

Инварианты

Общее уравнение кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Инварианты кривых второго порядка

$$I_1 = Sp\|a_{ij}\|, \text{ где } i, j = 1, 2;$$

$$I_2 = \det\|a_{ij}\|, \text{ где } i, j = 1, 2;$$

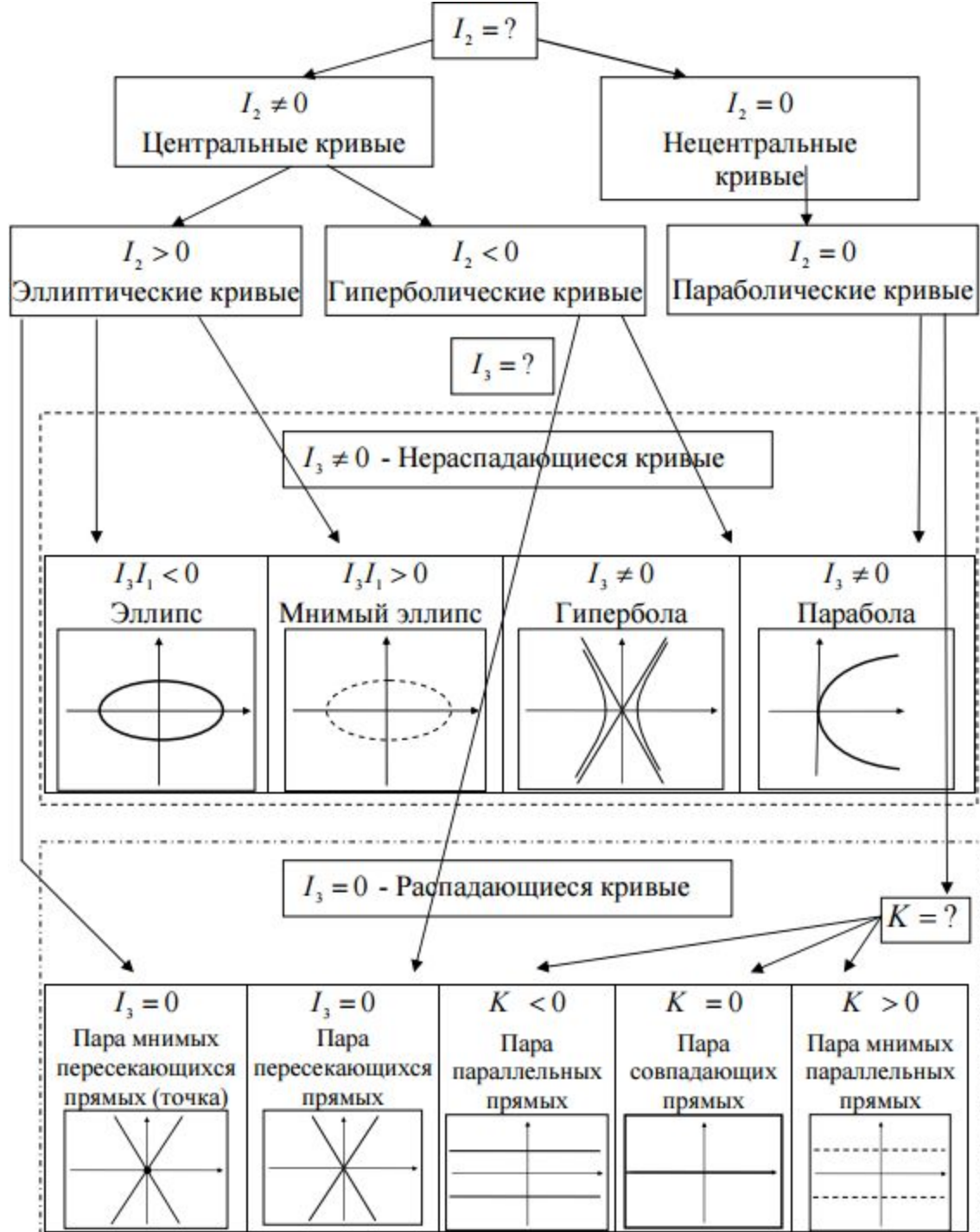
$$I_3 = \det\|a_{ij}\|, \text{ где } i, j = 1, 2, 3;$$

Теорема про полуинвариант кривой второго порядка. Функция K коэффициентов общего уравнения кривой второго порядка

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

является инвариантом относительно поворотов, а для линий, у которых $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$, функция K инвариантна и при параллельных переносах.

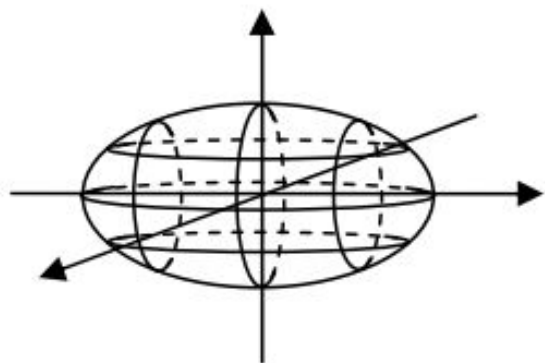
N			Тип		Название кривой	Уравнение	
1	Центральные $I_2 \neq 0$	$I_2 > 0$	Эллиптический	$I_3 I_1 < 0$	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
2				$I_3 = 0$	Точка (пара мнимых пересекающихся прямых)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	
3				$I_3 I_1 > 0$	Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
4	Центральные $I_2 \neq 0$	$I_2 < 0$	Гиперболический	$I_3 \neq 0$	Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
5				$I_3 = 0$	Пара пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
6	Нецентральные	$I_2 = 0$	Параболический	$I_3 \neq 0$	Парабола	$y^2 = 2px$	
7				$I_3 = 0$	$K < 0$	Пара параллельных прямых	$y^2 = h^2$
8					$K = 0$	Пара совпадающих прямых	$y^2 = 0$
9	$K > 0$	Пара параллельных мнимых прямых	$y^2 = -h^2$				



Поверхности второго порядка

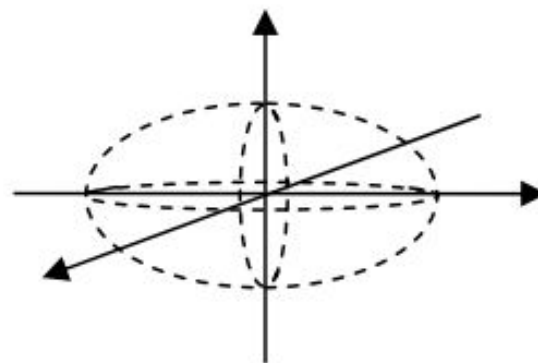
Вещественный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



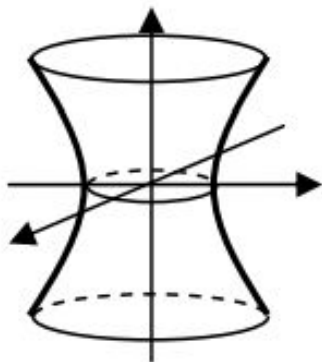
Мнимый эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$



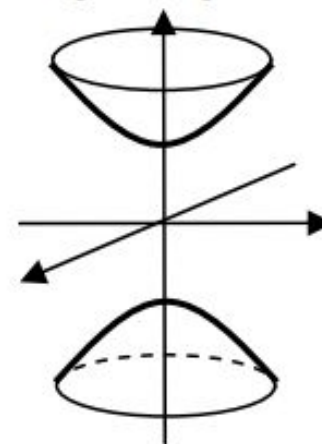
Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Двуполостный гиперболоид

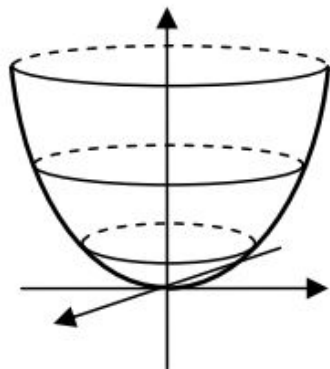
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Поверхности второго порядка

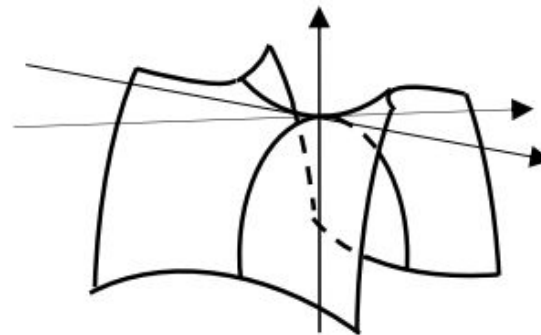
Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



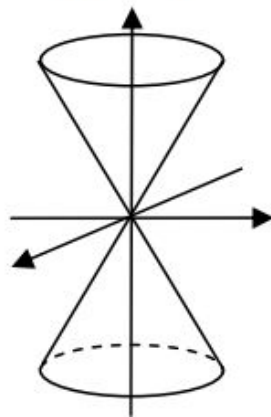
Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



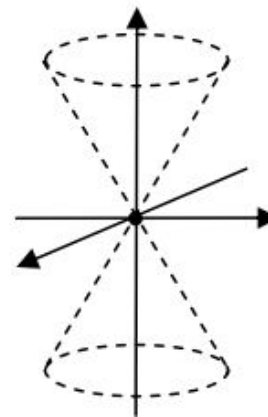
Вещественный конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Мнимый конус (точка)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Цилиндры второго порядка

Эллиптический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Прямая линия (две
мнимые пересекающиеся
плоскости)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Мнимый эллиптический
цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Цилиндры второго порядка

Эллиптический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Прямая линия (две
мнимые пересекающиеся
плоскости)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Мнимый эллиптический
цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Цилиндры второго порядка

Эллиптический цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Прямая линия (две
мнимые пересекающиеся
плоскости)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

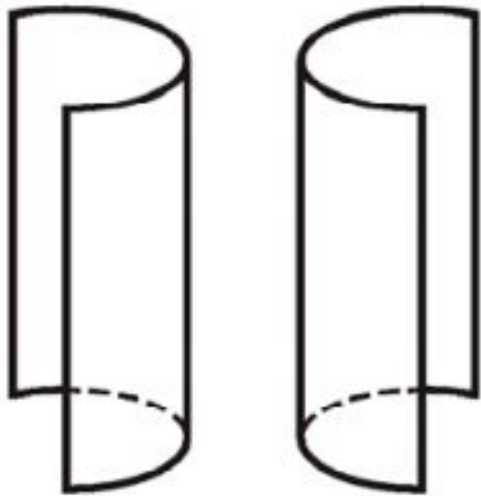
Мнимый эллиптический
цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Цилиндры второго порядка

Гиперболический
цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Две пересекающиеся
плоскости



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

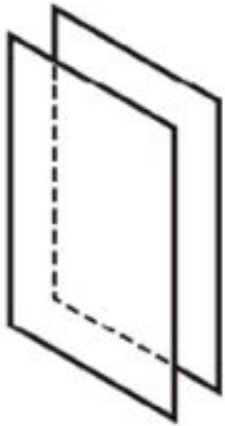
Параболический
цилиндр



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Цилиндры второго порядка

Две параллельные
плоскости



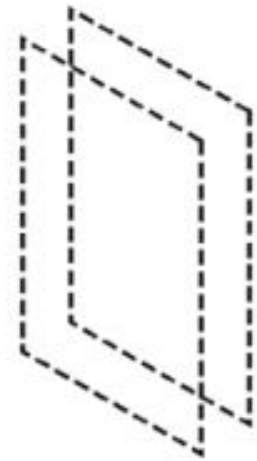
$$y^2 = h^2$$

Две совпадающие
плоскости



$$y^2 = 0$$

Две мнимые
параллельные плоскости



$$y^2 = -h^2$$

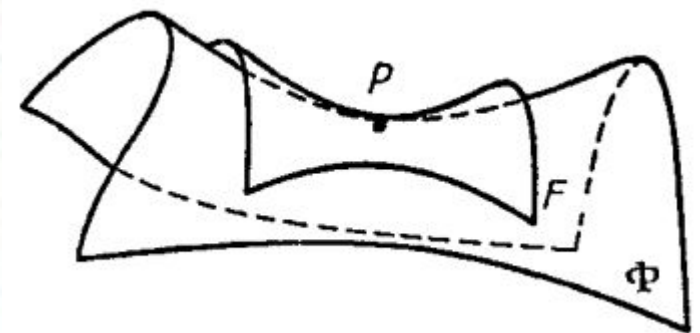
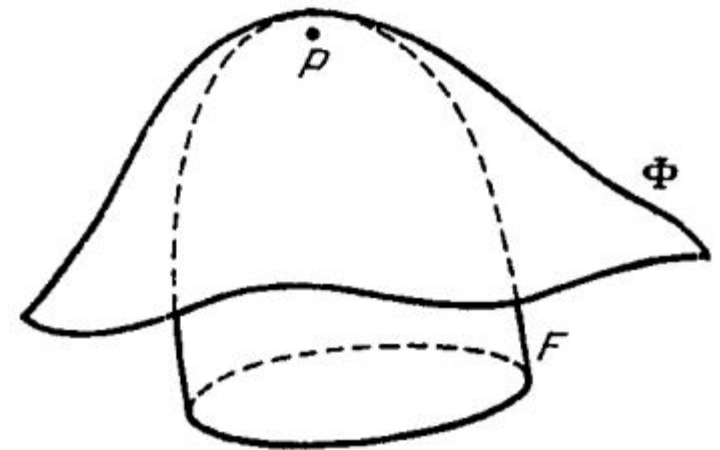
Инварианты поверхностей второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

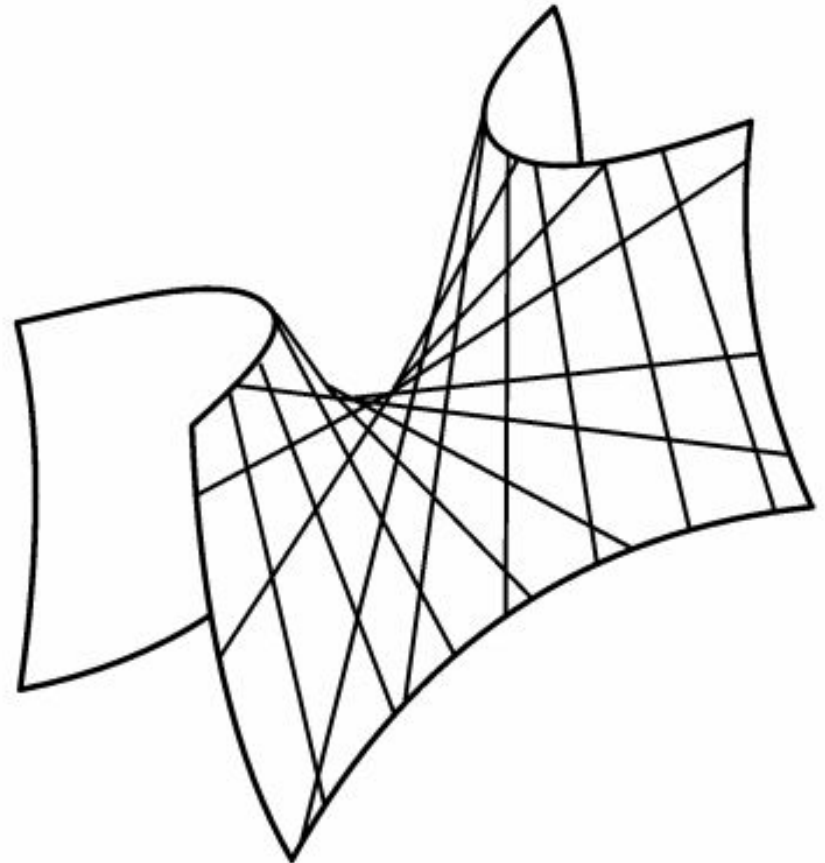
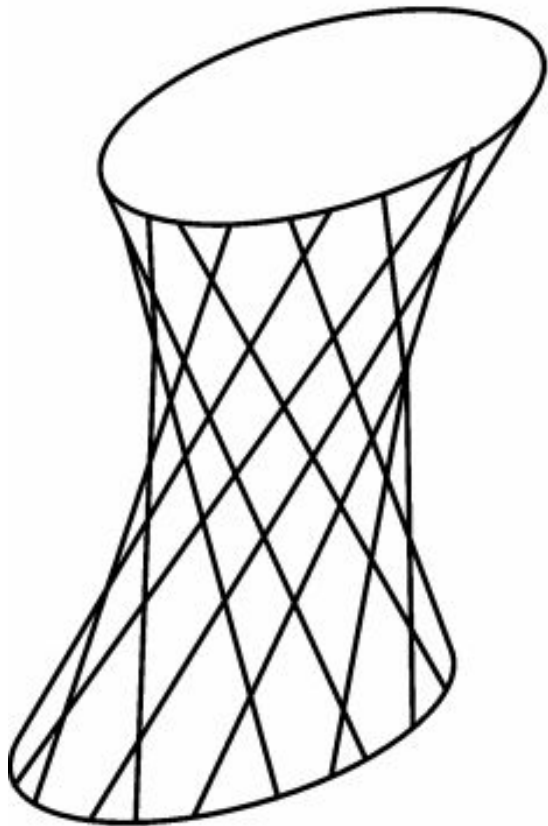
$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

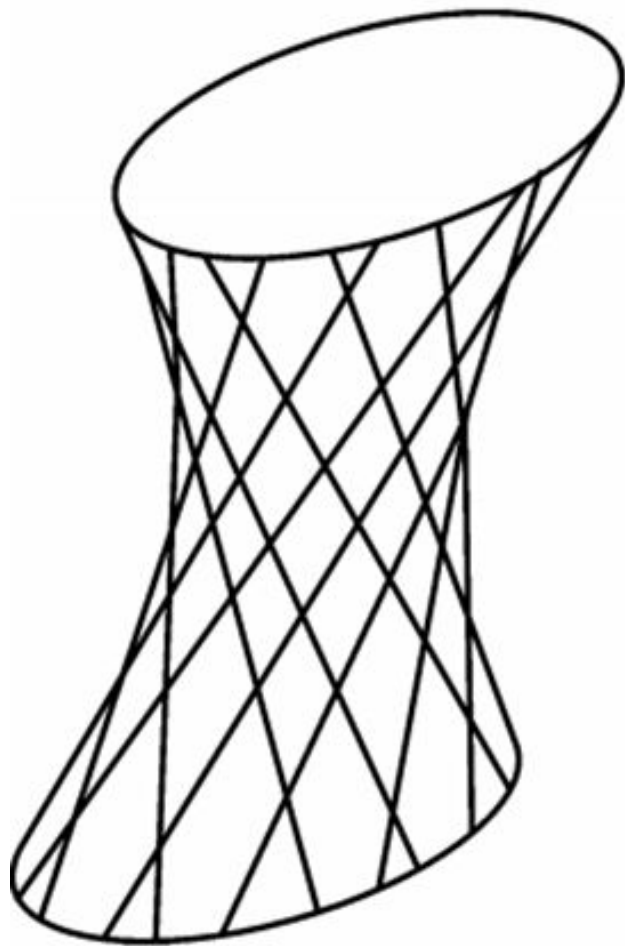
Касательные параболоиды



Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида



Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида

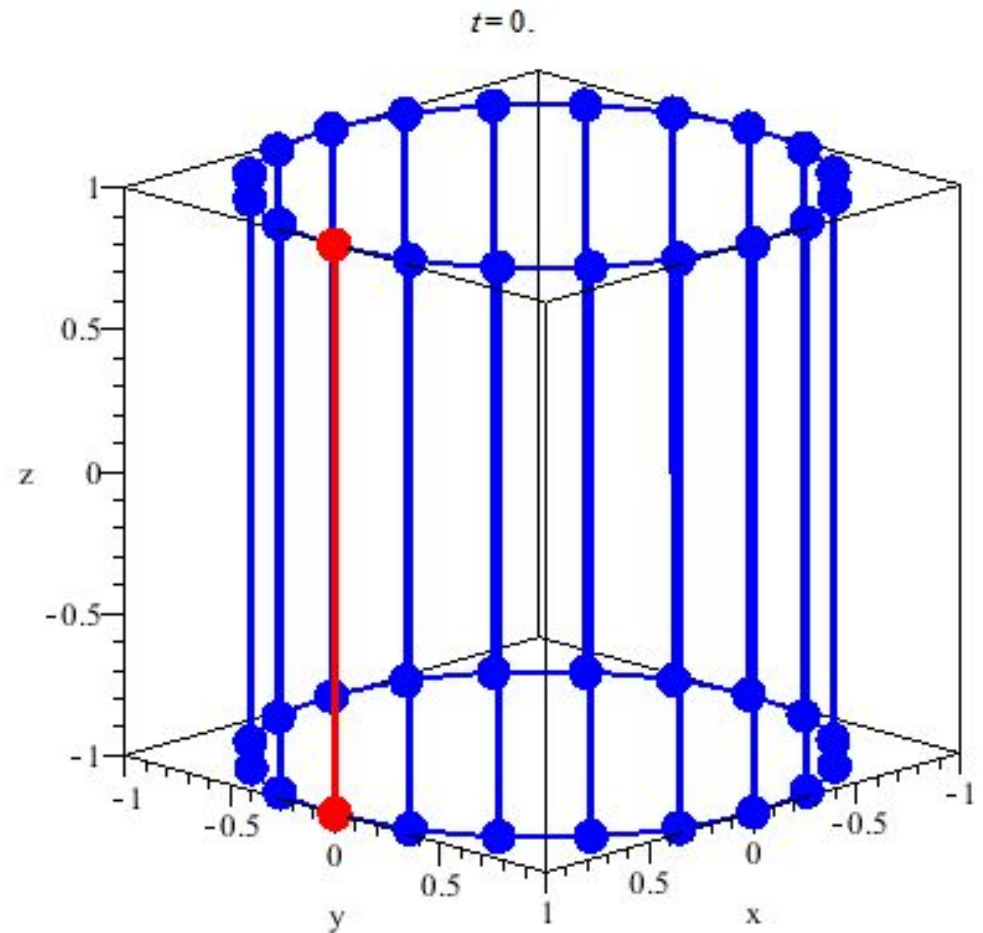


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}$$

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида



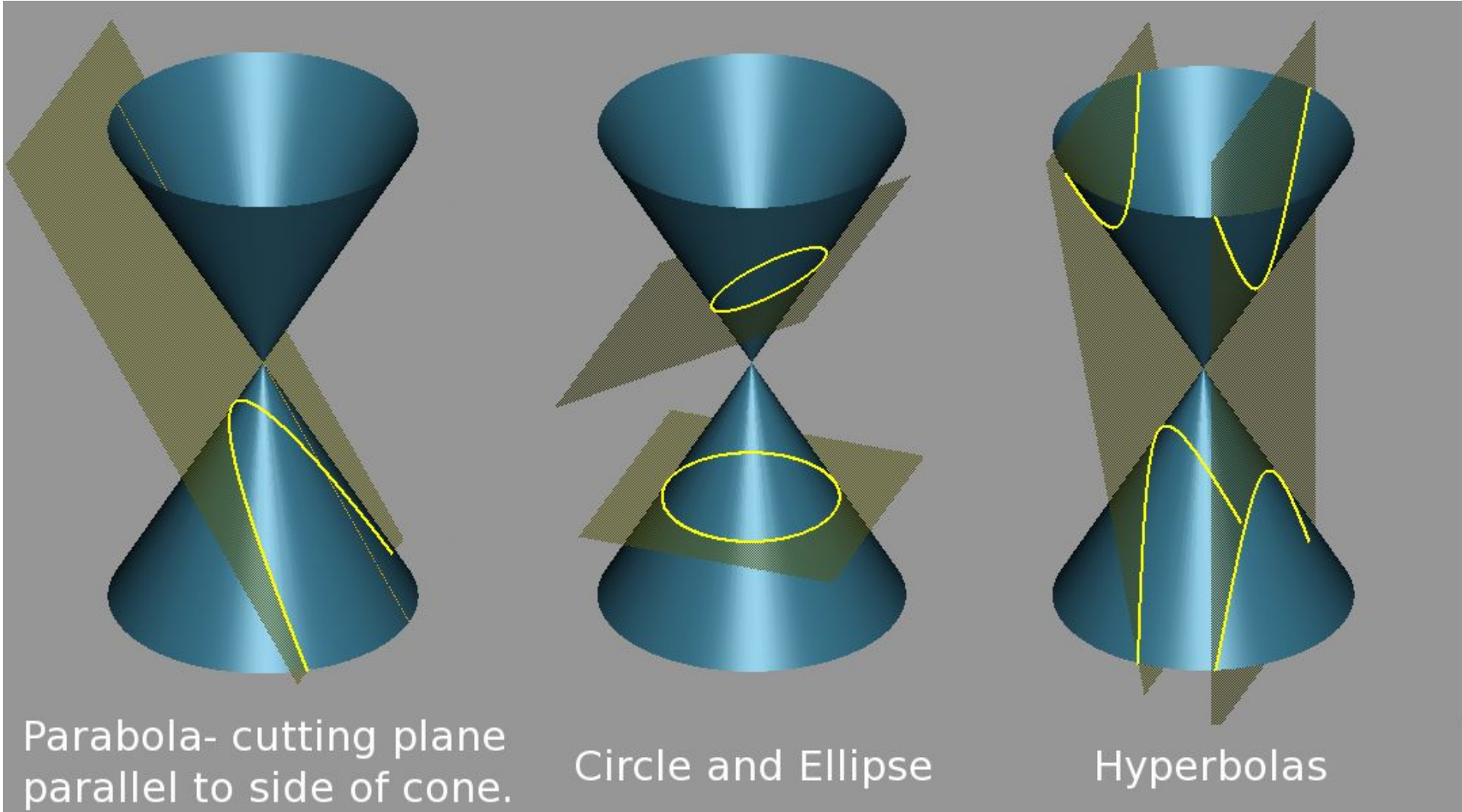
Шуховская башня на Шаболовке



Сечение кругового цилиндра - эллипс



Конические сечения



Шары Данделена

