Электричество и магнетизм

Лекция 13

Электромагнитная индукция

24 ноября 2021 года
Лектор: доцент НИЯУ МИФИ
Ольчак Андрей Станиславович

Основные законы электростатики и магнитостатики

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \overrightarrow{\mathbf{dS}} = 0$$

$$\left(\nabla \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\left(\nabla \cdot \mathbf{B}\right) = 0$$

$$\oint_\Gamma \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = 0$$

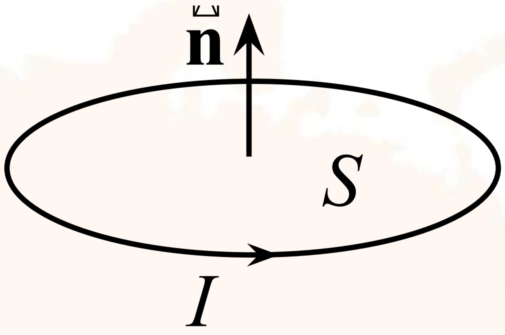
$$\oint_\Gamma \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$\left[\nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right] = 0$$

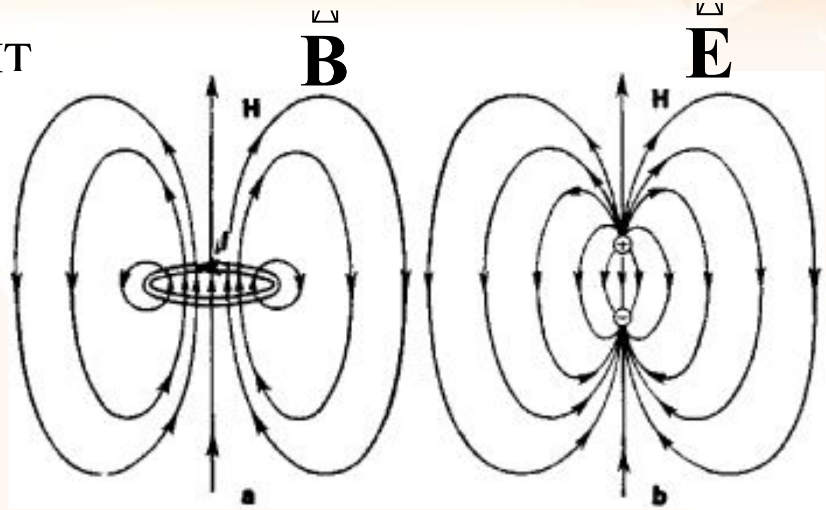
$$\left[\nabla \times \vec{\mathbf{B}}\right] = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}$$

Магнитный диполь

Магнитный дипольный момент



$$\boxed{\vec{\mathbf{p}}_m = IS\vec{\mathbf{n}}}$$

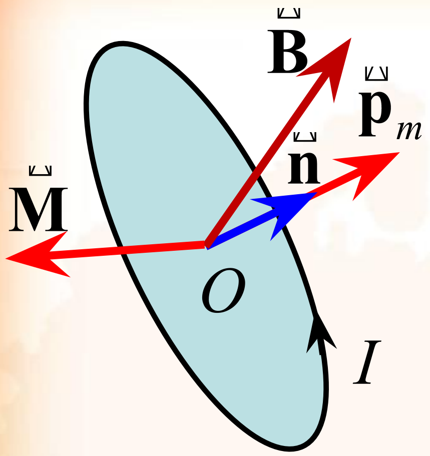


$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left\{\frac{3\left(\vec{\mathbf{p}}_m \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)\vec{\mathbf{r}}}{r^2} - \vec{\mathbf{p}}_m\right\}$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{\frac{3\left(\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right)\vec{\mathbf{r}}}{r^2} - \vec{\mathbf{d}}\right\}$$

Контур с током в магнитном поле

$$\vec{\mathbf{F}} = (\vec{\mathbf{p}}_m \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}} = p_{mx}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial x} + p_{my}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial y} + p_{mz}\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial z}$$



Момент силы Ампера

$$\vec{\mathbf{M}} = \left[\vec{\mathbf{p}}_m \times \vec{\mathbf{B}}\right]$$

$$\vec{\mathbf{p}}_m = IS\vec{\mathbf{n}}$$

$$w = -p_m B\cos\varphi = -\left(\vec{\mathbf{p}}_m \cdot \vec{\mathbf{B}}\right)$$

Аналогия с электрическим диполем: $w = -\left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right)$

Как правило свободный магнитный диполь втягивается в область более сильного магнитного поля.

Формулы для момента силы и энергии магнитного диполя одинаковы для однородного и неоднородного полей.

Опыт Фарадея
(электромагнитная индукция)

См. «Физика в опытах», часть 3

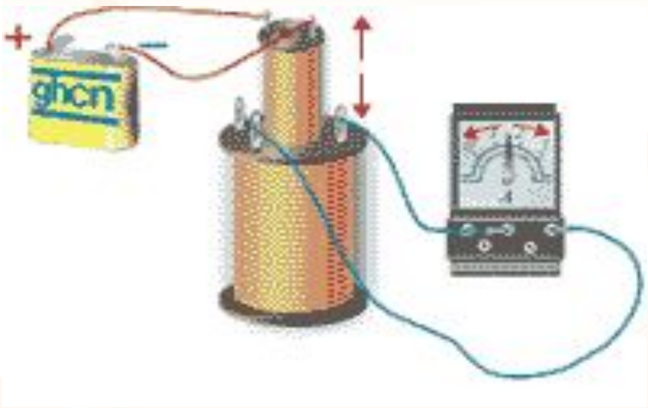
Опыты Фарадея. ЭДС индукции

29 августа 1831 г. М. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции – возникновение электрического поля и электрических токов в контуре при изменении потока магнитного поля.

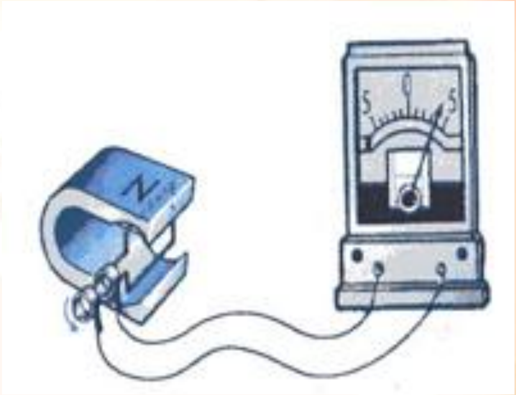
Майкл Фараде́й
1791 - 1867

Закон электромагнитной индукции

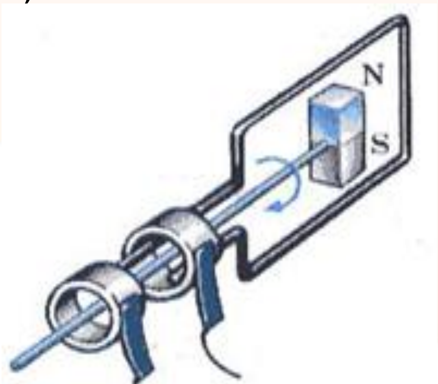
движение магнита относительно катушки (или наоборот)



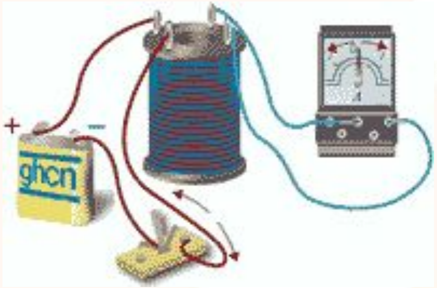
движение катушек относительно друг друга



вращением контура в магнитном поле



вращением магнита внутри контура



изменение силы тока в цепи первой катушки

Закон электромагнитной индукции

Результаты опытов Фарадея

В замкнутом контуре, не содержащем ЭДС, появляется индукционный ток, если:

1. Контур или его часть движутся в магнитном поле так, что ***меняется магнитный поток через контур***;
2. Контур неподвижен, но меняется магнитное поле в которое он помещен (создающая поле катушка движется или меняется ток катушки) и – как следствие – ***меняется магнитный поток через контур*** .

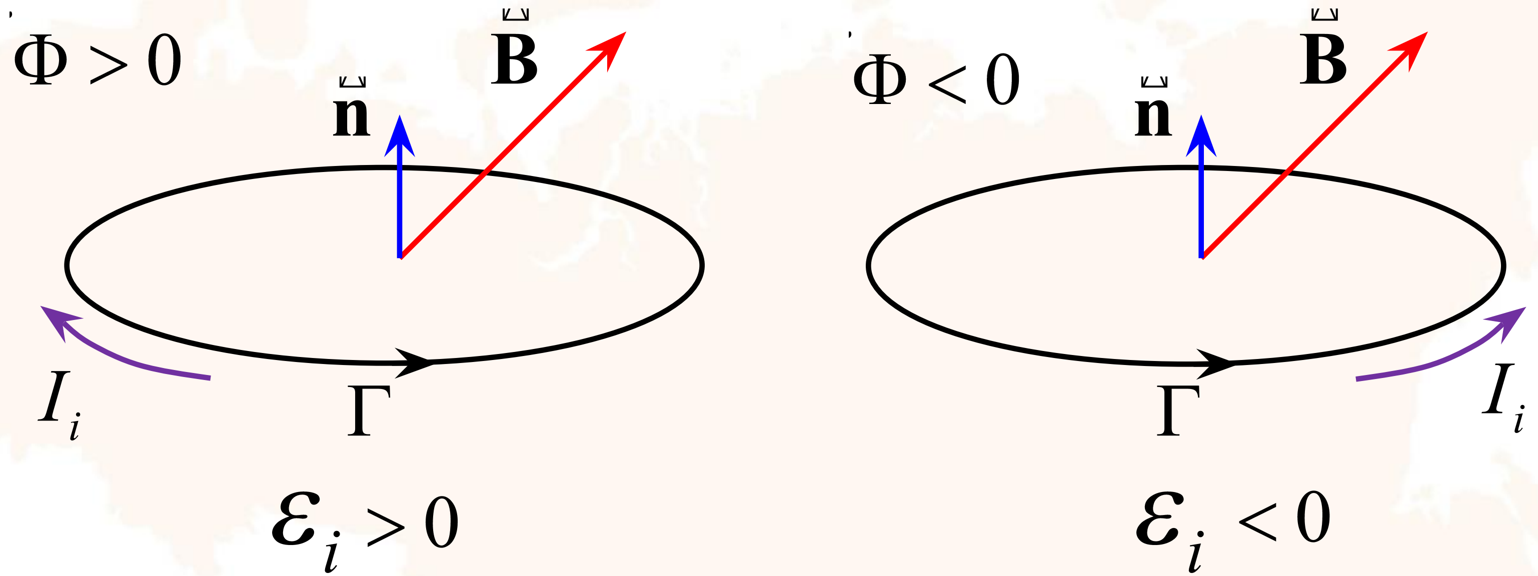
$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}}}$$

Математическая формулировка Э.Х. Ленца:

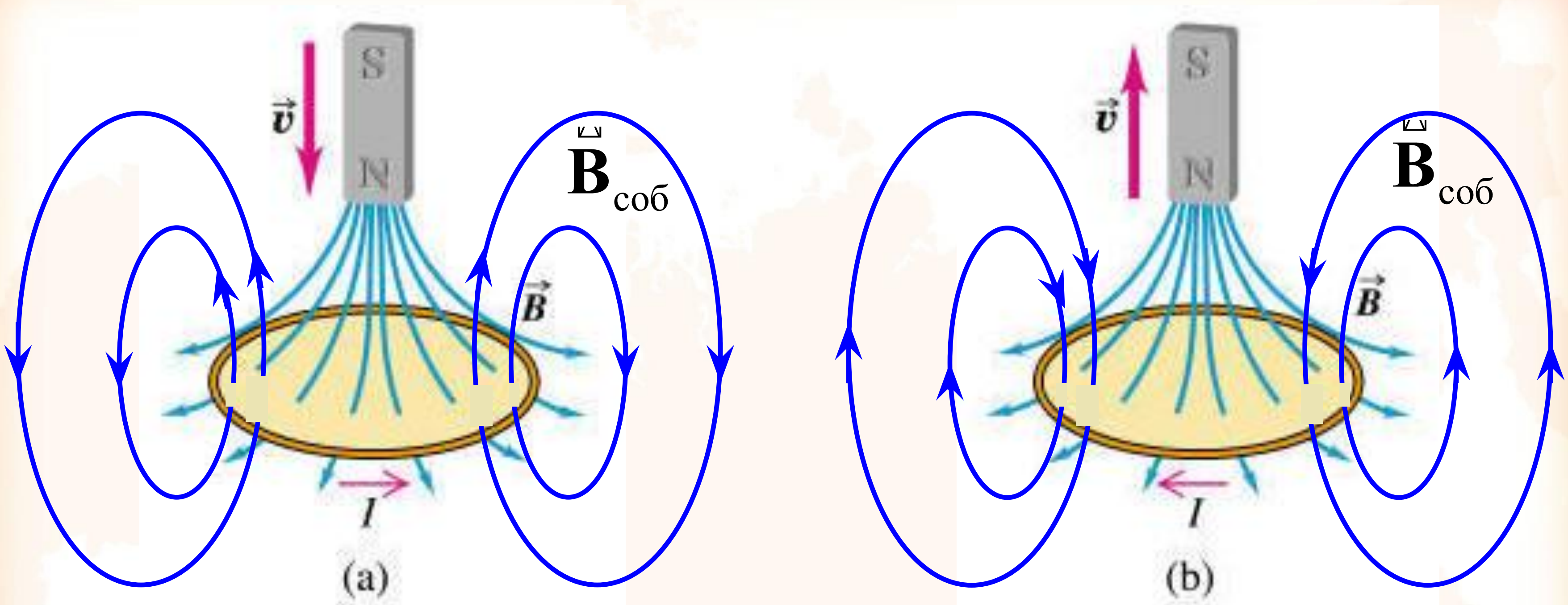
Закон электромагнитной индукции

Направление индукционного тока. Правило Ленца



Индукционный ток направлен так, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока через контур.

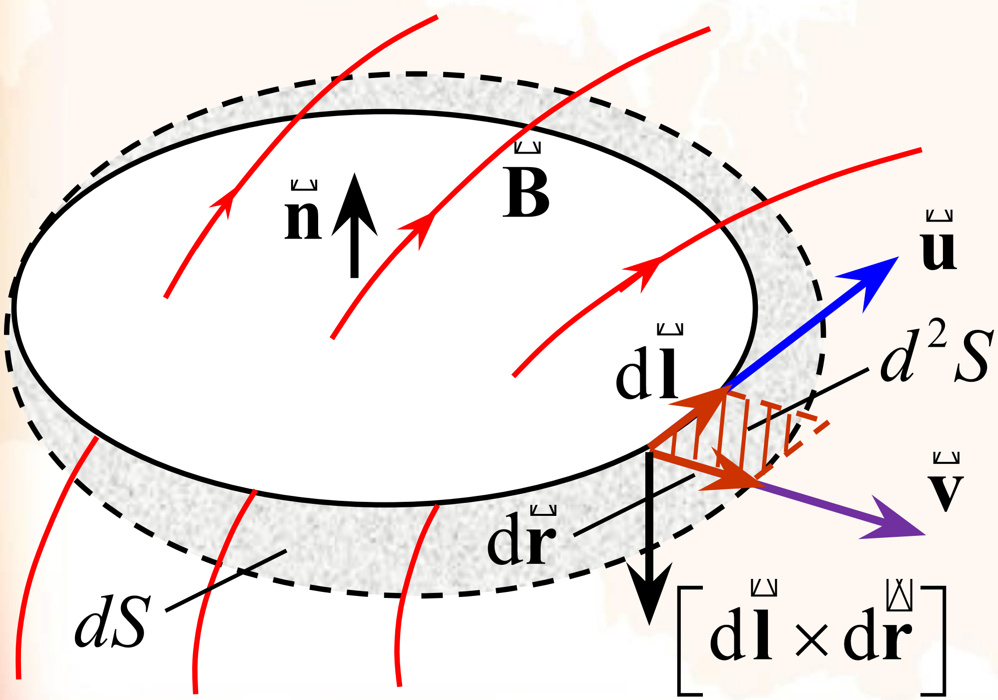
Закон электромагнитной индукции



Индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине его вызывающей.

Физические механизмы электромагнитной индукции

1. Движется контур или его часть



$\vec{u}$ - дрейфовая скорость носителей тока

$\vec{v}$ - скорость движения участка проводника *dl*

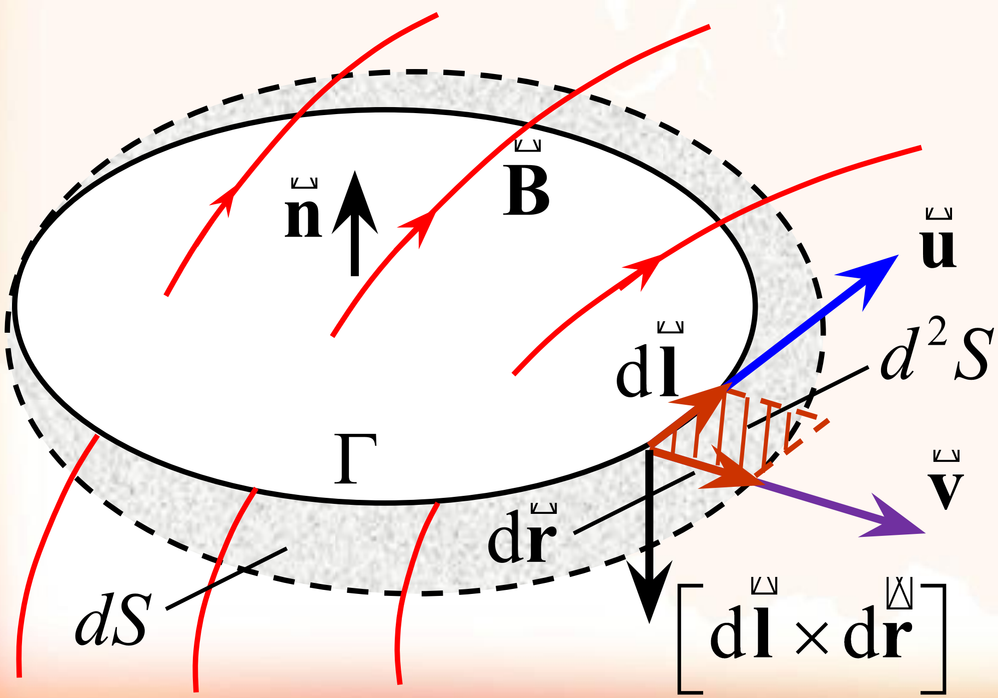
$$\vec{F}_{стор} = q\left[\left(\vec{v}+\vec{u}\right)\times\vec{B}\right] =$$

$$= q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right] + q\left[\vec{u}\times\vec{B}\right]$$

Закон электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \oint\limits_{\Gamma} \left[\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \oint\limits_{\Gamma} \left[\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$$

$$\left[\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{B}} \right] \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} = \left[\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}} \times \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} \right] \cdot \vec{\mathbf{B}} = -d^2 S \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$$



$$\mathcal{E}_i = -\oint\limits_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \frac{d^2 S \vec{\mathbf{n}}}{dt} = $$

$$= -\frac{\oint\limits_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d^2 S}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

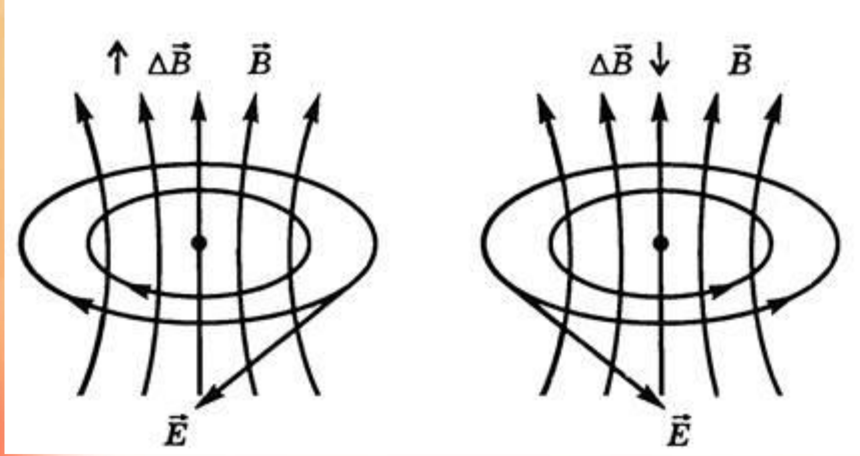
2. Контур неподвижен, меняется магнитное поле

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right] \quad \text{т.к. } \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \left[\nabla\times\mathbf{E}\right] = 0$$

Гипотеза: меняющееся магнитное поле ***B(t)*** генерирует вихревое электрическое поле!

$$\boxed{\left[\nabla\times\mathbf{E}\right] = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}}$$



$$\mathcal{E}_i = \oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \left[\nabla\times\mathbf{E}\right]\cdot d\mathbf{S} =$$

$$= -\int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} =$$

$$= -\frac{d\Phi}{dt}$$

Закон электромагнитной индукции

$$\boxed{\left[\nabla\times\vec{\mathbf{E}}\right] = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \left[\nabla\times\vec{\mathbf{E}}\right] = 0$$

$$\varepsilon_i = \oint_\Gamma \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \left[\nabla\times\vec{\mathbf{E}}\right]\cdot \vec{\mathbf{dS}} =$$

$$= -\int_S \frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\cdot\vec{\mathbf{dS}} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{dS}} \equiv -\frac{d\Phi}{dt}$$

Электромагнитная индукция

Применение для измерения магнитного поля или протекающего по цепи заряда

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i$$

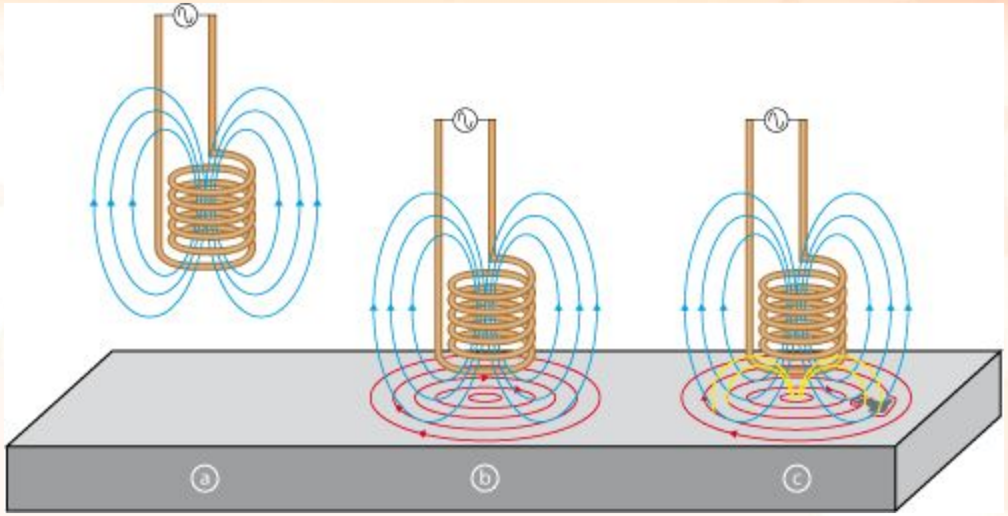
– полный магнитный поток через катушку (потокосцепление)

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} \qquad I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Psi}{dt}$$

$$dq = -\frac{d\Psi}{R} \qquad q = -\frac{1}{R}\int_{\Psi}^{0} d\Psi = \frac{\Psi}{R} = \frac{NBS}{R} \qquad B = \frac{qR}{NS}$$

Электромагнитная индукция

Применение для нагревания
Токи Фуко



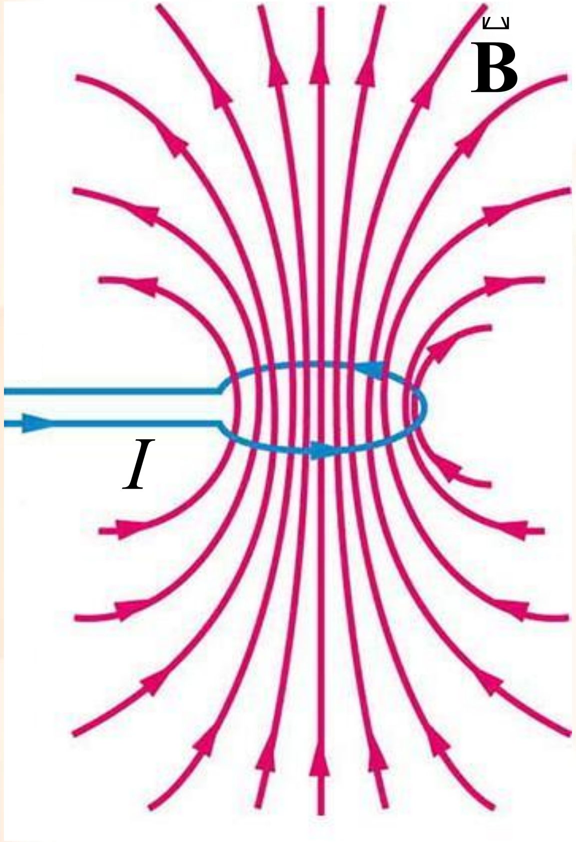
Электромагнитная индукция

Главное применение – **генерация электроэнергии**

ИНДУКТИВНОСТЬ
и
САМОИНДУКЦИЯ

Явление самоиндукции

Индуктивность контура



Контур из тонкого проводника

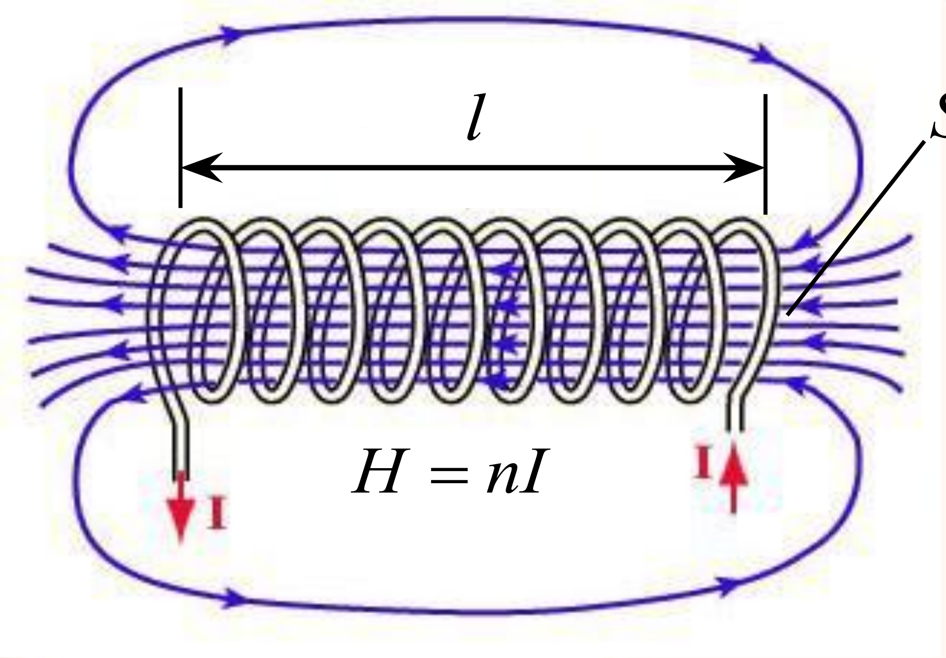
$$\Phi \sim B \sim I \Rightarrow \Phi = LI$$

L [Тл*м^2/А = Гн (Генри)] - ***индуктивность контура*** = коэффициент пропорциональности между током в контуре и создаваемым им магнитным потоком через сам контур.

Note 1. В отсутствие ферромагнетиков L зависит только от геометрии и площади контура (ну и немножко от магнитной проницаемости среды)

Note 2. $L > 0$.

Индуктивность соленоида



$$B = \mu\mu_0 nI = \text{const}$$

$$\Psi = N\Phi = nlBS$$

$$V = lS \quad \Rightarrow \quad \Psi = nVB$$

$$\Psi = nV\mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 n^2 VI$$

$$\Psi = LI \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \mu\mu_0 n^2 V}$$

$$[\mu_0] \quad \text{Гн/м}$$

ЭДС самоиндукции

Самоиндукция = изменение тока в контуре, вызванное изменением потока собственного магнитного поля через контур.

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} \qquad \Phi = LI \Rightarrow \qquad \boxed{\mathcal{E}_s = -L\frac{dI}{dt}}$$

$$L = \text{const}$$

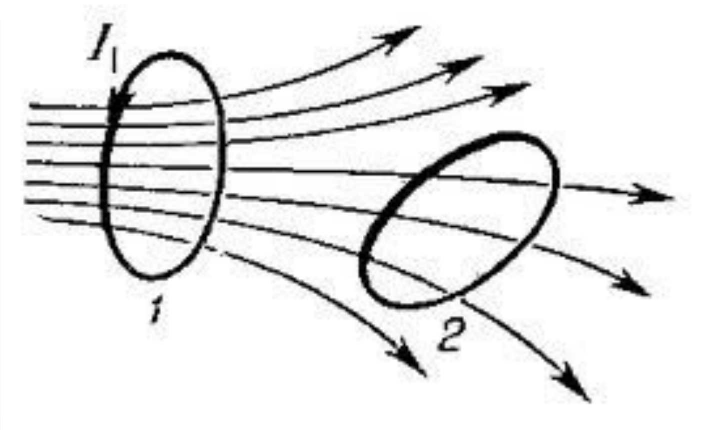
По правилу Ленца, возникающая ЭДС самоиндукции направлена против порождающей ее причины.

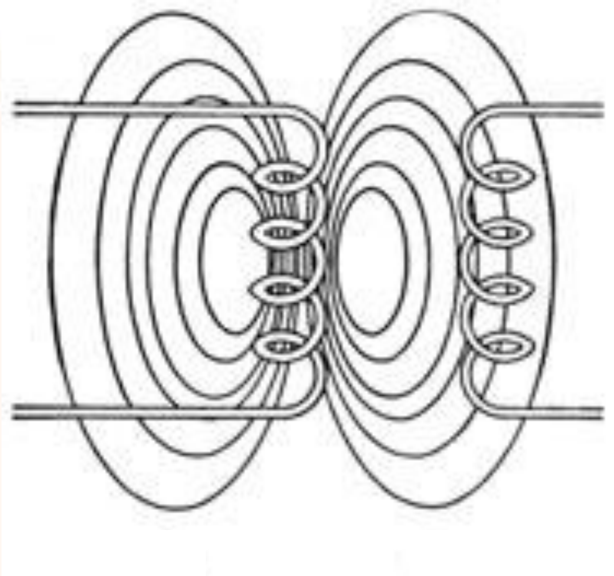
Если *dI/dt>0* ЭДС будет направлена против усиливающегося тока

Если *dI/dt>0* ЭДС будет поддерживать ослабевающий ток

Взаимная индукция

Взаимная индуктивность: возникновение ЭДС индукции в близкорасположенных контурах при изменении магнитного потока, создаваемого токами в этих контурах





$$\Phi_2 \sim I_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_2 = L_{21} I_1}$$

Коэффициент пропорциональности L_{21} между током в первом контуре и создаваемым им магнитным потоком через второй контур называется коэффициентом взаимной индуктивности.

Взаимная индукция

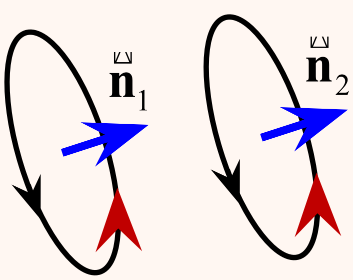
$$\boxed{\Phi_2 = L_{21} I_1} \quad => \quad \boxed{\Phi_1 = L_{12} I_2}$$

Контуры 1 и 2 называются индуктивно-связанными.

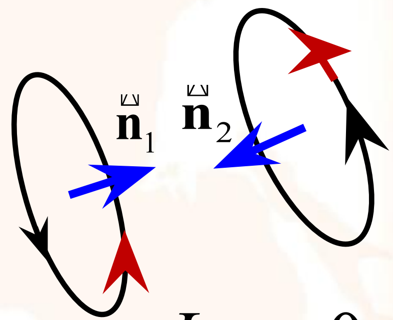
Теорема взаимности $\boxed{L_{12} = L_{21}}$

Note 1. Коэффициенты L_{12} и L_{21} зависят от формы, размеров и взаимного расположения контуров.

Note 2. Коэффициенты L_{12} и L_{21} могут принимать как положительные, так и отрицательные значения



$L_{12} > 0$



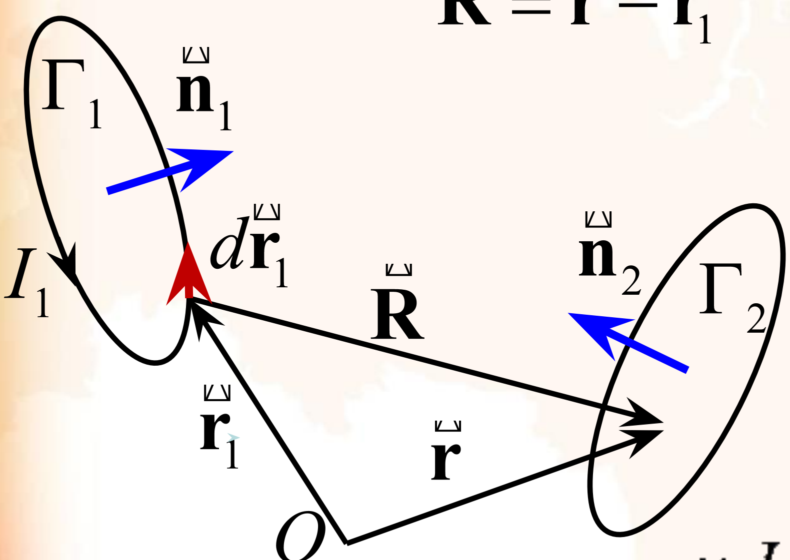
$L_{12} < 0$

Взаимная индукция

Теорема взаимности. Доказательство (для самостоятельного ознакомления) с использованием понятия векторного потенциала магнитного поля

$$L_{12} = L_{21}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_1$$



$$\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{\left[d\vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{R}}\right]}{R^3}$$

Покажем, что: $\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{r}}) = \left[\nabla \times \vec{\mathbf{A}}_1\right]$

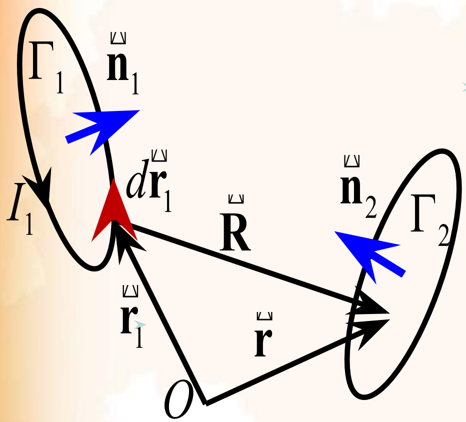
где $\vec{\mathbf{A}}_1(\vec{\mathbf{r}}) = \dfrac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{R}$

$$\left[\nabla \times \vec{\mathbf{A}}_1\right] = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\left[\nabla \times \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{R}\right] = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[\nabla \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1}{R}\right] =$$

Взаимная индукция

Теорема взаимности. Доказательство (для самостоятельного ознакомления) с использованием понятия векторного потенциала магнитного поля

$$\boxed{L_{12} = L_{21}}$$



$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[\nabla \frac{1}{R} \times d\vec{\mathbf{r}}_1 \right] = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[-\frac{\vec{\mathbf{R}}}{R^3} \times d\vec{\mathbf{r}}_1 \right]$$

$$\vec{\mathbf{B}}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \left[d\vec{\mathbf{r}}_1 \times \frac{\vec{\mathbf{R}}}{R^3} \right] \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{B}}_1 = \left[\nabla \times \vec{\mathbf{A}}_1 \right]$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{\mathbf{B}}_1 \cdot \vec{\mathbf{dS}}_2 = \int_{S_2} \left[\nabla \times \vec{\mathbf{A}}_1 \right] \cdot \vec{\mathbf{dS}}_2 = \oint_{\Gamma_2} \vec{\mathbf{A}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_2 =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_2}{R} = L_{21} I_1$$

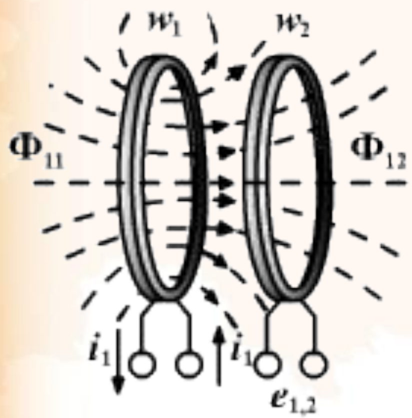
$$\boxed{L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{\mathbf{r}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{r}}_2}{R}}$$

Взаимная индукция

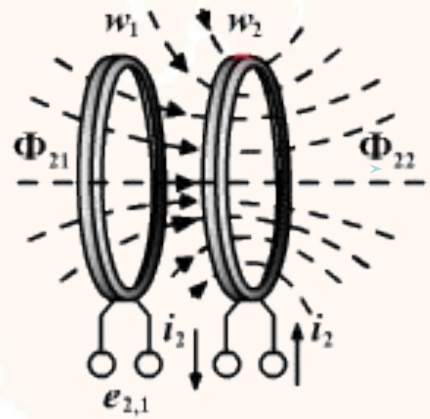
$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \Rightarrow \varepsilon_1 = d\Phi_1/dt = L_{11}dI_1/dt + L_{12}dI_2/dt \;\Rightarrow$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} \Rightarrow \varepsilon_2 = d\Phi_2/dt = L_{21}dI_1/dt + L_{22}dI_2/dt \;\Rightarrow$$

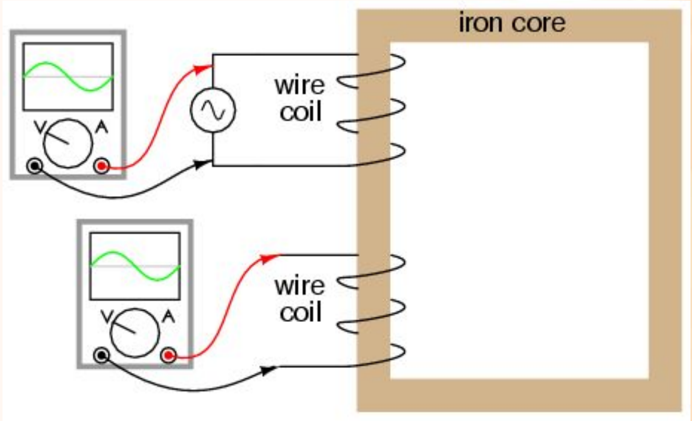
$$\Phi_i = \Sigma_k \Phi_{ik} \Rightarrow \varepsilon_i = \Sigma_k L_{ik}dI_k/dt = L_{ik}dI_k/dt$$



а



б

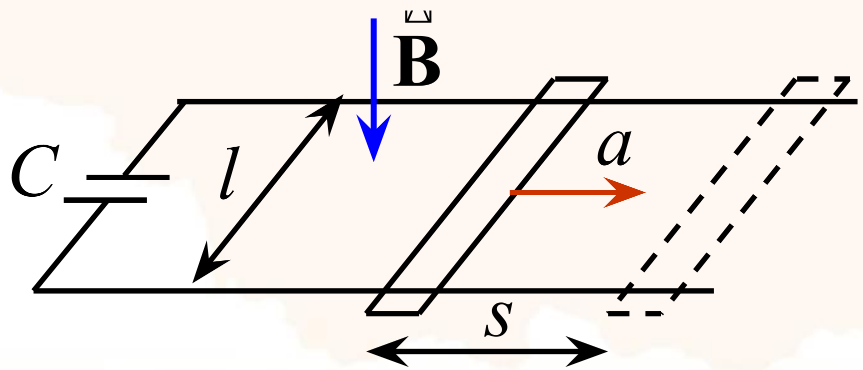


Коэффициенты L_{ik} пропорциональны числу витков в катушке i => способ преобразования амплитуды переменного напряжения (трансформатор)

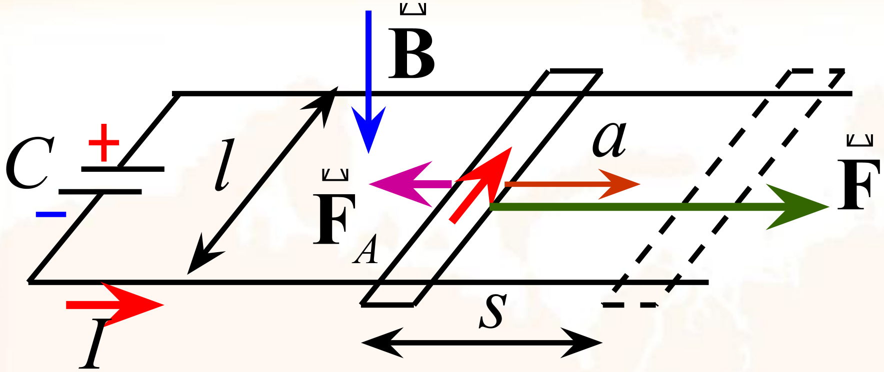
Спасибо за внимание!

Следующая лекция
1 декабря

Пример 1. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы переместить по рельсам перемычку длиной l на расстояние s с постоянным ускорением a. Индукция магнитного поля **B** перпендикулярна плоскости, в которой находятся перемычка и рельсы. Ёмкость конденсатора равна C, а сопротивлением рельсов и перемычки можно пренебречь.



Примеры решения задач



$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

$$\mathcal{E}_i = U = \frac{q}{C} = Blv$$

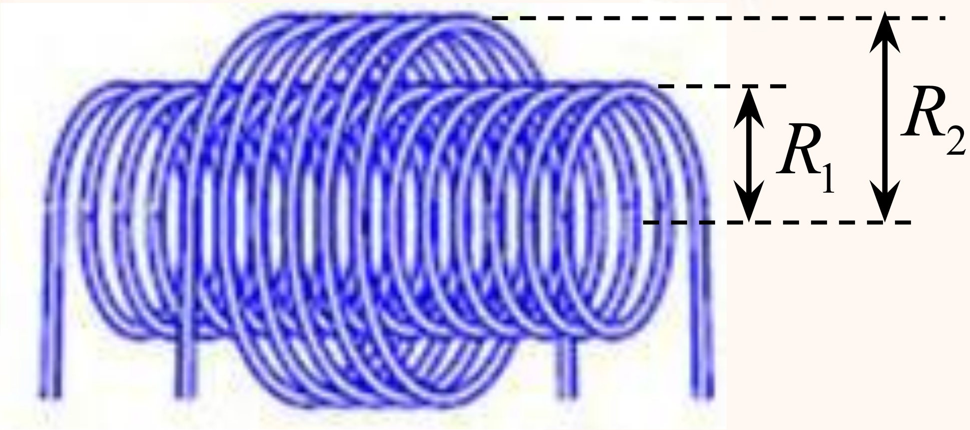
$$q = Blv \qquad I = \frac{dq}{dt} = Bl\frac{dv}{dt} = Bla$$

$$F_A = IBl = B^2 l^2 aC = \text{const}$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_A \qquad A = B^2 l^2 aCs$$

Примеры решения задач

Пример 2. Найти взаимную индуктивность на единицу длины двух бесконечных коаксиальных соленоидов, имеющих радиусы R_1 и R_2 и число витков на единицу длины n_1 и n_2, соответственно.



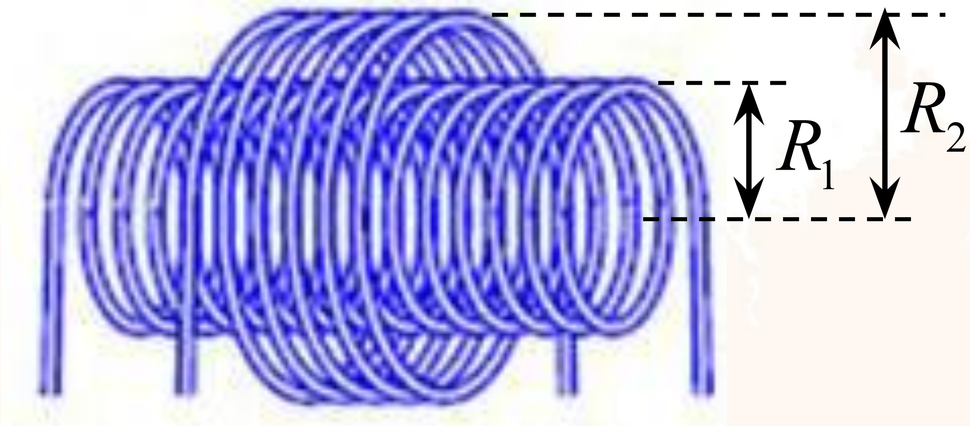
а) $I_2 = \text{const} \quad \Rightarrow$

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2$$

$$\Psi_1 = \pi R_1^2 n_1 B_2 =$$

$$= \pi R_1^2 n_1 \mu_0 n_2 I_2$$

Примеры решения задач



$$\Psi_1 = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 I_2$$

$$\Psi_1 = L_{12} I_2$$

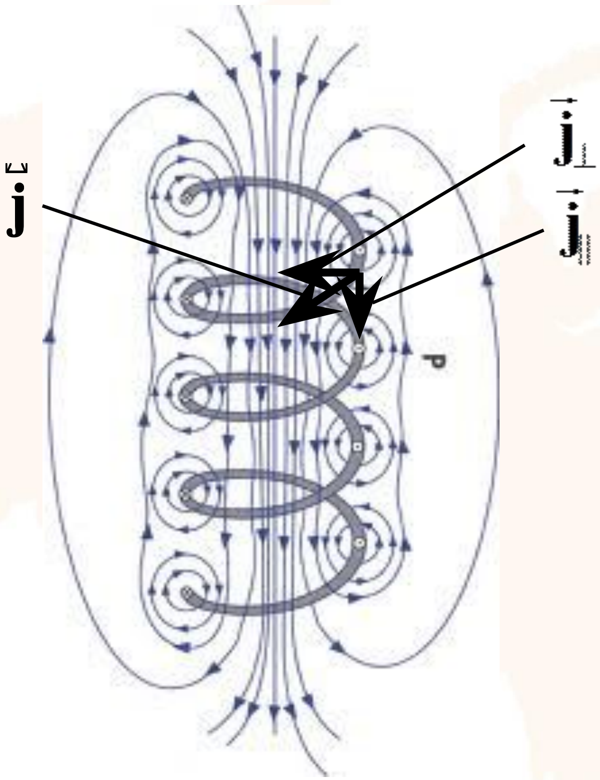
$$\Rightarrow \quad L_{12} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2$$

б) $I_1 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \qquad \Psi_2 = \pi R_1^2 n_2 B_1 =$

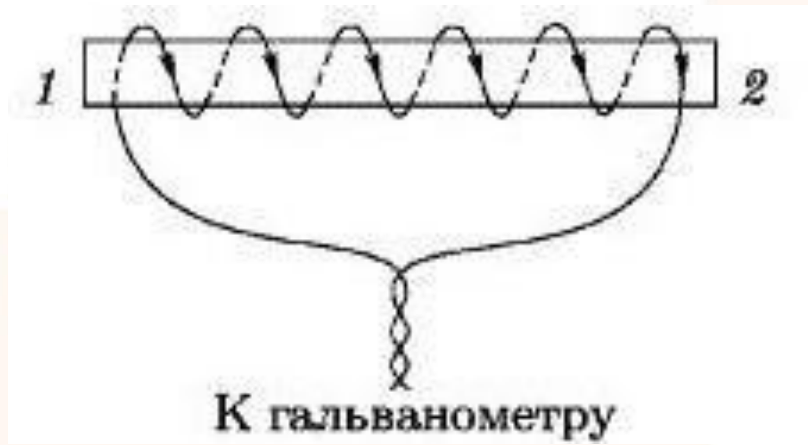
$= \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2 I_1 \qquad \Psi_2 = L_{21} I_1 \quad \Rightarrow \quad L_{21} = \mu_0 \pi R_1^2 n_1 n_2$

Закон электромагнитной индукции

Пояс Роговского



$$I_{\parallel} \ll I_{\perp}$$



$$I_{\parallel} \approx 0$$