



# Электричество и магнетизм

## Лекция 13

### Электромагнитная индукция

24 ноября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ  
Ольчак Андрей Станиславович



## Основные законы электростатики и магнитостатики

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0$$

$$[\nabla \times \vec{\mathbf{E}}] = 0$$

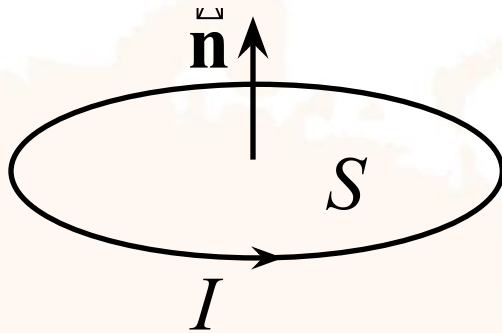
$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

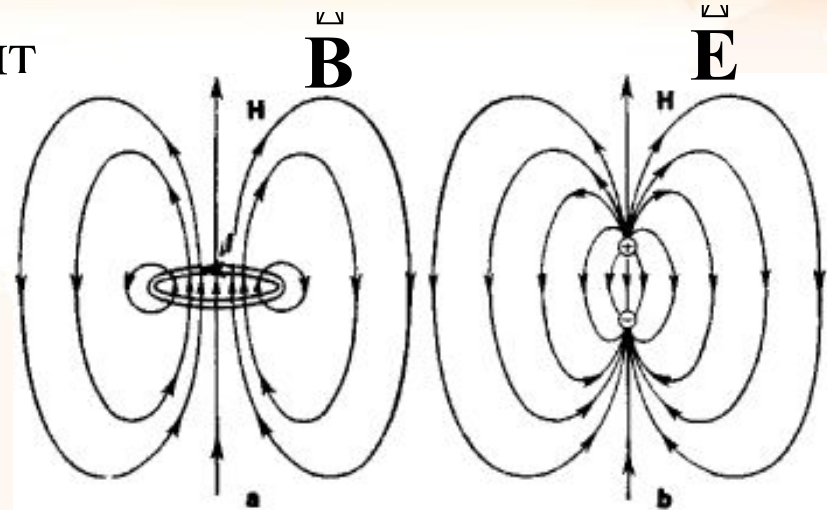
$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$[\nabla \times \vec{\mathbf{B}}] = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

## Магнитный дипольный момент

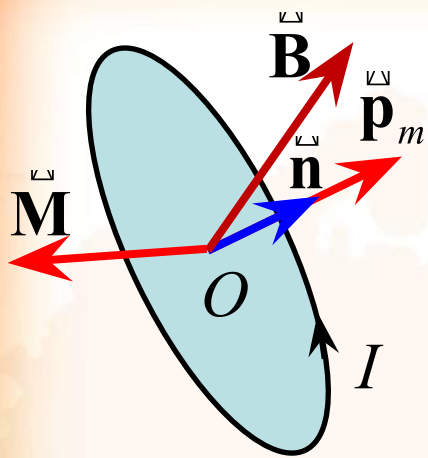


$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$$



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}_m \right\}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{d} \right\}$$



$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{B} = p_{mx} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$$

Момент силы Ампера

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}]$$

$$w = -p_m B \cos \varphi = -(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B})$$

Аналогия с электрическим диполем:  $w = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$

Как правило свободный магнитный диполь втягивается в область более сильного магнитного поля.

Формулы для момента силы и энергии магнитного диполя одинаковы для однородного и неоднородного полей.





# **Опыт Фарадея (электромагнитная индукция)**

**См. «Физика в опытах», часть 3**



## Опыты Фарадея. ЭДС индукции

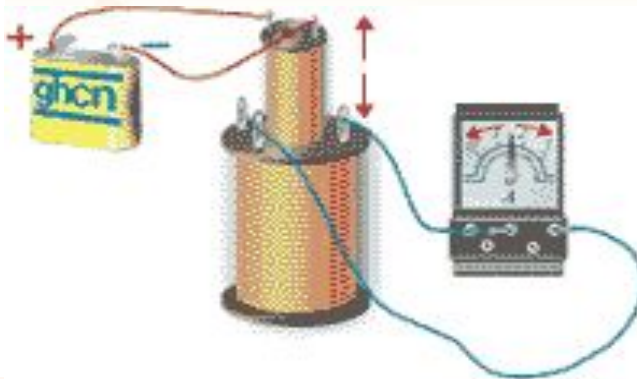
29 августа 1831 г. М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции – возникновение электрического поля и электрических токов в контуре при изменении потока магнитного поля.



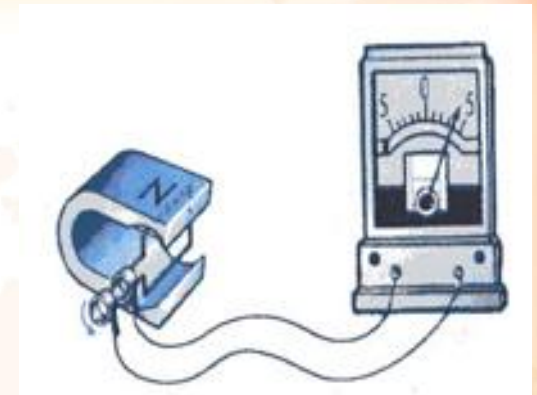
**Майкл Фарадей**  
**1791 - 1867**



движение магнита  
относительно катушки (или  
наоборот)



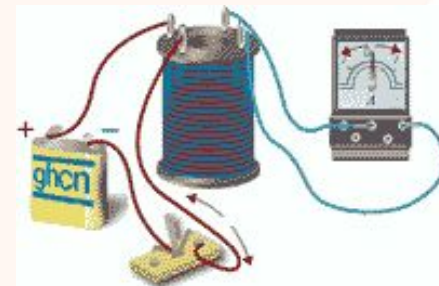
движение катушек  
относительно друг  
друга



вращением контура в  
магнитном поле



вращением магнита внутри контура



изменение силы тока в цепи  
первой катушки





## Результаты опытов Фарадея

В замкнутом контуре, не содержащем ЭДС, появляется индукционный ток, если:

1. Контур или его часть движутся в магнитном поле так, что *меняется магнитный поток через контур*;
2. Контур неподвижен, но меняется магнитное поле в которое он помещен (создающая поле катушка движется или меняется ток катушки) и – как следствие – *меняется магнитный поток через контур* .

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

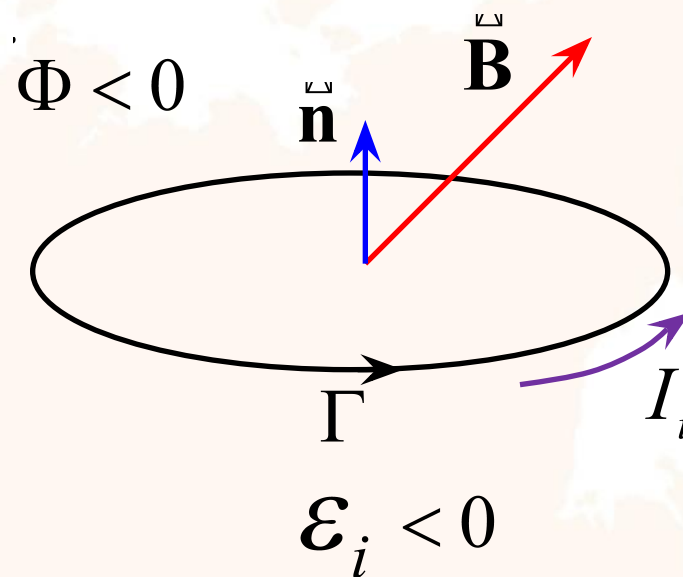
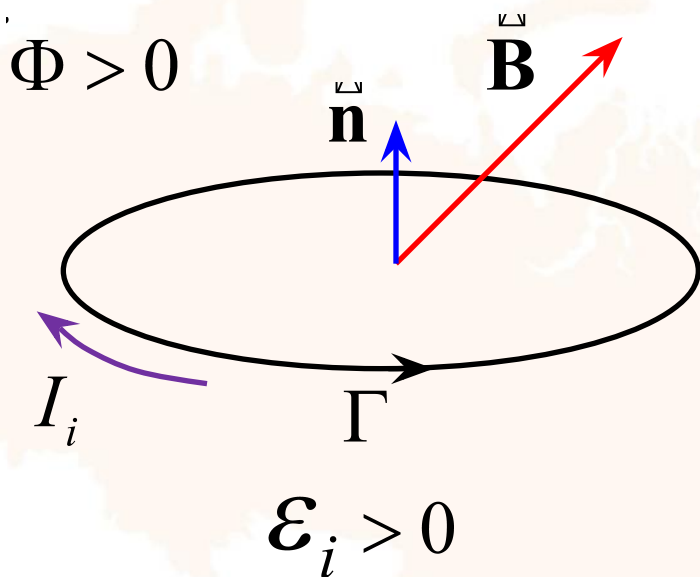
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Математическая  
формулировка Э.Х.  
Ленца:

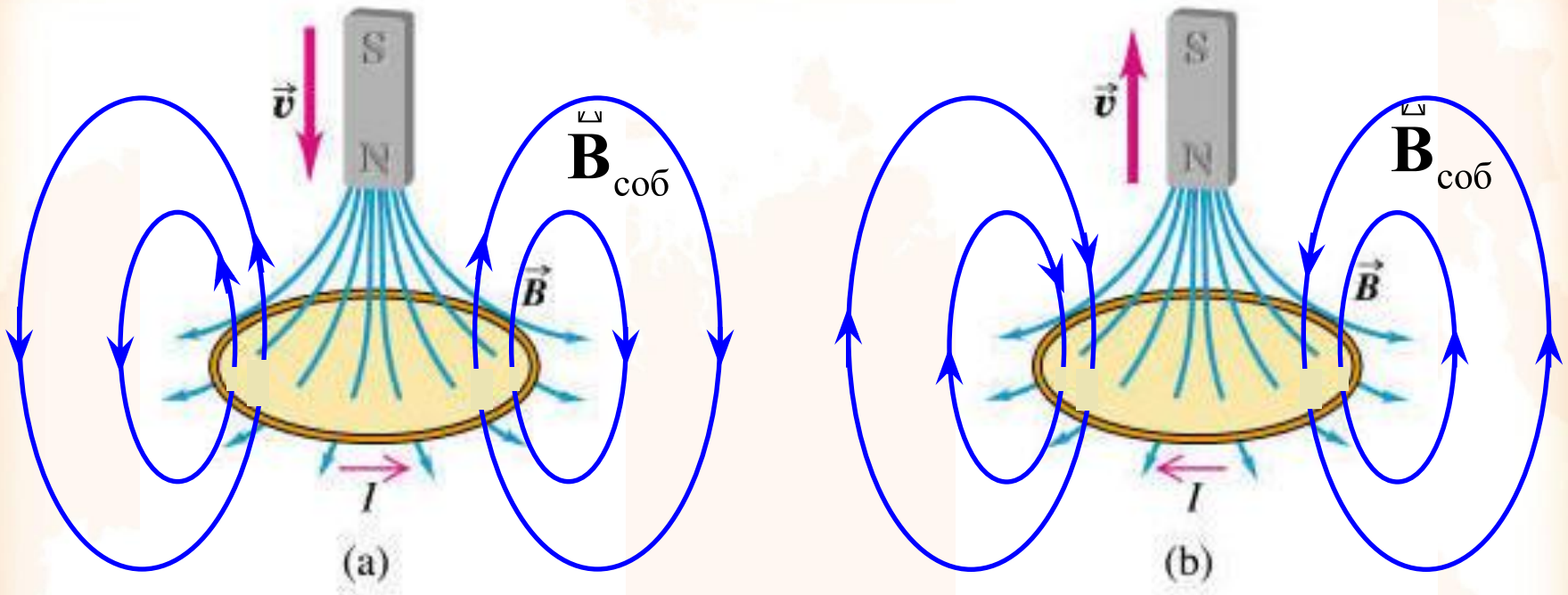




## Направление индукционного тока. Правило Ленца



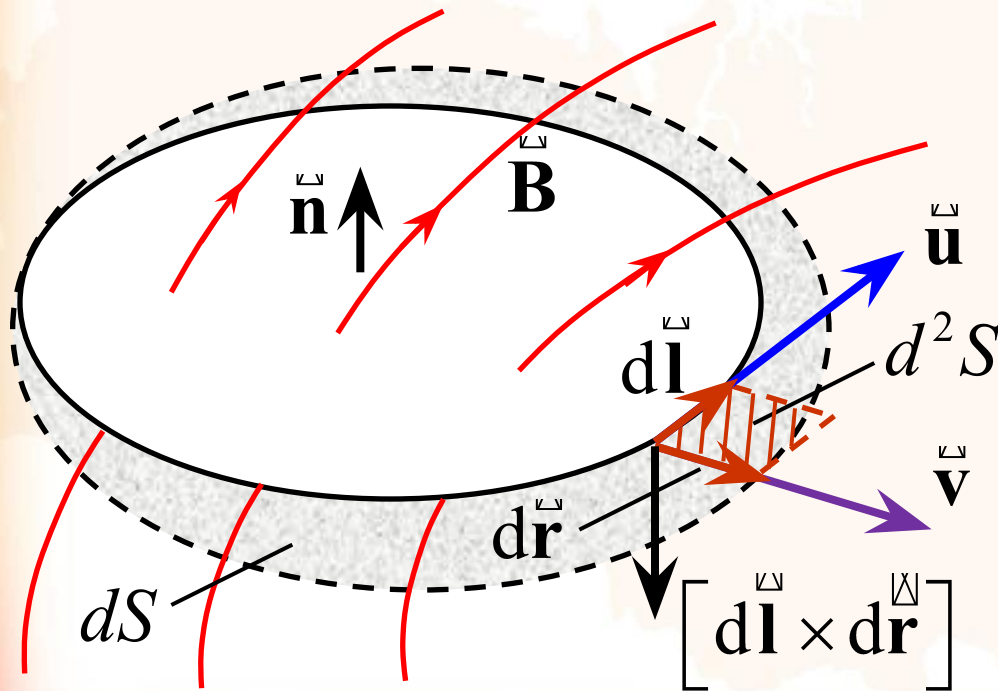
Индукционный ток направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока через контур.



Индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине его вызывающей.

## Физические механизмы электромагнитной индукции

### 1. Двигается контур или его часть



$\vec{u}$  - дрейфовая скорость носителей тока

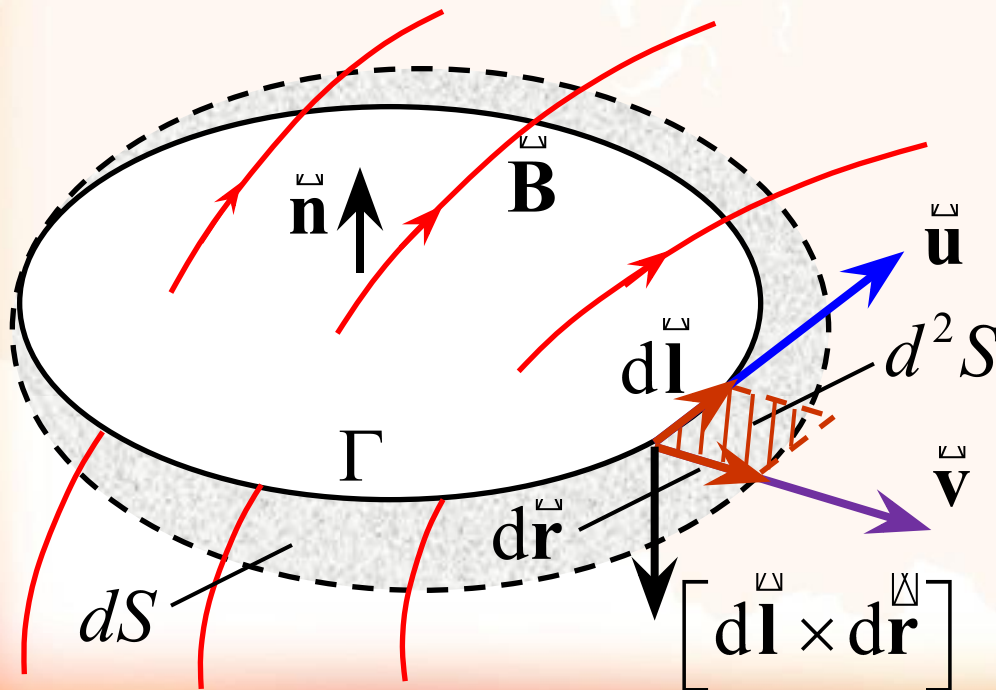
$\vec{v}$  - скорость движения участка проводника  $d\mathbf{l}$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{стоп}} &= q \left[ (\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} \right] = \\ &= q \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] + q \left[ \vec{u} \times \vec{B} \right] \end{aligned}$$



$$\mathcal{E}_i = \frac{A_{\text{стоп}}}{q} = \oint_{\Gamma} [\vec{v} \times \vec{B}] \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right] \cdot d\vec{l}$$

$$[\vec{dr} \times \vec{B}] \cdot d\vec{l} = [d\vec{l} \times d\vec{r}] \cdot \vec{B} = -d^2 S \vec{n} \cdot \vec{B}$$



$$\mathcal{E}_i = - \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \frac{d^2 S \vec{n}}{dt} =$$

$$= - \frac{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{n} d^2 S}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}$$





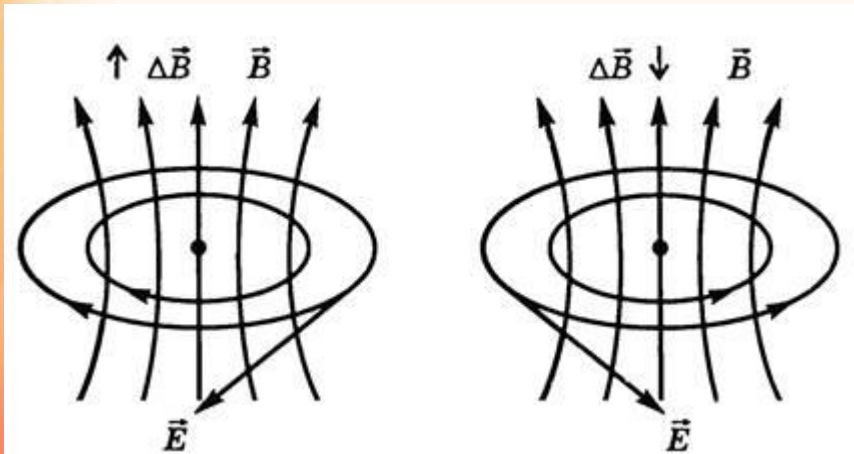
## 2. Контур неподвижен, меняется магнитное поле

$$\vec{F} = q \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \text{ т.к. } \vec{v} = 0$$

$$\vec{B} = \text{const} \Rightarrow \left[ \nabla \times \vec{E} \right] = 0$$

**Гипотеза:** меняющееся магнитное поле  $\mathbf{B}(t)$  генерирует вихревое электрическое поле!

$$\left[ \nabla \times \vec{E} \right] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \left[ \nabla \times \vec{E} \right] \cdot \vec{dS} = \\ &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \\ &= - \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$



$$\boxed{\left[ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \right] = - \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \text{const} \Rightarrow \left[ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \right] = 0$$

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \left[ \nabla \times \vec{\mathbf{E}} \right] \cdot d\vec{\mathbf{S}} =$$

$$= - \int_S \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \equiv - \frac{d\Phi}{dt}$$



Применение для измерения магнитного поля или протекающего по цепи заряда

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

– полный магнитный поток через катушку (потокосцепление)

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt}$$

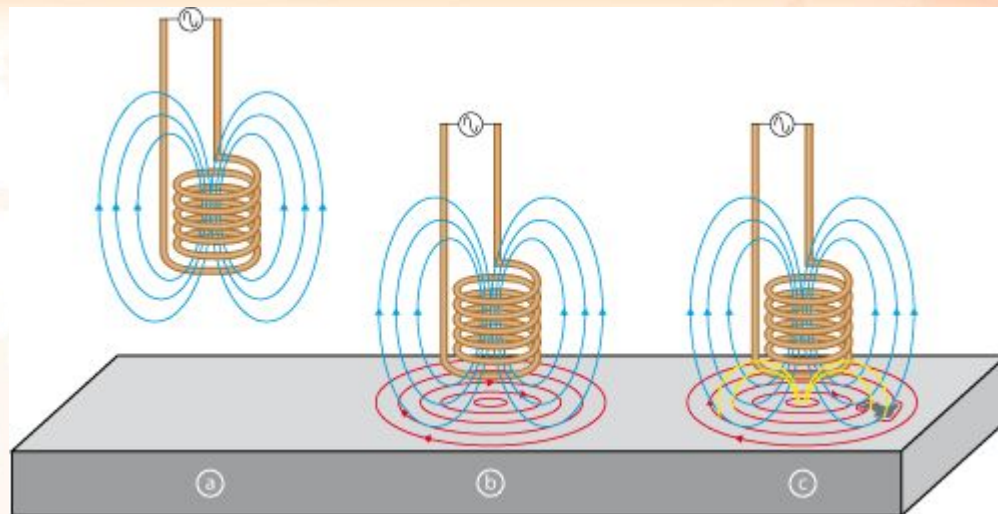
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}$$

$$dq = -\frac{d\Psi}{R}$$

$$q = -\frac{1}{R} \int_{\Psi}^0 d\Psi = \frac{\Psi}{R} = \frac{NBS}{R}$$

$$B = \frac{qR}{NS}$$

## Применение для нагревания Токи Фуко







# Электромагнитная индукция



**Главное применение – генерация электроэнергии**



# ИНДУКТИВНОСТЬ И САМОИНДУКЦИЯ

## Индуктивность контура

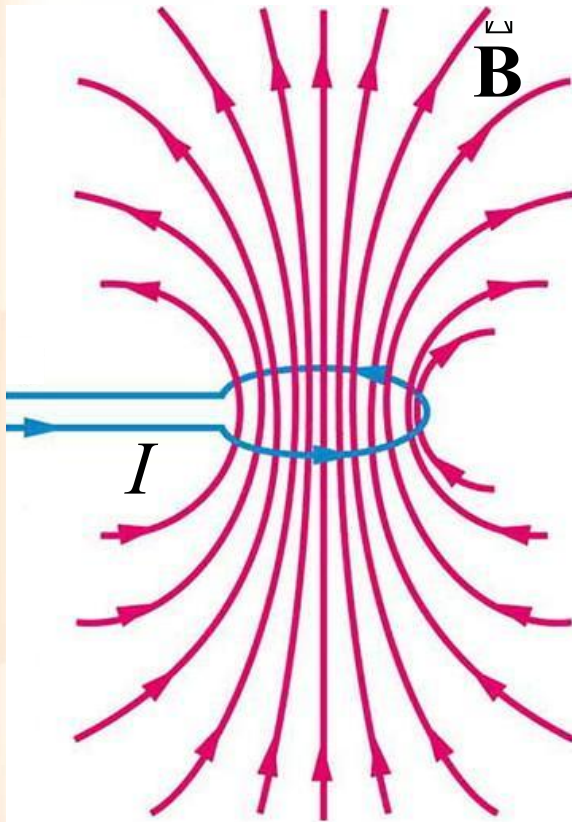
$$\Phi \sim B \sim I \Rightarrow \Phi = LI$$

$L$  [Тл\*м<sup>2</sup>/А = Гн (Генри)] -

*индуктивность контура* = коэффициент пропорциональности между током в контуре и создаваемым им магнитным потоком через сам контур.

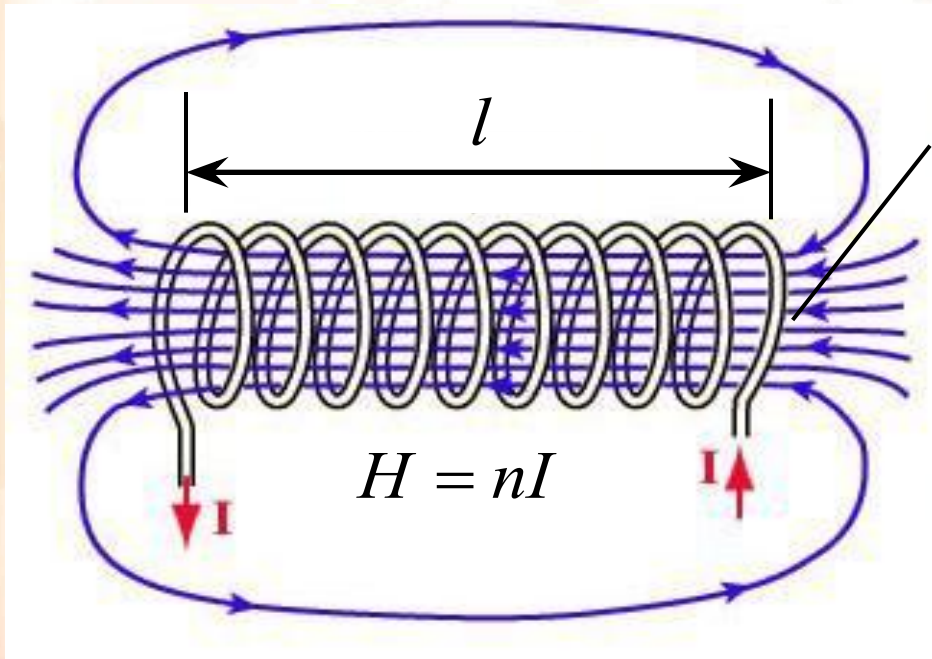
**Note 1.** В отсутствие ферромагнетиков  $L$  зависит только от геометрии и площади контура (ну и немножко от магнитной проницаемости среды)

**Note 2.**  $L > 0$ .



Контур из тонкого проводника

## Индуктивность соленоида



$$B = \mu\mu_0 nI = \text{const}$$

$$\Psi = N\Phi = n l B S$$

$$V = lS \Rightarrow \Psi = nVB$$

$$\Psi = nV \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 n^2 V I$$

$$\Psi = LI \Rightarrow \boxed{L = \mu\mu_0 n^2 V}$$

$$[\mu_0] \quad \text{Гн/м}$$





## ЭДС самоиндукции

Самоиндукция = изменение тока в контуре, вызванное изменением потока собственного магнитного поля через контур.

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_s}{dt}$$

$$\Phi = LI \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \text{const}$$

По правилу Ленца, возникающая ЭДС самоиндукции направлена против порождающей ее причины.

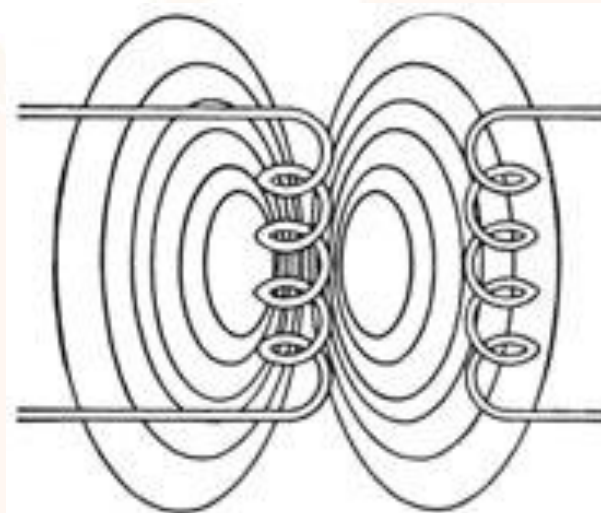
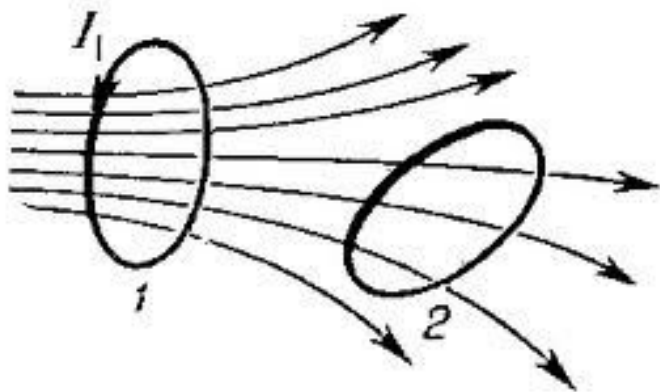
Если  $dI/dt > 0$  ЭДС будет направлена против усиливающегося тока

Если  $dI/dt < 0$  ЭДС будет поддерживать ослабевающий ток

# Взаимная индукция



Взаимная индуктивность: возникновение ЭДС индукции в близкорасположенных контурах при изменении магнитного потока, создаваемого токами в этих контурах



$$\Phi_2 \sim I_1 \Rightarrow \boxed{\Phi_2 = L_{21} I_1}$$

Коэффициент пропорциональности  $L_{21}$  между током в первом контуре и создаваемым им магнитным потоком через второй контур называется коэффициентом взаимной индуктивности.



$$\Phi_2 = L_{21} I_1$$

$\Rightarrow$

$$\Phi_1 = L_{12} I_2$$

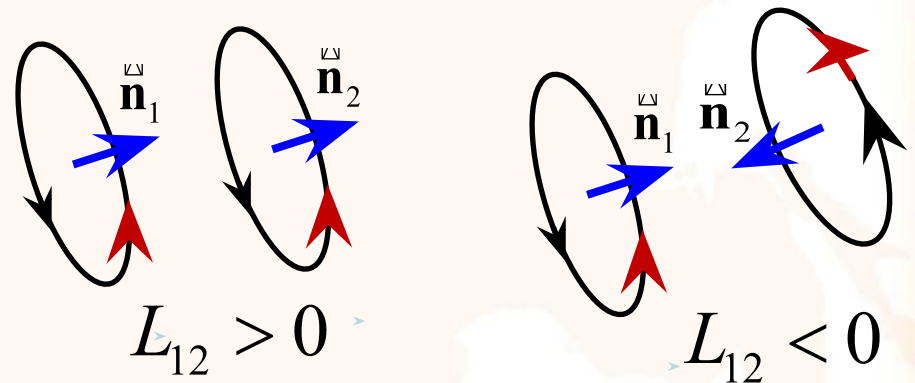
Контур 1 и 2 называются индуктивно-связанными.

**Теорема взаимности**

$$L_{12} = L_{21}$$

**Note 1.** Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров.

**Note 2.** Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения





$$L_{12} = L_{21}$$

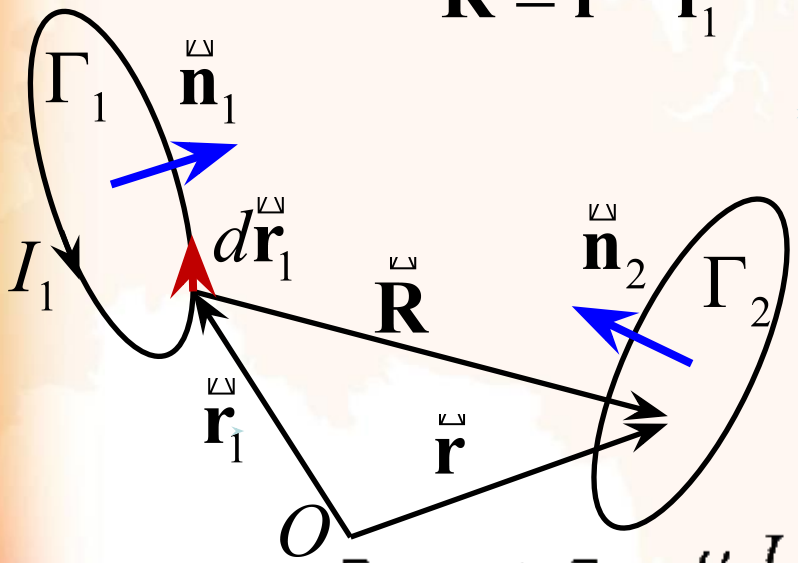
Теорема взаимности. Доказательство (для самостоятельного ознакомления) с использованием понятия векторного потенциала магнитного поля

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1 \times \vec{R}}{R^3}$$

Покажем, что:  $\vec{B}_1(\vec{r}) = [\nabla \times \vec{A}_1]$

где  $\vec{A}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1}{R}$



$$[\nabla \times \vec{A}_1] = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \left[ \nabla \times \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1}{R} \right] = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[ \nabla \times \frac{d\vec{r}_1}{R} \right] =$$





$$L_{12} = L_{21}$$

Теорема взаимности. Доказательство (для самостоятельного ознакомления) с использованием понятия векторного потенциала магнитного поля

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[ d\vec{r}_1 \times \frac{\vec{R}}{R^3} \right] \Rightarrow \vec{B}_1 = \left[ \nabla \times \vec{A}_1 \right]$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int \left[ \nabla \times \vec{A}_1 \right] \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{\Gamma_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{r}_2 =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{R} = L_{21} I_1$$

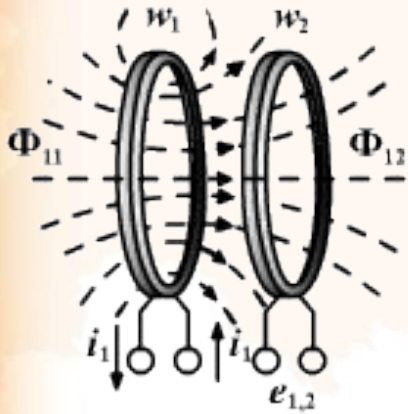
$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{R}$$



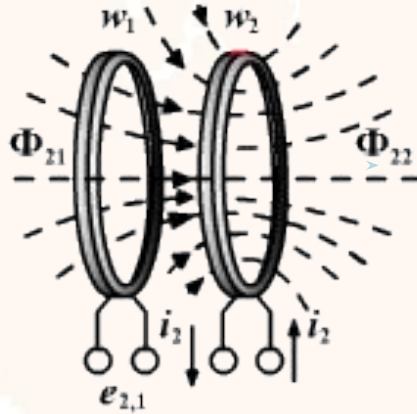
$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \Rightarrow \varepsilon_1 = d\Phi_1/dt = L_{11}dI_1/dt + L_{12}dI_2/dt \Rightarrow$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \Rightarrow \varepsilon_2 = d\Phi_2/dt = L_{21}dI_1/dt + L_{22}dI_2/dt \Rightarrow$$

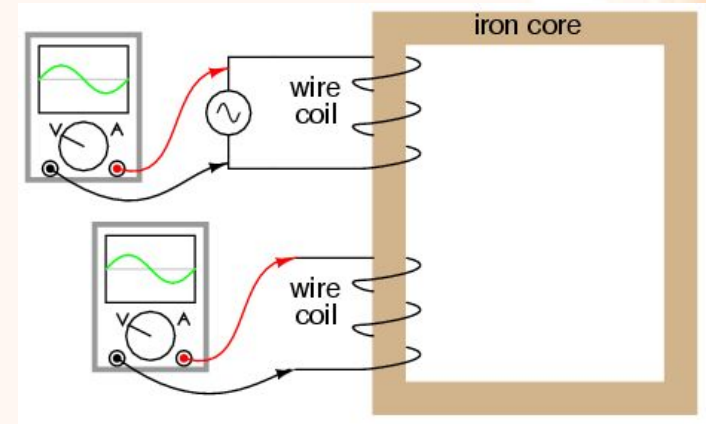
$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{ik} \Rightarrow \varepsilon_i = \sum_k L_{ik}dI_k/dt = L_{ik}dI_k/dt$$



а



б



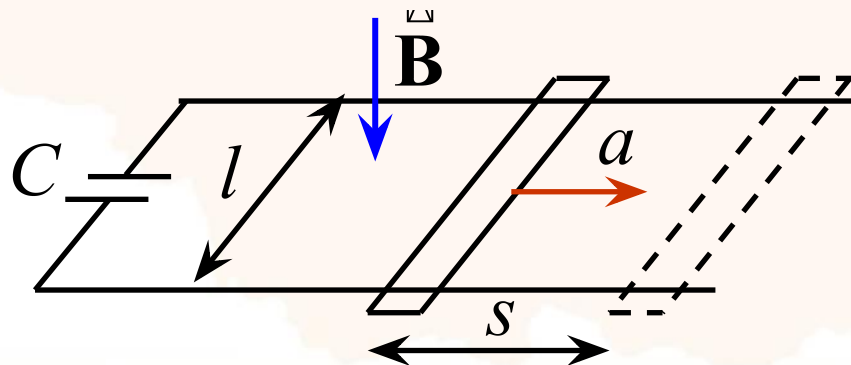
Коэффициенты  $L_{ik}$  пропорциональны числу витков в катушке  $i$   
 $\Rightarrow$  способ преобразования амплитуды переменного напряжения  
 (трансформатор)



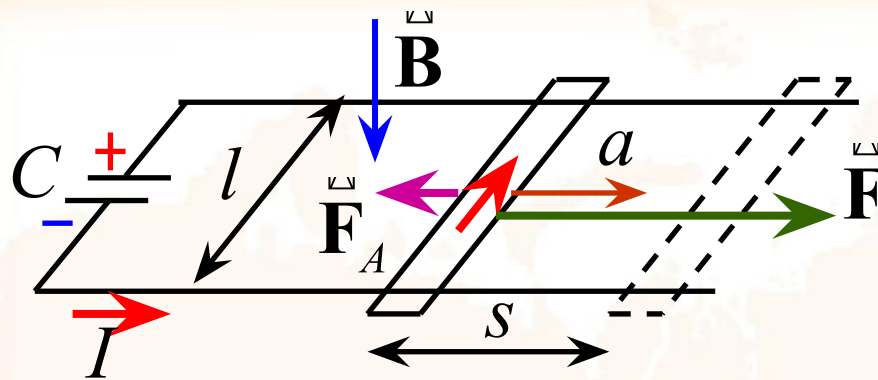
**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
1 декабря**

**Пример 1.** Найти работу, которую нужно совершить, чтобы переместить по рельсам перемычку длиной  $l$  на расстояние  $s$  с постоянным ускорением  $a$ . Индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  перпендикулярна плоскости, в которой находятся перемычка и рельсы. Ёмкость конденсатора равна  $C$ , а сопротивлением рельсов и перемычки можно пренебречь.







$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv$$

$$\mathcal{E}_i = U = \frac{q}{C} = Blv$$

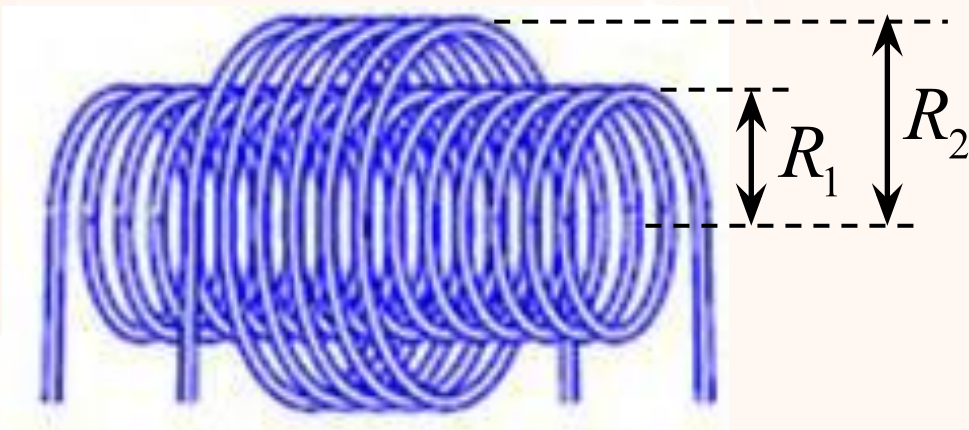
$$q = Blv \quad I = \frac{dq}{dt} = Bl \frac{dv}{dt} = Bla$$

$$F_A = IBl = B^2 l^2 a C = \text{const}$$

$$\vec{F} = -\vec{F}_A \quad A = B^2 l^2 a C s$$



**Пример 2.** Найти взаимную индуктивность на единицу длины двух бесконечных коаксиальных соленоидов, имеющих радиусы  $R_1$  и  $R_2$  и число витков на единицу длины  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно.

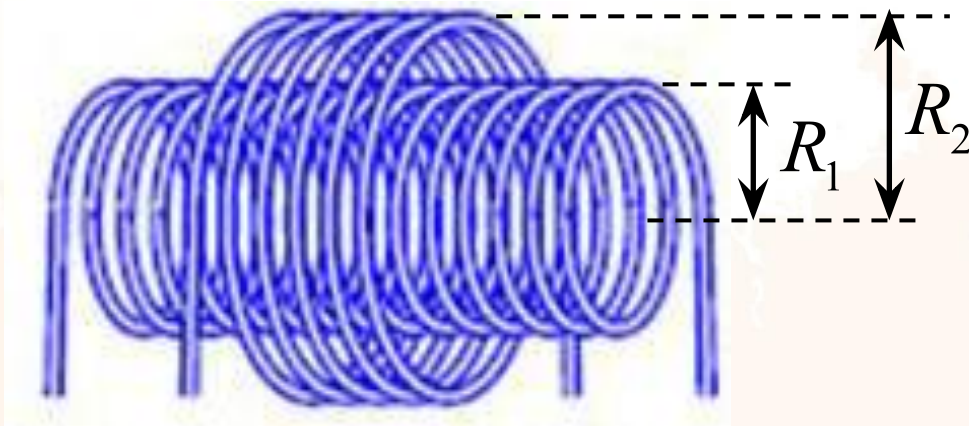


a)  $I_2 = \text{const} \Rightarrow$

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$$

$$\Psi_1 = \pi R_1^2 n_1 B_2 =$$

$$= \pi R_1^2 n_1 \mu_0 n_2 I_2$$



$$\Psi_1 = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 I_2$$

$$\Psi_1 = L_{12} I_2$$

$$\Rightarrow L_{12} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2$$

$$\begin{aligned} \text{б) } I_1 = \text{const} &\Rightarrow B_1 = \mu_0 n_1 I_1 & \Psi_2 = \pi R_1^2 n_2 B_1 = \\ &= \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 I_1 & \Psi_2 = L_{21} I_1 \Rightarrow L_{21} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 \end{aligned}$$



## Пояс Роговского

