

Арифметичні і логічні основи цифрових і електронних обчислювальних машин

Дисципліна Інформаційні
технології

Лекція 1



Арифметичні основи Системи числення



- **Непозиційна система числення** (кожен символ зберігає своє значення незалежно від його місця (позиції) в числі)
- **Позиційна система числення** (кожен символ має своє значення в залежності від місця (позиції) в числі)

$$2596,23 = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,01 = \\ = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\sum_{i=-2}^3 a_i \cdot 10^i$$

Загальна алгебраїчна форма числа в позиційній системі числення

$$A = \pm \sum_{i=-m}^n a_i \cdot p^i =$$
$$= a_n \cdot P^n + a_{n-1} \cdot P^{n-1} + \dots + a_0 \cdot P^0 + a_{-1} \cdot P^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot P^{-m}$$

a_i - кількість одиниць i -того розряду числа, $a_i < P$

P - основа системи числення

P_i - називають вагою розряду

$(15)_{10}$	$(1011)_2$	$(735)_8$	$(1EA9F)_{16}$
-------------	------------	-----------	----------------

15_{10}	1011_2	735_8	$1EA9F_{16}$
-----------	----------	---------	--------------

15D	1011B	735Q	1EA9FH
-----	-------	------	--------

Двійкова система числення

В цій системі $P = 2$, a_i може приймати значення 0 або 1
 $a_i = 0$ або $a_i = 1$;

число в десятковій
системі числення

$(\quad)_{10}$

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

.

.

.

15

16

і т.д.

число в двійковій
системі числення

$(\quad)_2$

0

1

$$10 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2 + 0$$

$$11 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1$$

$$100 = 1 \cdot 2^2$$

$$101 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1$$

$$110 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 = 4 + 2$$

$$111 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 1$$

$$1000 = 1 \cdot 2^3$$

$$1001 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 1$$

$$1010 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 = 8 + 2$$

$$1011 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1$$

.

.

.

$$1111 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \\ = 8 + 4 + 2 + 1$$

$$10000 = 1 \cdot 2^4$$

Вісімкова система числення

В цій системі основа $P = 8$, а a_i може приймати значення: $a_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$;

число в десятковій
системі числення

()₁₀

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

$$(367)_8 = (\underline{011} \ \underline{110} \ \underline{111})_2$$

| | |
тріади

число в вісімковій
системі числення

()₈

0

1

2

3

4

5

6

7

$$10 = 1 \cdot 8^1$$

$$11 = 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0$$

$$12 = 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0$$

$$13 = 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$$

$$14 = 1 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$

15

16

Шістнадцяткова система числення

В цій системі числення основа $P = 16$, а a_i може приймати значення:
 $a_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$;

число в десятковій
системі числення

()₁₀

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

число в шістнадцятковій
системі числення

()₁₆

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

A

B

C

D

E

F

10

11

12

$$(4AC)_{16} = (\underline{0100} \ \underline{1010} \ \underline{1100})_2$$

тетради

Переведення числа з двійкової системи числення і навпаки

$$\begin{array}{r}
 \underline{37} \\
 \underline{36} \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \underline{2} \\
 \underline{18} \\
 \hline
 18 \\
 \underline{0}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \underline{2} \\
 \underline{9} \\
 \hline
 8 \\
 \underline{1}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \underline{2} \\
 \underline{4} \\
 \hline
 4 \\
 \underline{0}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \underline{2} \\
 \underline{2} \\
 \hline
 2 \\
 \underline{0}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \underline{2} \\
 \underline{1} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$(37)_{10} = (100101)_2$$

$$\begin{array}{r}
 0.1875 \\
 \times \quad 2 \\
 \hline
 0 \leftarrow 0.3750 \\
 \times \quad 2 \\
 \hline
 0 \leftarrow 0.7500 \\
 \times \quad 2 \\
 \hline
 1 \leftarrow 1.5000 \\
 \times \quad 2 \\
 \hline
 1 \leftarrow 1.0000
 \end{array}$$

$$0.1875_D = 0.0011_B$$

Приклади переведення

$$\begin{array}{r} \underline{164} \quad \underline{8} \\ \underline{160} \quad \underline{20} \quad \underline{8} \\ \underline{4} \quad \underline{16} \quad \underline{2} \\ \quad \quad \underline{4} \end{array} \quad (164)_{10} = (244)_8.$$

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{(3 \quad 0 \quad 5. \quad 4)_8} & = & \overbrace{(11000101.1)_2} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 011 & 000 & 101. & 100 \\ \uparrow & & & \uparrow\uparrow \end{array}$$

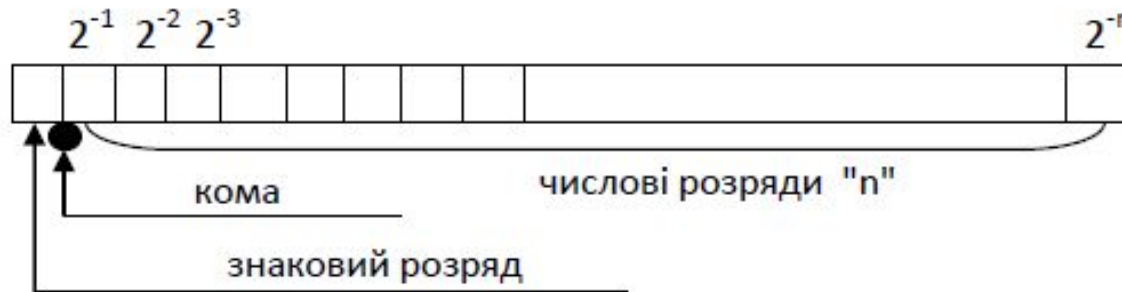
$$\begin{array}{cccc} \overbrace{(7 \quad D \quad 2. \quad E)_{16}} & = & \overbrace{(11111010010.111)_2} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 0111 & 1101 & 0010. & 1110 \\ \uparrow & & & \uparrow \end{array}$$

Форми представлення чисел

Представлення чисел з фіксованою комою (крапкою)

Кількість двійкових розрядів якими оперує машина визначає довжину її розрядної сітки. Довжина розрядної сітки може бути 20 біт, 32 біти, 64 біти і т.д.

Розрядна сітка вміщає розряд для зображення знаку (знаковий розряд) та числові розряди. В розрядній сітці розміщується машинне зображення числа.



Мінімальне число, яке можна записати в n -розрядній сітці: ,0000....01 тобто:

$$|X|_{\min} = 2^{-n}$$

Максимальне число складається з усіх одиниць в числових розрядах 1111.....11 тобто:

$$|X|_{\max} = 1 - 2^{-n}$$

Діапазон чисел, що можуть розміститися в n -розрядній сітці обмежується цими двома значеннями.

$$2^{-n} \leq |X| \leq 1 - 2^{-n}$$

Представлення чисел з плаваючою комою (крапкою)

В машинах з плаваючою комою числа зображаються у вигляді:

$$X = P^q \cdot M \quad |M| < 1$$

де : X — машинне зображення числа
P — основа системи числення
q — порядок машинного числа
M — мантиса

Для десяткових чисел:

Десяткове число

2576,34
25,7634
0,000257634

Десяткове число, що представлене
з плаваючою комою

$0,257634 \cdot 10^4$
 $0,257634 \cdot 10^2$
 $0,257634 \cdot 10^{-3}$

↑ мантиса ↑ основа системи

↘ порядок машинного числа

Для двійкових чисел:

Двійкове число

10111,0110
10,1110110
0,101110110
0,000101110110

Двійкове число, що представлене
з плаваючою комою

$0,101110110 \cdot 2^5$ $0,101110110 \cdot 10^{101}$
 $0,101110110 \cdot 2^2$ $0,101110110 \cdot 10^{010}$
 $0,101110110 \cdot 2^0$ $0,101110110 \cdot 10^{000}$
 $0,101110110 \cdot 2^{-3}$ $0,101110110 \cdot 10^{1011}$

↑ знак порядку

Нормалізовані числа

Число називається нормалізованим, якщо в старшому, першому після коми розряді його мантиси стоїть цифра відмінна від нуля.

В двійковій системі числення в цьому розряді повинна стояти "1".

Найменше число, яке може стояти в цьому розряді, в вісімковій системі числення:

,001 101....
↑
це один вісімковий розряд

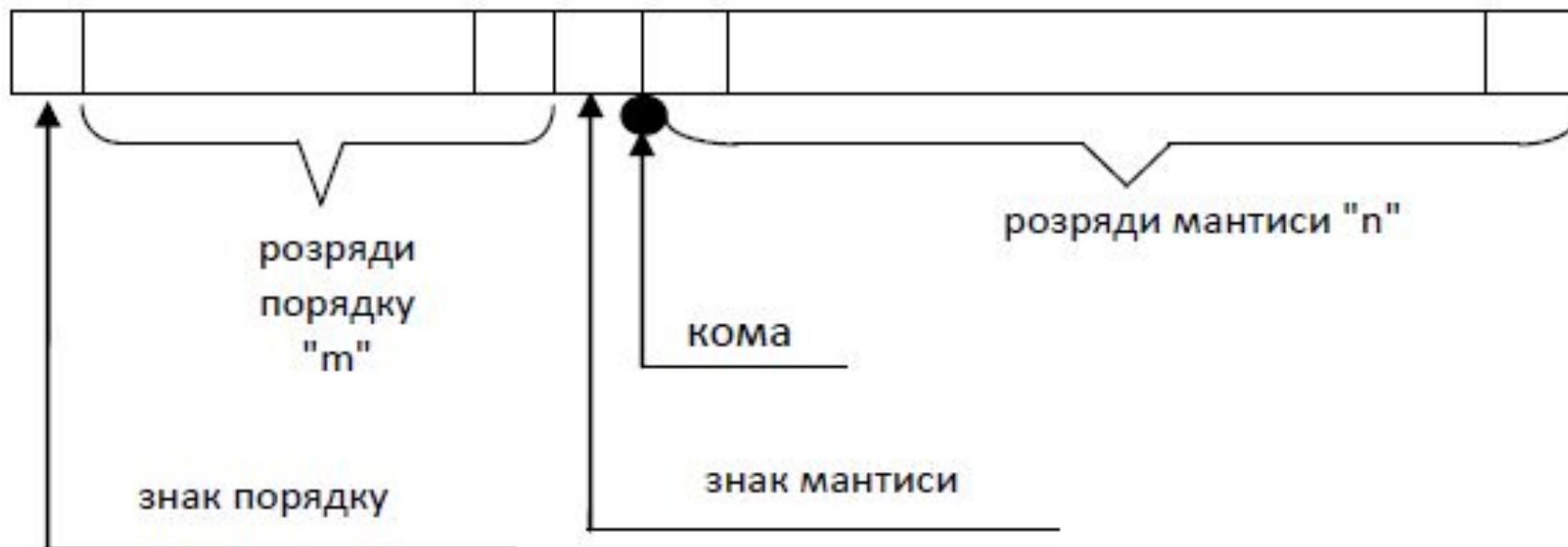
Найменше число, яке може стояти в цьому розряді, в шістнадцятковій системі числення:

,0001 1001.....
↑
це один шістнадцятковий розряд

Вага старшого розряду мантиси в двійковій системі числення рівна $2^{-1} = \frac{1}{2}$. Це означає, що мантиса двійкового нормалізованого числа лежить в межах:

$$\frac{1}{2} \leq |M| < 1$$

Розрядна сітка машини з плаваючою комою



При великій кількості розрядів порядку "m" діапазон чисел рівний:

$$2^{-2^m} \leq |X| \leq 2^{-2^m - 1}$$

Кодування чисел

- **Прямий код**
- Прямий код додатних і від'ємних чисел відрізняється від зображення самих чисел тільки значенням знакового розряду. Для додатних чисел в цьому розряді записують "0", а для від'ємних "1".
- $X = + 0,11001101$ $X = - 0,11001101$
- $[X]_{\text{пр.}} = 0,11001101$ $[X]_{\text{пр.}} = 1,11001101$
- **Обернений код**
- Обернений код додатного числа співпадає по зображенню з самим числом. Щоб утворити обернений код від'ємного числа необхідно – в знаковому розряді записати "1", а числові розряди проінвертувати, тобто нулі замінити одиницями, а одиниці – нулями.
- $X = + 0,11001101$ $X = - 0,11001101$
- $[X]_{\text{об.}} = 0,11001101$ $[X]_{\text{об.}} = 1,00110010$

Доповняльний код

- Цей код найчастіше використовується в обчислювальній техніці.
- Доповняльний код додатного числа співпадає по зображенню з самим числом.
- Щоб утворити доповняльний код від'ємного числа необхідно - в знаковому розряді записати "1", числові розряди проінвертувати і до молодшого розряду додати 1.
- $X = + 0,11001101$ $X = - 0,11001101$
- $[X]_{\text{доп.}} = 0,11001101$ $[X]_{\text{доп.}} = 1,00110011$
- Цей код називається доповняльним тому, що сума розрядів від'ємного числа і числових розрядів $[]_{\text{доп.}}$ дорівнюють 1.
- $\begin{array}{r} ,11001101 \\ +,00110011 \\ \hline 1,00000000 \end{array}$

Операції додавання та віднімання двійкових чисел з фіксованою комою

1) $X1 = +0,10011010$; $X2 = +0,00010110$

$$\begin{array}{r} [X]_{\text{доп.}} = 0,10011010 \\ + [X]_{\text{доп.}} = 0,00010110 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} [X1+X2]_{\text{доп.}} = 0,10110000 \\ X1+X2 = 0,10110000 \end{array}$$

2) $X1 = +0,10011010$; $X2 = -0,00010110$

$$\begin{array}{r} +[X1]_{\text{доп.}} = 0,10011010 \\ +[X2]_{\text{доп.}} = 0,11101010 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} [X1+X2]_{\text{доп.}} = \cancel{1}0,10000100 \\ X1+X2 = +0,10000100 \end{array}$$

3) $X1 = -0,10011010$; $X2 = +0,00010110$

$$\begin{array}{r} +[X1]_{\text{доп.}} = 1,01100110 \\ +[X2]_{\text{доп.}} = 0,00010110 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} [X1+X2]_{\text{доп.}} = 1,0111110 \\ X1+X2 = -0,10000100 \end{array}$$

4) $X1 = -0,10011010$; $X2 = -0,00010110$

$$\begin{array}{r} +[X1]_{\text{доп.}} = 1,01100110 \\ +[X2]_{\text{доп.}} = 1,11101010 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} [X1+X2]_{\text{доп.}} = \cancel{1}0,1010000 \\ X1+X2 = -0,1010000 \end{array}$$

Операції додавання та віднімання двійкових чисел з плаваючою комою

- Дано: $X1 = 10^{100} \cdot (+0,10011010)$; $X2 = 10^{100} \cdot (+0,10111011)$
- Порядки рівні тому виконують додавання мантис.
 $[MX1]_{\text{доп.}} = 0,10011010$
 $[MX2]_{\text{доп.}} = 0,10111011$
 $[MX1+MX2]_{\text{доп.}} = \overline{1,01010101}$
- Одиниця в знаковому розряді виникла тому, що сума мантис стала більшою 1.
- Нормалізуємо мантису вправо, зсуваючи її на один розряд вправо:
 $[MX1+MX2]_{\text{доп.}} = 0,10101010 \mid 1$
пам'ятаючи, що порядок результату необхідно збільшити на 1.
- Заокруглюють результат, якщо при зсуві вправо за межі розрядної сітки вийшла 1. Її додають до сусіднього старшого розряду
 $[MX1+MX2]_{\text{доп.}} = 0,10101011$
- Тому, що сума мантис додатна, можна записати:
 $MX1+MX2 = + 0,10101011$
- Результат рівний
 $X + Y = 10^{101} \cdot (+0,10101011)$

Логічні основи

- Булева алгебра. Алгебра логіки оперує висловами.
- Висловом називається будь-яке твердження, по відношенню до якого можна сказати істинне воно, чи хибне. Вважають, якщо вислів істинний – він рівний "1", якщо хибний – він рівний "0".
- Вислови можуть бути простими і складними. Прості – це такі вислови, які вміщують одну закінчену думку. Складні вислови складаються з двох або більше простих висловів.
- Як прості так і складні вислови можуть приймати тільки два значення "0" або "1", тобто можуть бути істинними чи хибними. Прості вислови називають вхідними перемінними, а складні – логічними функціями вхідних перемінних.

Таблиця істинності

Найбільш наочною формою представлення логічних функцій є таблиця істинності, яка відображає значення логічної функції в залежності від значень вхідних перемінних.

Найбільш загально логічну функцію можна записати:

$$Y = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Нехай наприклад, нам необхідно щоб $f=1$ при непарній кількості X , що рівні 1. Тоді таблиця істинності матиме вид:

Кількість вхідних перемінних три, тобто x_1, x_2, x_3 ;

X1	X2	X3	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$Y = f(X_1, X_2, X_3)$$

Якщо вхідних перемінних n , то

кількість рядків таблиці істинності рівна 2^n

При великому значенні n (вхідних перемінних) таблиця істинності стає громіздкою, тому використовується на першому етапі синтезу логічних схем.

Логічні функції ще називають перемикальними.

Логічні зв'язки і логічні елементи

- Більш компактною формою запису логічних функцій є алгебраїчний вираз, до складу якого входять вхідні перемінні X , що зв'язані між собою логічними зв'язками (логічними операціями). Електронними схемами, що реалізують логічні операції називають логічними елементами. Основних логічних операцій є три:

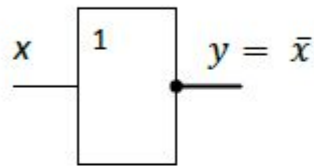
I, НЕ, АБО

- Вони складають так-звану функціонально повну систему, тобто з їх допомогою можна описати будь-яку логічну функцію.

Логічна операція "НЕ" (інверсія, заперечення)

Логічна операція "НЕ" (інверсія, заперечення)

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", якщо вхідна перемінна $X=0$, і $Y=0$, якщо $X=1$.



Запис

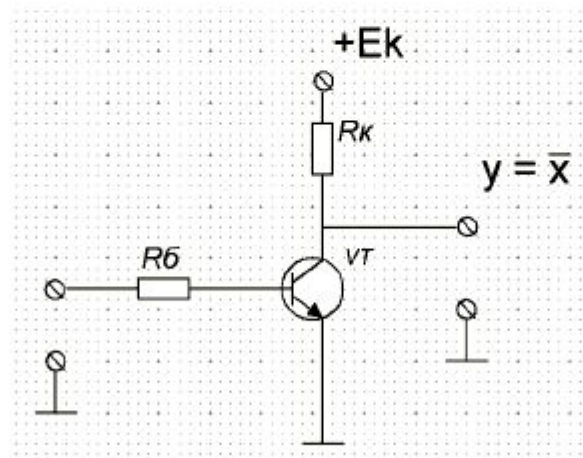
$$Y = \bar{X}$$

Читається

Y є не X

Таблиця істинності

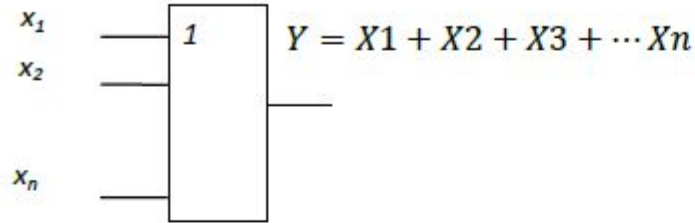
X	Y
0	1
1	0



Логічний елемент, що реалізує операцію заперечення, називається інвертором.

Логічна операція "АБО" (диз'юнкція,

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", якщо хоча б одна з її вхідних перемінних рівна "1".



Запис

$$Y = X1 + X2 + X3 + \dots Xn$$

$$Y = X1 \vee X2 \vee X3 \vee \dots \vee Xn$$

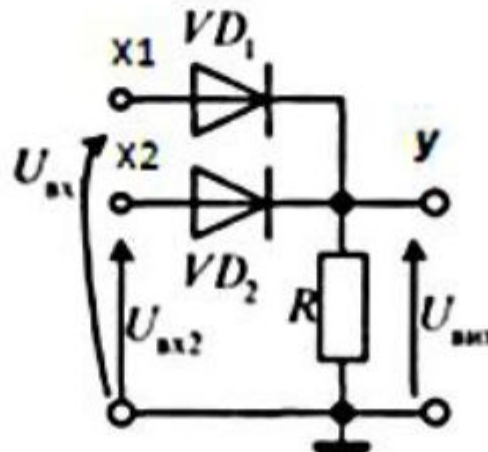
$$Y = X1 \cup X2 \cup X3 \cup \dots \cup Xn$$

Читається
 $Y \in X1$ або $X2$ або...

Таблиця істинності

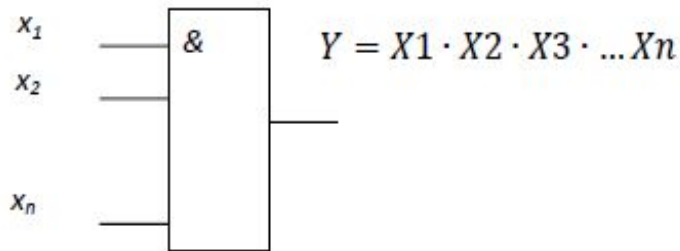
X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логічний елемент, що реалізує логічну операцію "АБО" називається диз'юнктором, збіркою (роздільчою) схемою.



Логічна операція "І" (кон'юнкція, логічне множення)

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", якщо всі її вхідні перемінні X одночасно рівні "1".



$$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n$$

Запис

$$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n$$

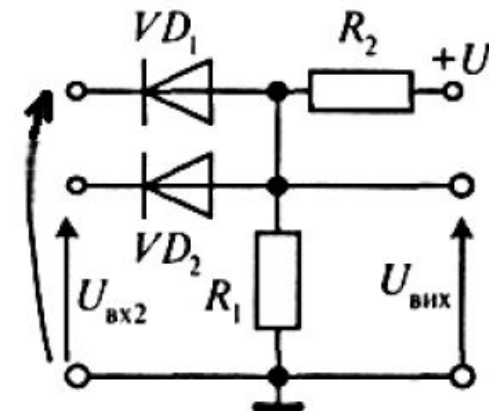
$$Y = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \dots \wedge X_n$$

$$Y = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \dots \cap X_n$$

Читається
 $Y \in X_1 \text{ і } X_2 \text{ і } \dots$

Таблиця істинності

X_1	X_2	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



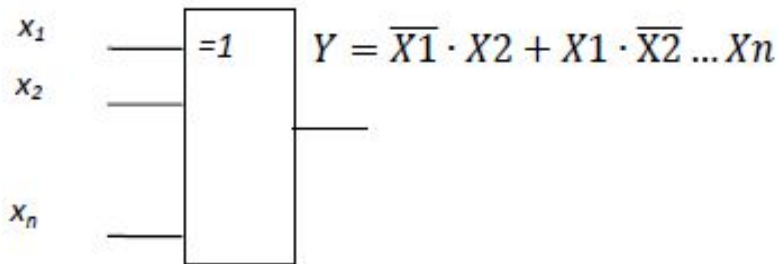
Логічний елемент, що реалізує логічну операцію "І" називається схемою співпадіння, а у випадку двох вхідних перемінних вентиляем. Логічний елемент "І" часто називають кон'юктором.

Логічна операція нерівнозначності

(виняткове "АБО", сумування по модулю 2 "М2")

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", при різних значеннях вхідних перемінних.

УГП



Запис

$$Y = \overline{X_1} \cdot X_2 + X_1 \cdot \overline{X_2}$$

Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

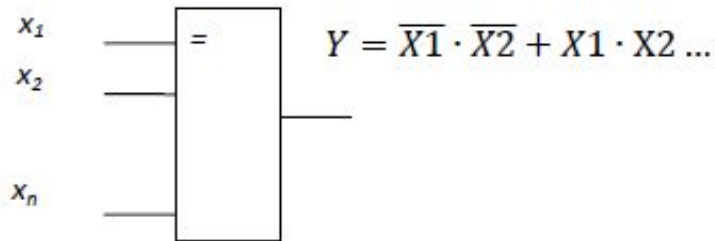
Приклади застосування: 1. Визначення знаку добутку

2. Підрахунок одиниць в двійковому коді

Логічна операція рівнозначності (еквівалентність)

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", якщо вхідні перемінні мають однакове значення.

УГП



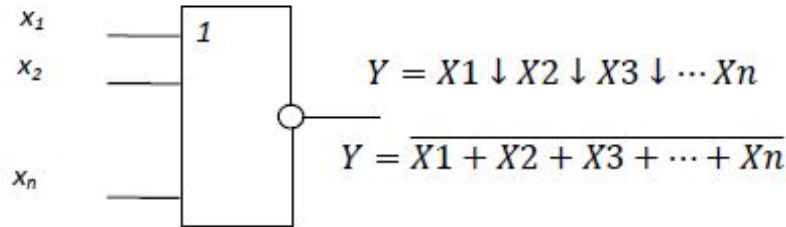
Таблиця істинності

X1	X2	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логічна операція "АБО-НЕ" (стрілка Пірса)

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", якщо всі її вхідні перемінні X одночасно рівні "0".

УГП



Запис

$$Y = X1 \downarrow X2 \downarrow \dots \downarrow Xn$$

$$Y = \overline{X1 + X2 + X3 + \dots + Xn}$$

Таблиця істинності

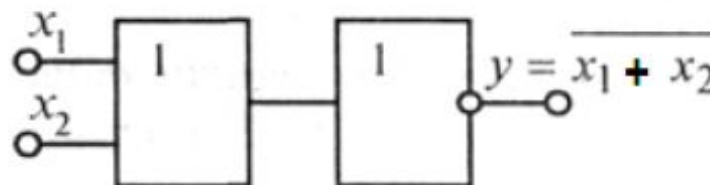
X1	X2	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Читається

$$Y = \text{не } X1 \text{ або не } X2$$

Логічний елемент називають АБО-НЕ.

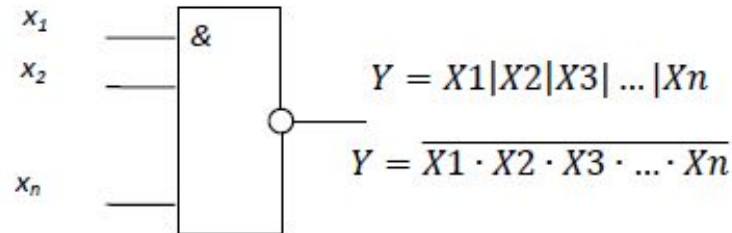
Схемна реалізація елемента АБО - НЕ



Логічна операція "І-НЕ" (штрих Шеффера)

В результаті цієї операції утворюється функція Y , значення якої рівне "1", якщо хоча б одна з її вхідних перемінних рівна "0".

УГП



Запис

$$Y = X1|X2| \dots |Xn$$
$$Y = \overline{X1 \cdot X2 \cdot X3 \cdot \dots \cdot Xn}$$

Таблиця істинності

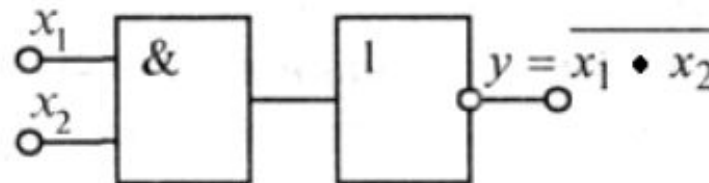
X1	X2	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Читається

Y є не $X1$ і $X2$ і... і ...

Логічний елемент називають І-НЕ

Схемна реалізація елемента І-НЕ



Аксиоми алгебри логіки

1. Комутативність.

$$X1 + X2 = X2 + X1$$

$$X1 \cdot X2 = X2 \cdot X1$$

2. Асоціативність

$$(X1 + X2) + X3 = X1 + (X2 + X3)$$

$$(X1 \cdot X2) \cdot X3 = X1 \cdot (X2 \cdot X3)$$

3. Дистрибутивність

$$X1 + (X2 \cdot X3) = (X1 + X2) \cdot (X1 + X3)$$

$$X1 \cdot (X2 + X3) = X1 \cdot X2 + X1 \cdot X3$$

4. Поглинання

$$(X1 + X2) \cdot X2 = X2 \quad \left. \vphantom{(X1 + X2) \cdot X2 = X2} \right\} \text{поглинання 1}$$

$$(X1 \cdot X2) + X2 = X2$$

$$(X1 + \bar{X1}) \cdot X2 = X2 \quad \left. \vphantom{(X1 + \bar{X1}) \cdot X2 = X2} \right\} \text{поглинання 2}$$

$$(X1 \cdot \bar{X1}) + X2 = X2$$

$$X1 + \bar{X1} = 1$$

$$X1 \cdot \bar{X1} = 0$$

Аксиоми алгебри логіки

5. Ідемпотентність

$$X1 + X1 = X1$$

$$X1 \cdot X1 = X1$$

6. Для довільних $X1$ $X2$ з множини X

$$X1 + \overline{X1} = X2 + \overline{X2}$$

$$X1 \cdot X1 = X2 \cdot \overline{X2}$$

7.

$$X1 + 0 = X1 \quad X1 + 1 = 1$$

$$X1 \cdot 0 = 0 \quad X1 \cdot 1 = X1$$

8. Правило де Моргана (закон заперечення)

$$\overline{X1 + X2} = \overline{X1} \cdot \overline{X2}$$

$$\overline{X1 \cdot X2} = \overline{X1} + \overline{X2}$$

9. $\overline{\overline{X}} = X$