -\,0{,}10011010; \quad X2 = +\,0{,}00010110$

$$
\begin{array}{rl}
 & [X1]_{доп.} = \ 1{,}01100110 \\
+ & [X2]_{доп.} = \ 0{,}00010110 \\
\hline
 & [X1+X2]_{доп.} = \ 1{,}0111110 \\
 & X1+X2 = -\,0{,}10000100
\end{array}
$$

4) $X1 = -\,0{,}10011010; \quad X2 = -\,0{,}00010110$

$$
\begin{array}{rl}
 & [X1]_{доп.} = \ 1{,}01100110 \\
+ & [X2]_{доп.} = \ 1{,}11101010 \\
\hline
 & [X1+X2]_{доп.} = \ \cancel{1}1{,}01010000 \\
 & X1+X2 = -\,0{,}10110000
\end{array}
$$

Операції додавання та віднімання двійкових чисел з плаваючою комою

- Дано: X1 = $10^{100}\cdot(+0,10011010)$; X2 = $10^{100}\cdot(+0,10111011)$
- Порядки рівні тому виконують додавання мантис.

  $[MX1]_{доп.} = 0,10011010$

  $[MX2]_{доп.} = 0,10111011$

  $[MX1+MX2]_{доп.} = 1,01010101$
- Одиниця в знаковому розряді виникла тому, що сума мантис стала більшою 1.
- Нормалізуємо мантису вправо, зсуваючи її на один розряд вправо:

  $[MX1+MX2]_{доп.} = 0,10101010 \,|\, 1$

  пам'ятаючи, що порядок результату необхідно збільшити на 1.
- Заокруглюють результат, якщо при зсуві вправо за межі розрядної сітки вийшла 1. Її додають до сусіднього старшого розряду

  $[MX1+MX2]_{доп.} = 0,10101011$
- Тому, що сума мантис додатна, можна записати:

  MX1+MX2. = + 0,10101011
- Результат рівний

  $X + Y = 10^{101}\cdot(+0,10101011)$

Логічні основи

- Булева алгебра. Алгебра логіки оперує висловами.
- Висловом називається будь-яке твердження, по відношенню до якого можна сказати істинне воно, чи хибне. Вважають, якщо вислів істинний – він рівний "1", якщо хибний – він рівний "0".
- Вислови можуть бути простими і складними. Прості – це такі вислови, які вміщають одну закінчену думку. Складні вислови складаються з двох або більше простих висловів.
- Як прості так і складні вислови можуть приймати тільки два значення "0" або "1", тобто можуть бути істинними чи хибними. Прості вислови називають вхідними перемінними, а складні – логічними функціями вхідних перемінних.

Таблиця істинності

Найбільш наочною формою представлення логічних функцій є таблиця істинності, яка відображає значення логічної функції в залежності від значень вхідних перемінних.

Найбільш загально логічну функцію можна записати:

$$Y = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Нехай наприклад, нам необхідно щоб f=1 при непарній кількості X, що рівні 1. Тоді таблиця істинності матиме вид:

Кількість вхідних перемінних три, тобто x1, x2, x3;

$$Y = f(X_1, X_2, X_3)$$

Якщо вхідних перемінних n, то

кількість рядків таблиці істинності рівна 2^n

X1	X2	X3	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

При великому значенні n (вхідних перемінних) таблиця істинності стає громіздкою, тому використовується на першому етапі синтезу логічних схем.

Логічні функції ще називають перемикальними.

Логічні зв’язки і логічні елементи

- Більш компактною формою запису логічних функцій є алгебраїчний вираз, до складу якого входять вхідні перемінні X, що зв'язані між собою логічними зв'язками (логічними операціями). Електронними схемами, що реалізують логічні операції називають логічними елементами. Основних логічних операцій є три:

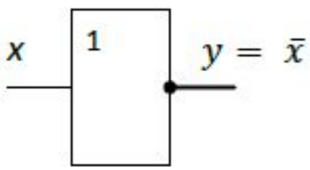
  І, НЕ, АБО

- Вони складають так-звану функціонально повну систему, тобто з їх допомогою можна описати будь-яку логічну функцію.

Логічна операція "НЕ" (інверсія, заперечення)

Логічна операція "НЕ" (інверсія, заперечення)

В результаті цієї операції утворюється функція Y, значення якої рівне "1", якщо вхідна перемінна X=0, і Y=0, якщо X=1.

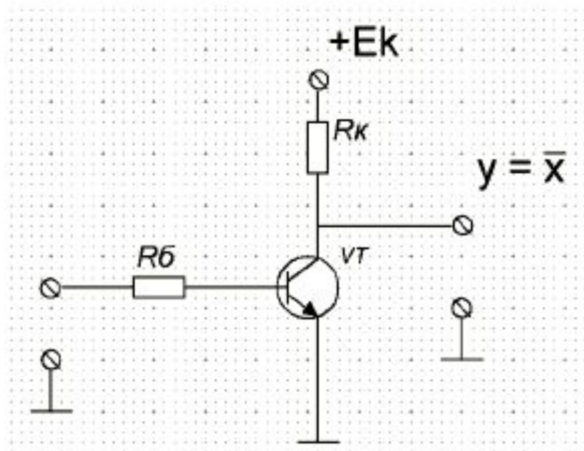


Запис: $Y = \bar{X}$

Читається: Y є не X

Таблиця істинності

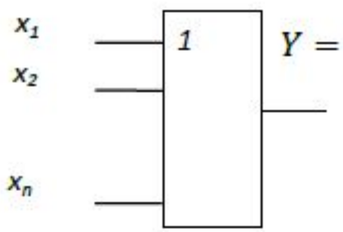
X	Y
0	1
1	0



Логічний елемент, що реалізує операцію заперечення, називається інвертором.

Логічна операція "АБО" (диз'юнкція,

В результаті цієї операції утворюється функція Y, значення якої рівне "1", якщо хоча б одна з її вхідних перемінних рівна "1".



$$Y = X1 + X2 + X3 + \cdots Xn$$

Запис

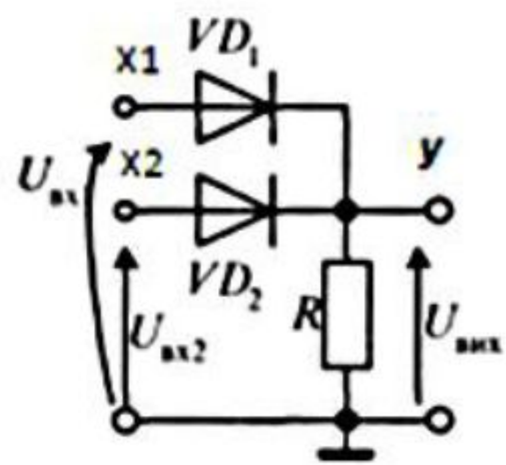
$$Y = X1 + X2 + X3 + \cdots Xn$$
$$Y = X1\ V\ X2\ V\ X3\ V\ \ldots\ V\ Xn$$
$$Y = X1\ U\ X2\ U\ X3\ U\ \ldots\ U\ Xn$$

Читається
Y є X1 або X2 або…

Таблиця істинності

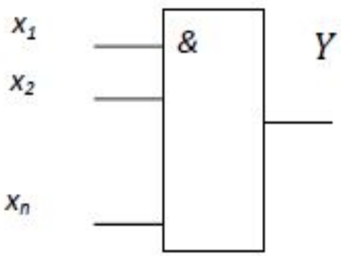
X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логічний елемент, що реалізує логічну операцію "АБО" називається диз'юнктором, збірною (роздільчою) схемою.



Логічна операція "І" (кон'юкція, логічне множення)

В результаті цієї операції утворюється функція Y, значення якої рівне "1", якщо всі її вхідні перемінні X одночасно рівні "1".



$Y = X1 \cdot X2 \cdot X3 \cdot \ldots Xn$

Запис

$Y = X1 \cdot X2 \cdot X3 \cdot \ldots Xn$

$Y = X1 \wedge X2 \wedge X3 \wedge \ \ldots \ \wedge Xn$

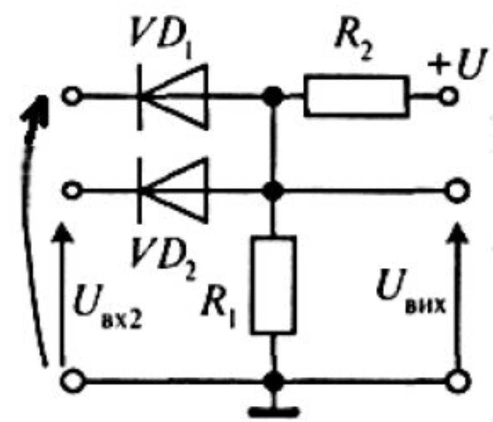
$Y = X1 \cap X2 \cap X3 \cap \ \ldots \ \cap Xn$

Читається

Y є X1 і X2 і …

Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



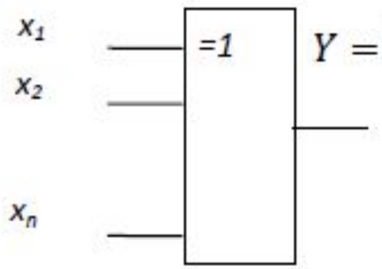
Логічний елемент, що реалізує логічну операцію "І" називається схемою співпадіння, а у випадку двох вхідних перемінних вентилем. Логчний елемент "І" часто називають конюктором.

Логічна операція нерівнозначності

(виняткове "АБО", сумування по модулю 2 "М2")

В результаті цієї операції утворюється функція *У*, значення якої рівне "1", при різних значеннях вхідних перемінних.

УГП



$$Y = \overline{X1} \cdot X2 + X1 \cdot \overline{X2} \ldots Xn$$

Запис

$$У = \overline{X1} \cdot X2 + X1 \cdot \overline{X2}$$

Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

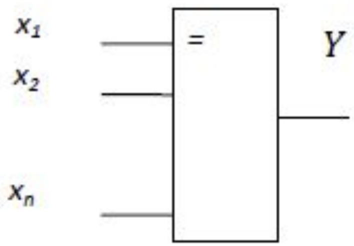
Приклади застосування: 1. Визначення знаку добутку

2. Підрахунок одиниць в двійковому коді

Логічна операція рівнозначності (еквівалентність)

В результаті цієї операції утворюється функція Y, значення якої рівне "1", якщо вхідні перемінні мають однакове значення.

УГП



$$Y = \overline{X1} \cdot \overline{X2} + X1 \cdot X2 \ldots$$

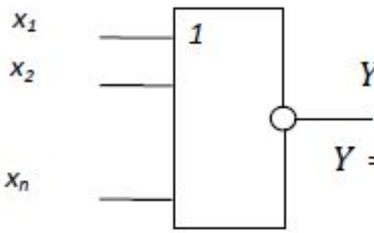
Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логічна операція "АБО-НЕ" (стрілка Пірса)

В результаті цієї операції утворюється функція Y, значення якої рівне "1", якщо всі її вхідні перемінні X одночасно рівні "0".

УГП



$$Y = X1 \downarrow X2 \downarrow X3 \downarrow \cdots Xn$$

$$Y = \overline{X1 + X2 + X3 + \cdots + Xn}$$

Запис

$Y = X1 \downarrow X2 \downarrow \ldots \downarrow Xn$

$Y = \overline{X1 + X2 + X3 + \ldots + Xn}$

Читається

Y = не X1 або не X2

Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

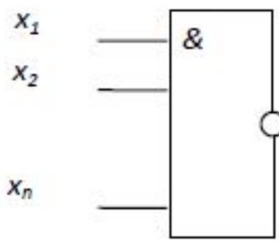
Логічний елемент називають АБО-НЕ.

Схемна реалізація елемента АБО - НЕ

Логічна операція "І-НЕ" (штрих Шеффера)

В результаті цієї операції утворюється функція Y, значення якої рівне "1", якщо хоча б одна з її вхідних перемінних рівна "0".

УГП



$$Y = X1|X2|X3|\ldots|Xn$$

$$Y = \overline{X1 \cdot X2 \cdot X3 \cdot \ldots \cdot Xn}$$

Запис

$$Y = X1|X2|\ldots|Xn$$

$$Y = \overline{X1 \cdot\ X2 \cdot\ X3 \cdot\ \ldots \cdot\ Xn}$$

Читається

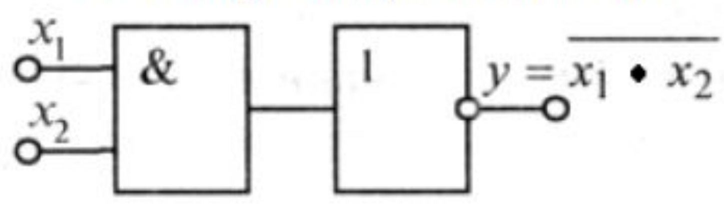
Y є не X1 і X2 і… і …

Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логічний елемент називають І-НЕ

Схемна реалізація елемента І-НЕ



Аксіоми алгебри логіки

1. Комутативність.

$$X1 + X2 = X2 + X1$$
$$X1 \cdot X2 = X2 \cdot X1$$

2. Асоціативність

$$(X1 + X2) + X3 = X1 + (X2 + X3)$$
$$(X1 \cdot X2) \cdot X3 = X1 \cdot (X2 \cdot X3)$$

3. Дистрибутивність

$$X1+(X2 \cdot X3)=(X1+X2) \cdot (X1+X3)$$
$$X1 \cdot (X2+X3)=X1 \cdot X2+X1 \cdot X3$$

4.Поглинання

$$\left.\begin{aligned}(X1 + X2) \cdot X2 &= X \\ (X1 \cdot X2) + X2 &= X2\end{aligned}\right\}\ \text{поглинання 1}$$

$$X1+\overline{X1}=1$$

$$\left.\begin{aligned}(X1 + \overline{X1}) \cdot X2 &= X2 \\ (X1 \cdot \overline{X1}) + X2 &= X2\end{aligned}\right\}\ \text{поглинання 2}$$

$$X1 \cdot \overline{X1}=0$$

Аксіоми алгебри логіки

5. Ідемпотентність

$$X1 + X1 = X1$$
$$X1 \cdot X1 = X1$$

6. Для довільних X1   X2 з множини X

$$X1 + \overline{X1} = X2 + \overline{X2}$$
$$X1 \cdot X1 = X2 \cdot \overline{X2}$$

7.

$$X1 + 0 = X1 \qquad X1 + 1 = 1$$
$$X1 \cdot 0 = 0 \qquad X1 \cdot 1 = X1$$

8.Правило де Моргана (закон заперечення)

$$\overline{X1 + X2} = \overline{X1} \cdot \overline{X2}$$
$$\overline{X1 \cdot X2} = \overline{X1} + \overline{X2}$$

9. $\overline{\overline{X}} = X$