

# Механика деформируемого твёрдого тела

<https://vk.com/mehss>

# Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н.  
Кинематика. Конспекты лекций.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика.  
Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс  
теоретической механики: в 2-х ч.  
М.: Наука, 1965.*

( см. [http://vk.com/t\\_meh](http://vk.com/t_meh) )

## § 1. Пространство и время. Материальные точки. Отмеченные точки.

**1. Пространство и время.** Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — *абсолютное пространство* и *абсолютное время*, существование которых постулируется. *Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого*; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что **абсолютное пространство** представляет собой трехмерное, однородное (*все точки пространства равноправны*) и изотропное (*все направления равноправны*) евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

**Абсолютное время** в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

*Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. За единицу измерения времени принимается секунда. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например, 1 м, 1 см и т.п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.*

## 2. Материальные точки. Отмеченные точки.

*Под **материальной точкой** понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы можно было пренебречь размерами частицы и ее вращением.*

Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку.



Если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

*Отмеченной точкой* будем называть геометрическую точку, которую каким-либо образом отметили. Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки.

Отмеченной точкой является конец отрезка длиной 1 метр, мысленно проведенного из центра некоторой прямоугольной площадки на поверхности Земли и перпендикулярного этой площадке.

*Из последнего примера следует, что отмеченная точка может не быть частицей (материальной точкой).*

Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку.



## § 2. Декартовы системы отсчета

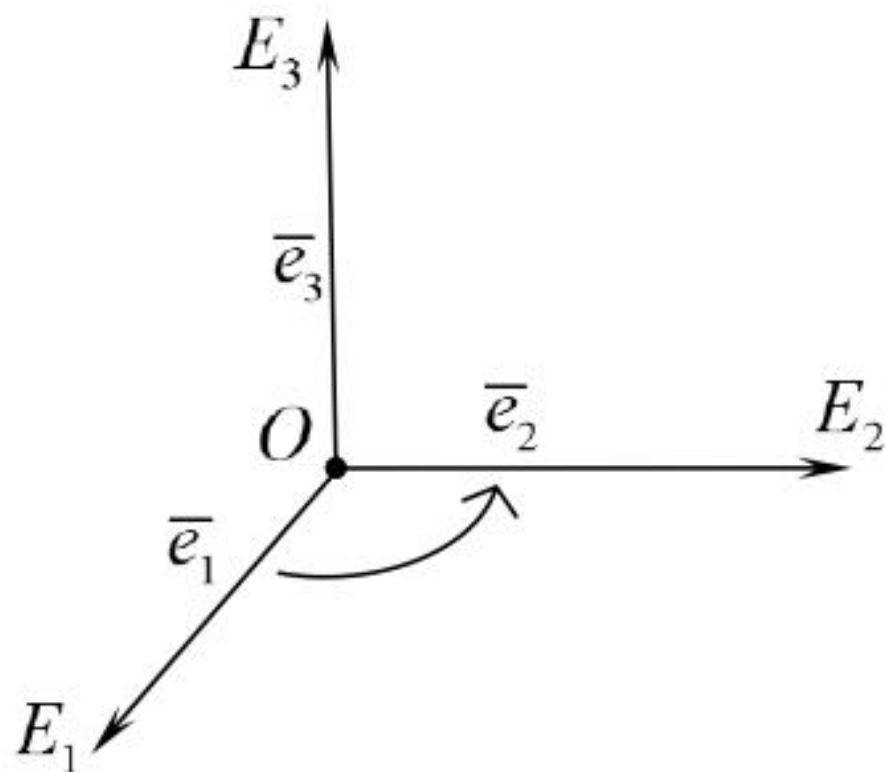
### *Декартовой системой отсчета (ДСО)*

будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  в абсолютном пространстве  $E^3$ , для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1)  $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1,$

2)  $OE_i \perp OE_j \ (i \neq j),$

3) векторы  $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}, \overline{OE_3}$  образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки.



Для векторов  $\overline{OE_1}$ ,  $\overline{OE_2}$ ,  $\overline{OE_3}$  мы будем использовать обозначения  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  (иногда  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  или  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ).

Положение отмеченной точки  $A$  по отношению к декартовой системе отсчета  $S$  в любой момент времени определяется ее *геометрическим радиус-вектором*  $\overline{OA}$ , который можно разложить по ортонормированному базису  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ :

$$\overline{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3.$$

Коэффициенты  $x, y, z$  этого разложения представляют собой *координаты* точки  $A$  в ДСО  $S$ .

## Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ называют}$$

*арифметическим радиус-вектором* точки  $A$   
(в ДСО  $S$ ),

или *координатным вектором* точки  $A$  (в  
ДСО  $S$ ),

или *координатным представлением*  
вектора  $\overline{OA}$  (в ДСО  $S$ )

( $\mathbb{R}^3$  – арифметическое пространство).

Пусть  $V^3$  – пространство геометрических (свободных) векторов. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами  $\overline{OA}$  и  $r_{OA}$ , задаваемое с помощью базиса  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , является изоморфизмом линейных евклидовых пространств  $V^3$  и  $\mathbb{R}^3$ , т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$   
соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



### § 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и отмеченную точку  $A$ , движущуюся относительно  $S$ .

$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  – арифметический радиус-вектор

точки  $A$  в ДСО  $S$ .

Пусть известны функции  $f_x(t)$ ,  $f_y(t)$ ,  $f_z(t)$ , выражающие зависимость координат точки  $A$  от времени  $t$ :

$$x = f_x(t), \quad y = f_y(t), \quad z = f_z(t). \quad (3.1)$$

Рассмотрим вектор-функцию  $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}$ .

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \quad (3.2)$$

которое называется **законом движения** точки  $A$  относительно ДСО  $S$ .

**Скорость**  $v$  и **ускорение**  $w$  точки  $A$  в момент  $t$  относительно ДСО  $S$  определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t) \left( = \frac{dr(t)}{dt} \right), \quad w := \ddot{r}(t) \left( = \frac{d^2r(t)}{dt^2} \right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{r(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$$

называется **арифметической траекторией** данной точки (относительно ДСО  $S$ )

(  $(\alpha, \beta)$  – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее *геометрической траекторией*.

**Замечание о направлении вектора скорости.**

Геометрический вектор скорости, координатное

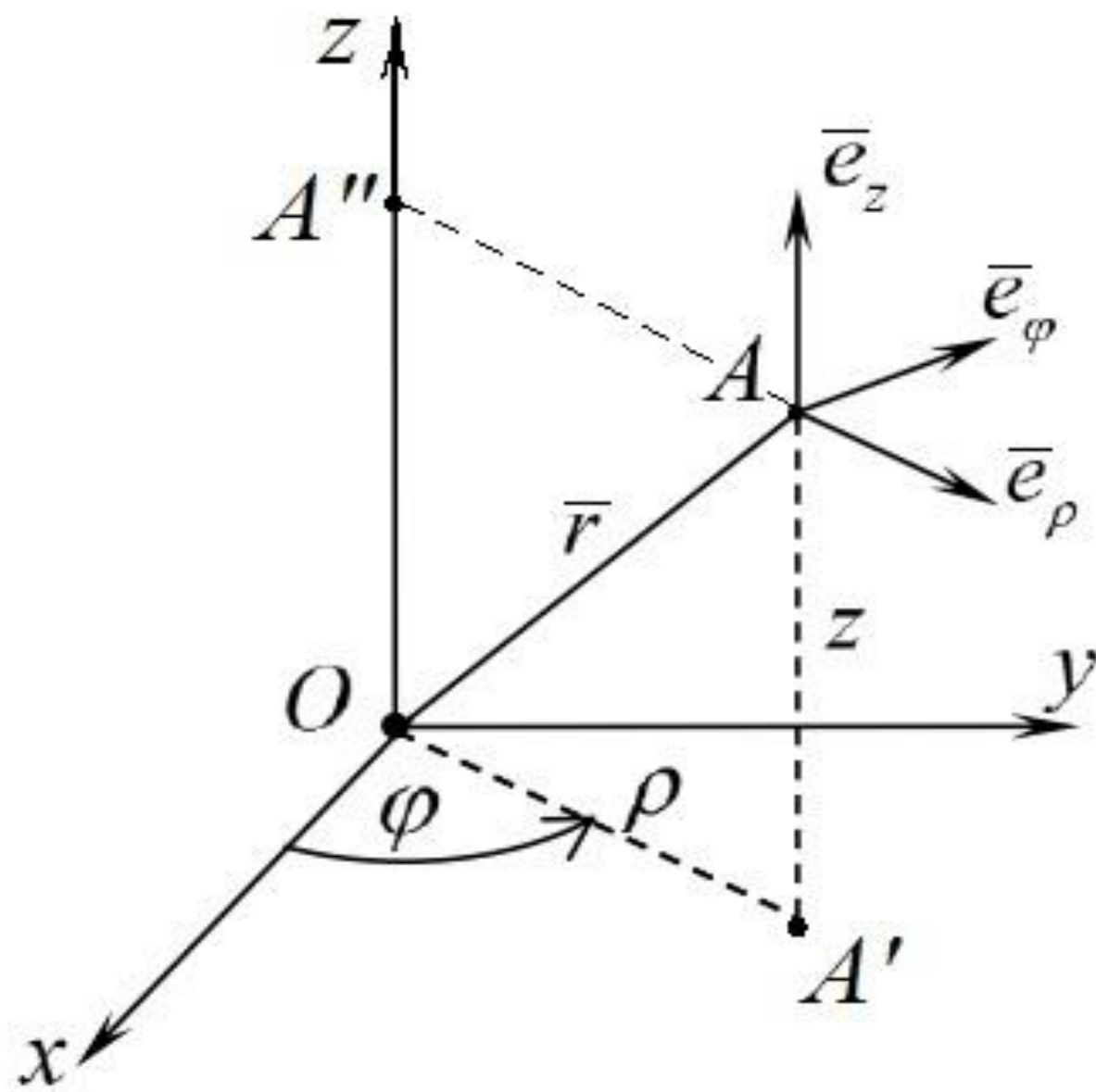
представление которого равно  $\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}_x(t) \\ \dot{f}_y(t) \\ \dot{f}_z(t) \end{pmatrix},$

является *касательным вектором* к

геометрической траектории точки.

## § 4. Цилиндрическая система координат.

Рассмотрим декартову систему отсчета  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и связанную с ней ПДСК  $Oxyz$ . Пусть  $A$  – произвольная точка в абсолютном пространстве  $E^3$ ,  $A'$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $Oxy$ ,  $A''$  – проекция точки  $A$  на ось  $Oz$ ,  $\varphi$  – направленный угол между осью  $Oz$  и вектором  $\overline{OA'}$  (см. рис.).





Тогда верно равенство  $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{OA''}$ , которое, при переходе к соответствующим арифметическим векторам, приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \quad (4.1)$$

Введем следующие обозначения :  $\rho := |OA'|$ ,

$$e_\rho := \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда  $r_{OA'} = \rho e_\rho$ ,  $r_{OA''} = ze_z$ . Следовательно, в силу (4.1),

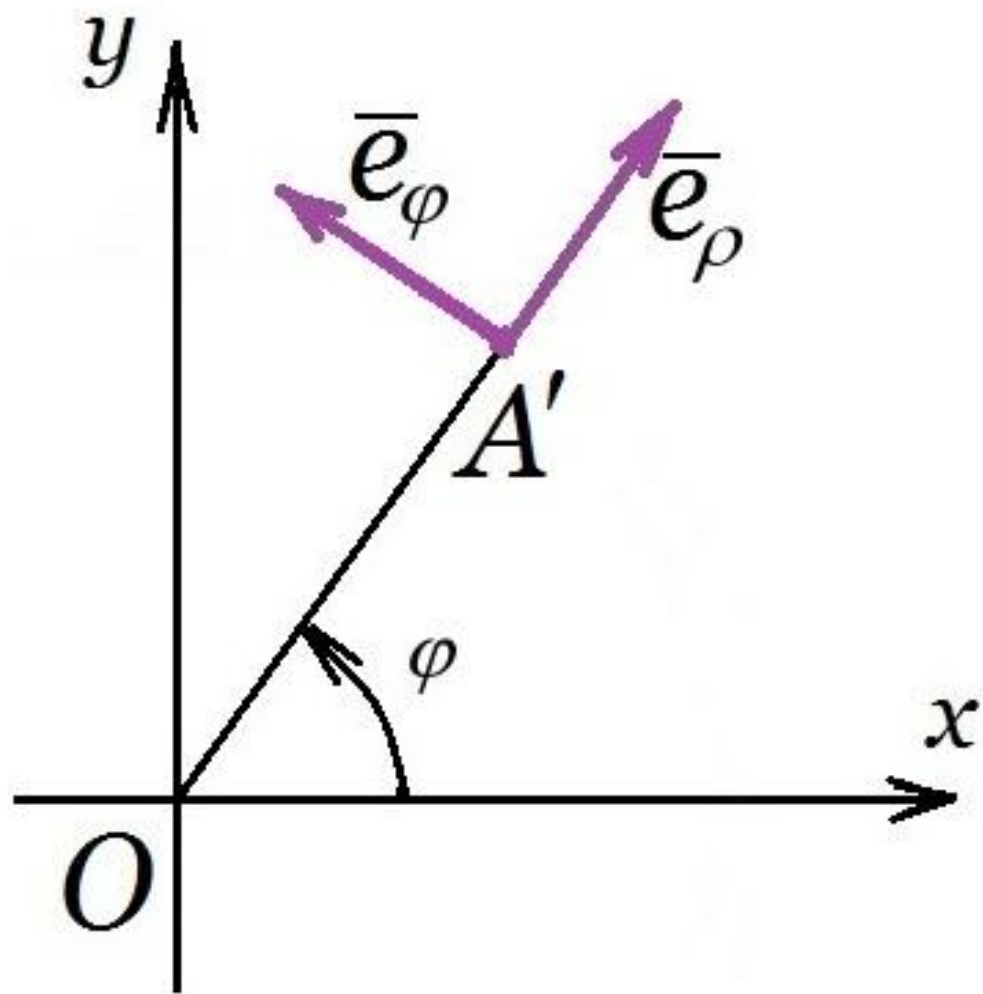
$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + ze_z. \quad (4.2)$$

*Цилиндрическими координатами* точки  $A$  по отношению к декартовой системе отсчета  $S$  называется упорядоченная тройка  $(\rho, \varphi, z)$ .

Рассмотрим еще один вектор:

$$e_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Соответствующий}$$

геометрический вектор  $\bar{e}_\varphi$  получается из  $\bar{e}_\rho$  поворотом на прямой угол против часовой стрелки.



Заметим, что построенные выше векторы  $\bar{e}_\rho$ ,  $\bar{e}_\varphi$ ,  $\bar{e}_z$  образуют правый ортонормированный базис (в пространстве геометрических (свободных) векторов  $V^3$ ). В силу зависимости векторов  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{e}_\varphi$  от угла  $\varphi$ , этот базис является подвижным.

Арифметические векторы  $e_\rho$ ,  $e_\varphi$ ,  $e_z$  образуют правый ортонормированный базис в арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Пусть движение точки  $A$  задано в цилиндрической системе координат :

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \quad (4.3)$$

Заметим, что при дифференцировании по переменной  $t$  имеют место следующие соотношения :

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho. \quad (4.4)$$



Выразим скорость и ускорение точки через цилиндрические координаты  $\rho, \varphi, z$  и векторы  $e_\rho, e_\varphi, e_z$ :

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt} (\rho e_\rho + z e_z) = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z, \quad (4.5)$$

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) e_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) e_\varphi + \ddot{z} e_z. \quad (4.6)$$

Поскольку векторы  $e_\rho, e_\varphi, e_z$  образуют правый ортонормированный базис, квадраты длин векторов  $v$  и  $w$  можно вычислить как суммы квадратов коэффициентов в разложениях (4.5), (4.6).

## § 5. Неизменяемая система, твердое тело, твердая среда

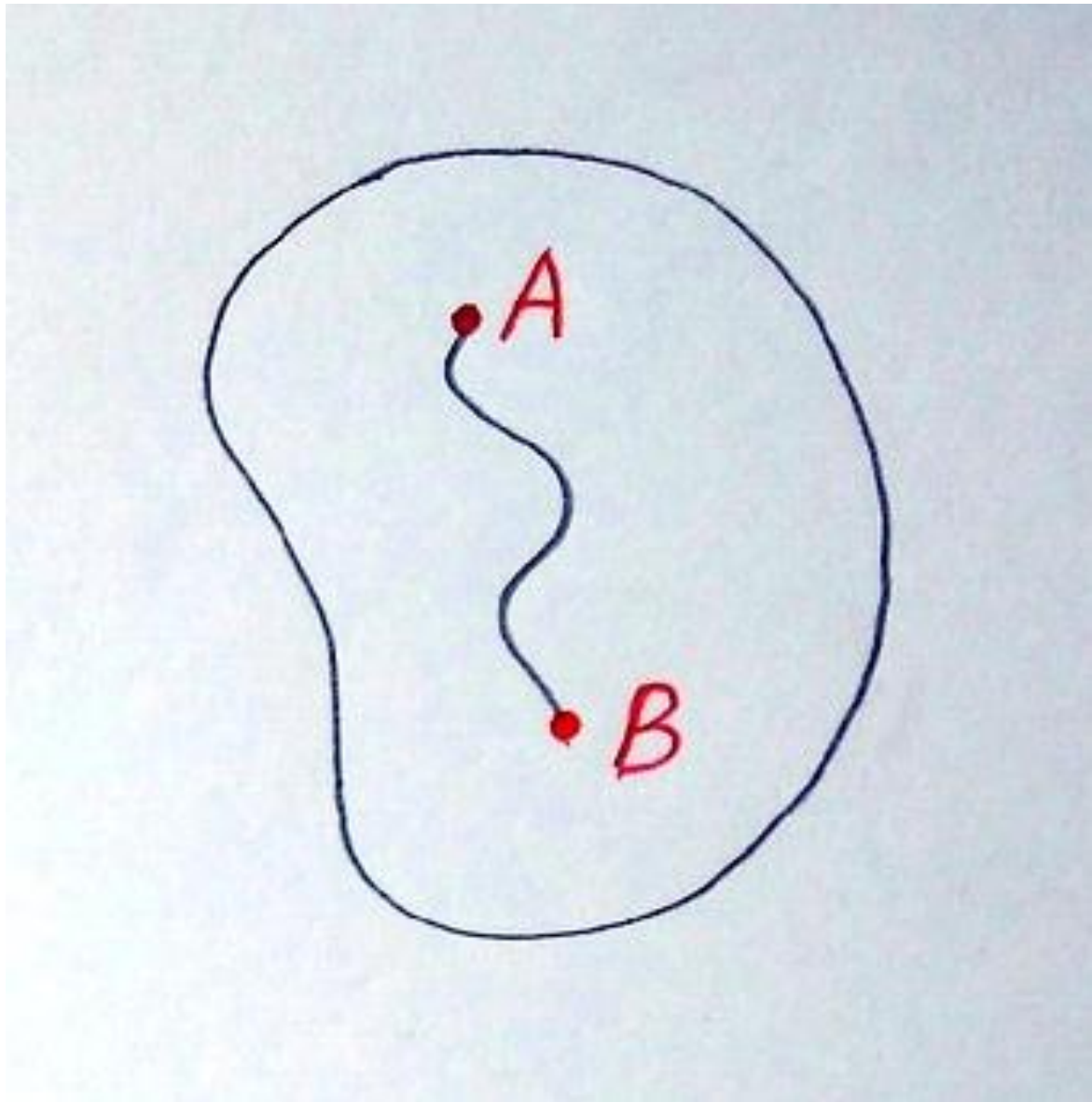
Рассмотрим некоторое множество  $\{A_\alpha\}$  отмеченных точек, которое будем называть «системой».

**Определение 1.** Система  $\{A_\alpha\}$  отмеченных точек называется *неизменяемой*, если расстояния между точками этой системы не меняются со временем.

**Примеры:** ДСО  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ ; какая-либо система точек  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ , координаты которых не изменяются со временем.

**Определение 2.** *Твердым телом* называется ограниченная неизменяемая система отмеченных точек.

**Замечание.** Иногда в определение твердого тела добавляют условие *линейной связности* : для любой пары точек из твердого тела существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в теле. В этом случае твердое тело рассматривается как континуальное множество, как «сплошная среда».



**Примеры.** Конечная система точек  $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ , координаты которых не изменяются со временем, – пример «дискретного» твердого тела (не выполняется условие линейной связности).

Шар радиуса  $R$  с центром в начале координат – пример «сплошного» твердого тела (выполняется условие линейной связности).

**Определение 3.** *Твердой средой* называется неизменяемая система отмеченных точек, которая в каждый момент времени заполняет собой все пространство  $E^3$ .



**Пример.** Рассмотрим две декартовы системы отсчета:

«неподвижную»  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$  и «подвижную»

$S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ . Пусть  $\Sigma$  – множество отмеченных

точек, неподвижных относительно  $S'$ :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow r'_{O'M} = \text{const},$$

где  $r'_{O'M} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  – координатный вектор точки  $M$  в  $S'$ .

Система точек  $\Sigma$  является неизменяемой и в каждый момент времени заполняет собой все пространство  $E^3$ .

Следовательно,  $\Sigma$  – твердая среда. В этом случае говорят, что *твердая среда  $\Sigma$  неподвижна относительно*

*ДСО  $S'$ , а система  $S'$  жестко связана со средой  $\Sigma$ .*

## § 6. Векторное произведение двух векторов

**1. Векторное произведение двух геометрических векторов.** Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – два неколлинеарных вектора. *Векторным произведением* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  (обозначение:  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ), удовлетворяющий следующим двум условиям:

1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ , где  $(\vec{a}, \vec{b})$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,

2)  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ,

3) тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – правая.

Если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – коллинеарные векторы, то, по определению, их векторное произведение равно нулевому вектору.

Рассмотрим координатные представления векторов  $\vec{a}$ ,

$\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в ДСО  $S$ :  $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ,  $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ . Тогда

верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



## 2. Векторное произведение двух арифметических

**векторов.** Рассмотрим два арифметических вектора

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad \text{Их векторное произведение } h$$

определяется следующим равенством :

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}, \quad \text{где} \quad i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение:  $h = p \times q$ .

Нетрудно убедиться, что из равенства  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  следует аналогичное равенство для координатных представлений этих векторов:

$$r_c = r_a \times r_b.$$

## § 7. Смешанное произведение трех векторов

**1. Смешанное произведение трех геометрических векторов.** Пусть  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  – три геометрических вектора. *Смешанным произведением* векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle,$$

где символом  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначается скалярное произведение.

Рассмотрим координатные представления векторов

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ в ДСО } S: \quad r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

## 2. Смешанное произведение трех арифметических

**векторов.** Для трех арифметических векторов

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{их смешанное}$$

произведение определяется аналогично :

$$(h, p, q) = \langle h \times p, q \rangle.$$

**Свойство** смешанного произведения :

$$(h, p, q) = (p, q, h) = (q, h, p) \quad \forall h, p, q \in \mathbb{R}^3.$$

## **§ 8. Силы, действующие на точки материальной системы.**

Рассмотрим систему матер. точек  $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$ .

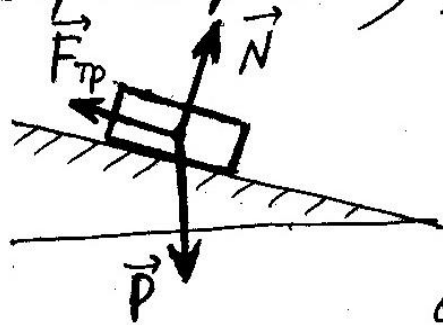
На точки  $\Sigma_A$  действуют силы двух видов:

внешние и внутренние.

Внутренние силы — силы, с которыми точки  $\Sigma_A$  действуют друг на друга (силы взаимодействия между точками системы  $\Sigma_A$ ).

Внешние силы — силы, с которыми действуют на точки  $\Sigma_A$  посторонние точки (не входящие в  $\Sigma_A$ ).

Примеры. 1) Кирпич, лежащий на наклонной шероховатой плоскости.



Кирпич = система матер. точек (молекул).

Внутренние силы системы "кирпич" — силы взаимодействия между молекулами кирпича.

Внешние силы — сила тяжести  $\vec{P}$  (действует со стороны земли), сила реакции опоры  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$ .

## 2) Система "Земля + Луна"

Внутренние силы системы — силы притяжения между этими небесными телами и силы взаимодействия между молекулами, образующими эти тела.

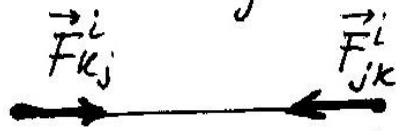
Силы притяжения со стороны Солнца и др. планет являются внешними.



Th Сумма всех внутренних сил системы матер. точек равна нулю.

Доказ.

Пусть  $\vec{F}_{kj}^i$  — сила, с которой т.  $A_j$  действует на т.  $A_k$ ;



В силу III закона Ньютона:  $\vec{F}_{jk}^i = -\vec{F}_{kj}^i$ .

Тогда  $\sum_{1 \leq k, j \leq n} \vec{F}_{kj}^i = (\vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i) + (\vec{F}_{13}^i + \vec{F}_{31}^i) + \dots + (\vec{F}_{1n}^i + \vec{F}_{n1}^i) + \dots = \vec{0}$ . ■



Замечание Из внутренних сил системы можно составить  
косесимметричную векторную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{F}_{12}^i & \vec{F}_{13}^i & \dots & \vec{F}_{1n}^i \\ \vec{F}_{21}^i & \vec{0} & \vec{F}_{23}^i & \dots & \vec{F}_{2n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{F}_{n1}^i & \vec{F}_{n2}^i & \vec{F}_{n3}^i & \dots & \vec{0} \end{pmatrix}$$

(здесь мы полагаем:  $\vec{F}_{kk}^i = \vec{0}$ ).

## **§ 9. Импульс системы материальных точек.**

Пусть  $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$  — система мат. точек,  
 $S = \{O, E_1, E_2, E_3\}$  — трехмерная ДСО,  
 $m_k$  — масса  $A_k$ ,  $r_k = r_{OA_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$  — арифметический  
 радиус-вектор г.  $A_k$ .

Тогда  $v = \dot{r}_k = \begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{pmatrix}$  — скорость г.  $A_k$ ,

а вектор  $p_k = m_k v_k$  называется импульсом г.  $A_k$ .

Вектор  $p = \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n m_k v_k$  называется импульсом  
системы  $\Sigma_A$ .

Рассмотрим скорость изменения импульса  $\dot{p}(t)$ :

$$\dot{p}(t) = \sum_{k=1}^n m_k \dot{v}_k(t) = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{z}_k(t) \quad \text{①}$$

По II закону Ньютона  $m_k \ddot{z}_k$  есть сумма всех сил, действ-х на  $\tau$ ,  $A_k$ , т.е.  $m_k \ddot{z}_k = \sum_{j=1}^n F_{kj}^i + F_k^e$ , где  $F_k^e$  — сумма всех внешних сил, действ-х на  $A_k$ .

$\underbrace{\sum_{j=1}^n F_{kj}^i}_{\text{сумма всех внутр-х сил, д-х на } A_k}$

$$\text{①} \quad \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n F_{kj}^i \right) + \sum_{k=1}^n F_k^e = \sum_{k=1}^n F_k^e \quad \text{— сумма всех внешних сил системы.}$$

$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n F_{kj}^i \right)}_{\substack{\text{сумма всех} \\ \text{внутр. сил} \\ \text{системы } \Sigma A}} \vec{0}$  (см. §6)

Итак, мы доказали следующую теорему.

III Скорость изменения импульса системы матер. точек равна сумме всех внешних сил, д-х на точки данной системы.

Следствие. Если сумма всех внешних моментов маг. поля равна нулю, то циркуля данной системы сохраняет постоянное значение.

(это следствие называется законом сохранения циркуля маг. поля).