Механика деформируемого твердого тела

https://vk.com/mehss

Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н. Кинематика. Конспекты лекций.*
2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика. Москва: ЧеРо, 1999.*
3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2–х ч. М.: Наука, 1965.*

(см. http://vk.com/t_meh)

§ 1. Пространство и время. Материальные точки. Отмеченные точки.

1. Пространство и время. Механическое движение происходит в пространстве и времени. В теоретической механике в качестве моделей реальных пространства и времени принимаются их простейшие модели — ***абсолютное пространство*** и ***абсолютное время***, существование которых постулируется. *Абсолютные пространство и время считаются независимыми одно от другого*; в этом состоит основное отличие классической модели пространства и времени от их модели в теории относительности, где пространство и время взаимосвязаны.

Предполагается, что **абсолютное пространство** представляет собой трехмерное, однородное *(все точки пространства равноправны)* и изотропное (*все направления равноправны)* евклидово пространство. Наблюдения показывают, что для небольших по размерам областей реального физического пространства евклидова геометрия справедлива.

Абсолютное время в теоретической механике считается непрерывно изменяющейся величиной, оно течет от прошлого к будущему. Время однородно, одинаково во всех точках пространства и не зависит от движения материи.

Движение в его геометрическом представлении имеет относительный характер: одно тело движется относительно другого, если расстояния между всеми или некоторыми точками этих тел изменяются. За единицу измерения времени принимается секунда. В кинематике надо еще выбрать единицу длины, например, 1 м, 1 см и т.п. Тогда основные кинематические характеристики движения: положение, скорость, ускорение, о которых будет идти речь дальше, определяются при помощи единиц длины и времени.

2. Материальные точки. Отмеченные точки. *Под* ***материальной точкой*** *понимается частица материи, достаточно малая для того, чтобы можно было пренебречь размерами частицы и ее вращением.*

Можно или нельзя принять материальный объект за материальную точку, зависит от конкретной задачи. Например, при определении положения спутника Земли в космическом пространстве очень часто целесообразно принимать его за материальную точку.

Если же рассматриваются задачи, связанные с ориентацией антенн, солнечных батарей, оптических приборов, установленных на спутнике, то его нельзя считать материальной точкой, так как в вопросах ориентации нельзя пренебрегать вращением спутника и его следует рассматривать как объект, имеющий конечные, хотя и малые по сравнению с расстоянием до Земли, размеры.

Отмеченной точкой *будем называть геометрическую точку, которую каким-либо образом отметили.* Например, вершина Эйфелевой башни и центр диска Луны – отмеченные точки.

Отмеченной точкой является конец отрезка длиной 1 метр, мысленно проведенного из центра некоторой прямоугольной площадки на поверхности Земли и перпендикулярного этой площадке.

Из последнего примера следует, *что отмеченная точка может не быть частицей (материальной точкой).*

Вообще, задание любого закона, определяющего изменение во времени координат точки относительно какой-нибудь системы отсчета, определяет отмеченную точку.

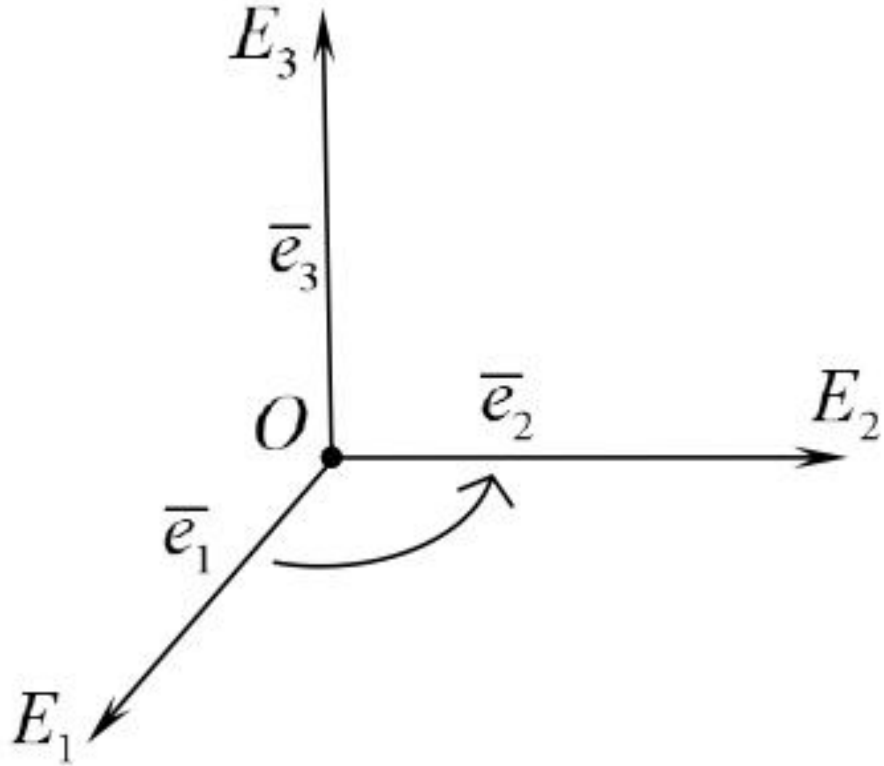
§ 2. Декартовы системы отсчета

Декартовой системой отсчета (ДСО) будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ в абсолютном пространстве E^3, для которой в любой момент времени выполнены три условия:

1) $|OE_1|=|OE_2|=|OE_3|=1$,

2) $OE_i \perp OE_j \ \ (i \neq j)$,

3) векторы $\overline{OE}_1$, $\overline{OE}_2$, $\overline{OE}_3$ образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки.



Для векторов $\overline{OE}_1, \overline{OE}_2, \overline{OE}_3$ мы будем использовать обозначения $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (иногда $\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z$ или $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$).

Положение отмеченной точки A по отношению к декартовой системе отсчета S в любой момент времени определяется ее *геометрическим радиус-вектором* $\overline{OA}$, который можно разложить по ортонормированному базису $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$:

$$\overline{OA} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3 .$$

Коэффициенты x, y, z этого разложения представляют собой *координаты* точки A в ДСО S.

Арифметический трехмерный вектор

$r_{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ называют

арифметическим радиус-вектором точки A (в ДСО S),

или *координатным вектором* точки A (в ДСО S),

или *координатным представлением* вектора $\overline{OA}$ (в ДСО S)

($\mathbb{R}^3$ – арифметическое пространство).

Пусть V^3 – пространство геометрических (свободных) векторов. Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами $\overline{OA}$ и r_{OA}, задаваемое с помощью базиса $\overline{e}=(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$, является изоморфизмом линейных евклидовых пространств V^3 и $\mathbb{R}^3$, т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Закон движения, скорость, ускорение, траектория

Рассмотрим ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и отмеченную точку A, движущуюся относительно S.

$$r_{OA}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ – арифметический радиус-вектор точки A в ДСО S.

Пусть известны функции $f_x(t),\ f_y(t),\ f_z(t),$ выражающие зависимость координат точки A от времени t:

$$x = f_x(t),\quad y = f_y(t),\quad z = f_z(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}$.

Система уравнений (3.1) равносильна уравнению

$$r_{OA} = r(t), \tag{3.2}$$

которое называется ***законом движения*** *точки A относительно ДСО S*.

Скорость v и ***ускорение*** w точки A в момент t относительно ДСО S определяются равенствами:

$$v := \dot{r}(t)\ \left(= \frac{dr(t)}{dt} \right),\ w := \ddot{r}(t)\ \left(= \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \right).$$

Множество

$$\mathcal{T} = \{ r(t) : t \in (\alpha,\ \beta) \}$$

называется ***арифметической траекторией*** данной точки (относительно ДСО S)

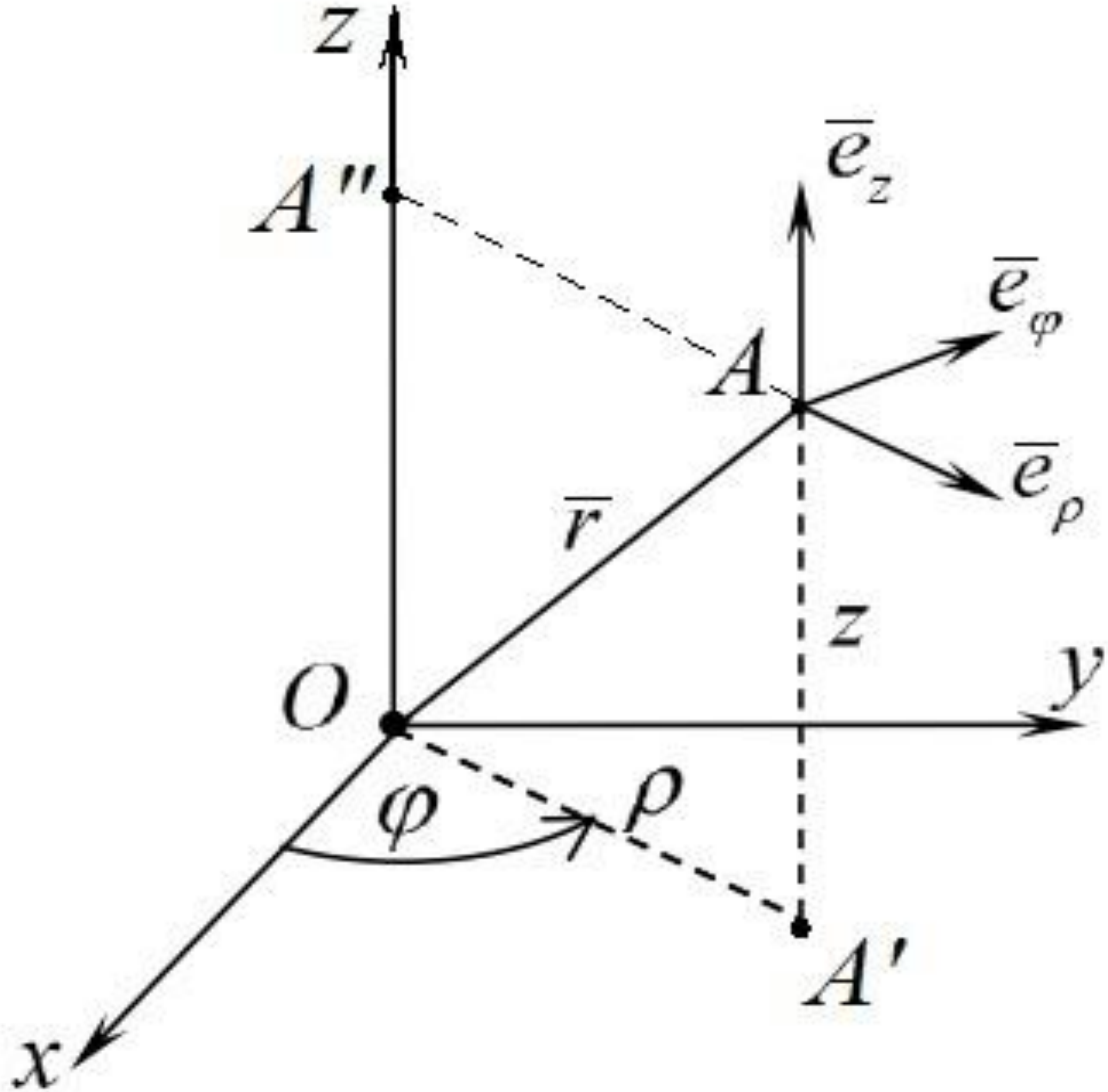
($(\alpha,\ \beta)$ – некоторый промежуток времени).

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки называется ее ***геометрической траекторией***.

Замечание о направлении вектора скорости. Геометрический вектор скорости, координатное представление которого равно $\dot{r}(t)=\begin{pmatrix}\dot{f}_x(t)\\ \dot{f}_y(t)\\ \dot{f}_z(t)\end{pmatrix}$, является *касательным вектором* к геометрической траектории точки.

§ 4. Цилиндрическая система координат.

Рассмотрим декартову систему отсчета $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и связанную с ней ПДСК $Oxyz$. Пусть A – произвольная точка в абсолютном пространстве E^3, A' – проекция точки A на плоскость Oxy, A'' – проекция точки A на ось Oz, φ – направленный угол между осью Oz и вектором $\overline{OA'}$ (см. рис.).



z
$\bar{e}_z$
A''
$\bar{e}_\varphi$
A
$\bar{e}_\rho$
$\bar{r}$
z
y
O
φ
ρ
A'
x

Тогда верно равенство $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим арифметическим векторам, приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''}. \tag{4.1}$$

Введем следующие обозначения : $\rho := |OA'|$,

$$e_\rho := \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (4.1),

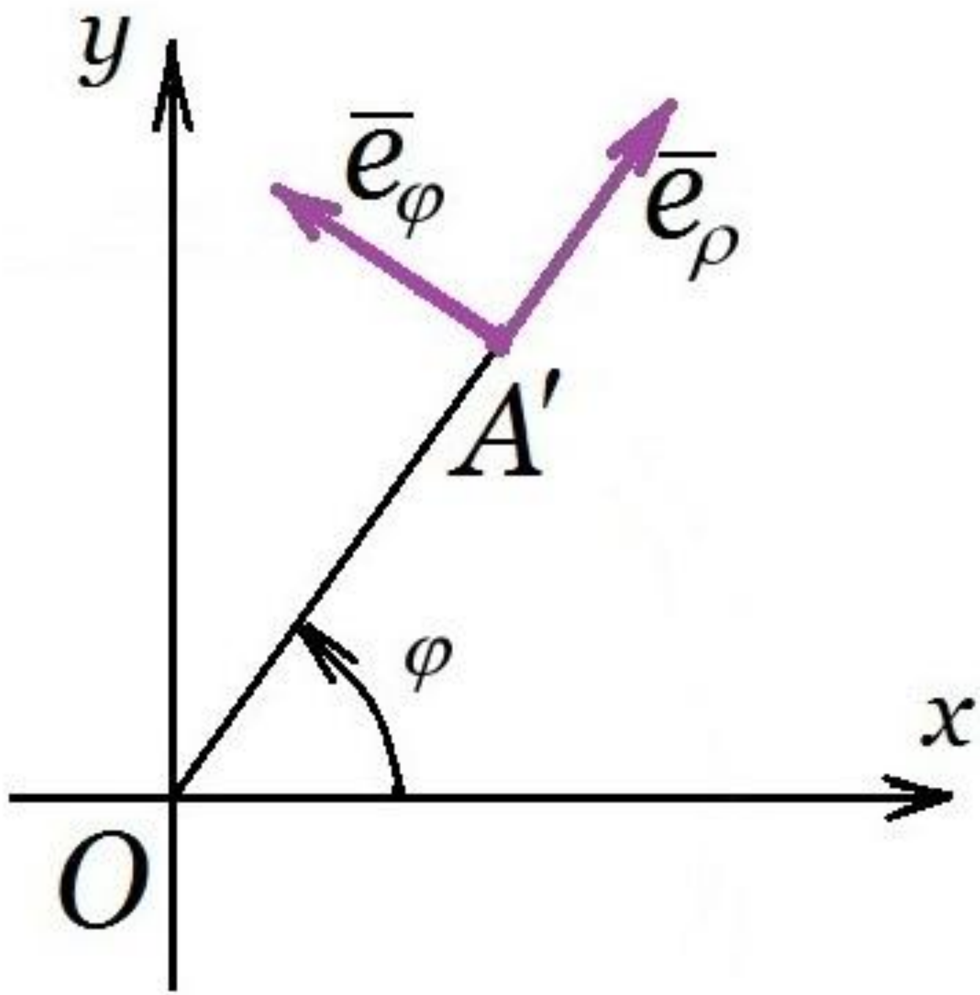
$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \tag{4.2}$$

Цилиндрическими координатами точки A по отношению к декартовой системе отсчета S называется упорядоченная тройка (ρ, φ, z).

Рассмотрим еще один вектор:

$$e_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий геометрический вектор $\bar{e}_\varphi$ получается из $\bar{e}_\rho$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки.



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A'
φ
x
O

Заметим, что построенные выше *векторы* $\bar{e}_\rho$, $\bar{e}_\varphi$, $\bar{e}_z$ *образуют правый ортонормированный базис* (в пространстве геометрических (свободных) векторов V^3). В силу зависимости векторов $\bar{e}_\rho$ и $\bar{e}_\varphi$ от угла φ, этот базис является *подвижным*.

Арифметические векторы e_ρ, e_φ, e_z образуют правый ортонормированный базис в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть движение точки A задано в цилиндрической системе координат:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \tag{4.3}$$

Заметим, что при дифференцировании по переменной t имеют место следующие соотношения:

$$\dot{e}_\rho = \dot{\varphi} e_\varphi, \quad \dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi} e_\rho. \tag{4.4}$$

Выразим скорость и ускорение точки через цилиндрические координаты ρ, φ, z и векторы $e_\rho,\ e_\varphi,\ e_z$:

$$v = \dot{r} = \frac{d}{dt}(\rho e_\rho + z e_z) = \dot{\rho} e_\rho + \rho \dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z} e_z, \quad (4.5)$$

$$w = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) e_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) e_\varphi + \ddot{z} e_z. \quad (4.6)$$

Поскольку векторы $e_\rho,\ e_\varphi,\ e_z$ образуют правый ортонормированный базис, квадраты длин векторов v и w можно вычислить как суммы квадратов коэффициентов в разложениях (4.5), (4.6).

§ 5. Неизменяемая система, твердое тело, твердая среда

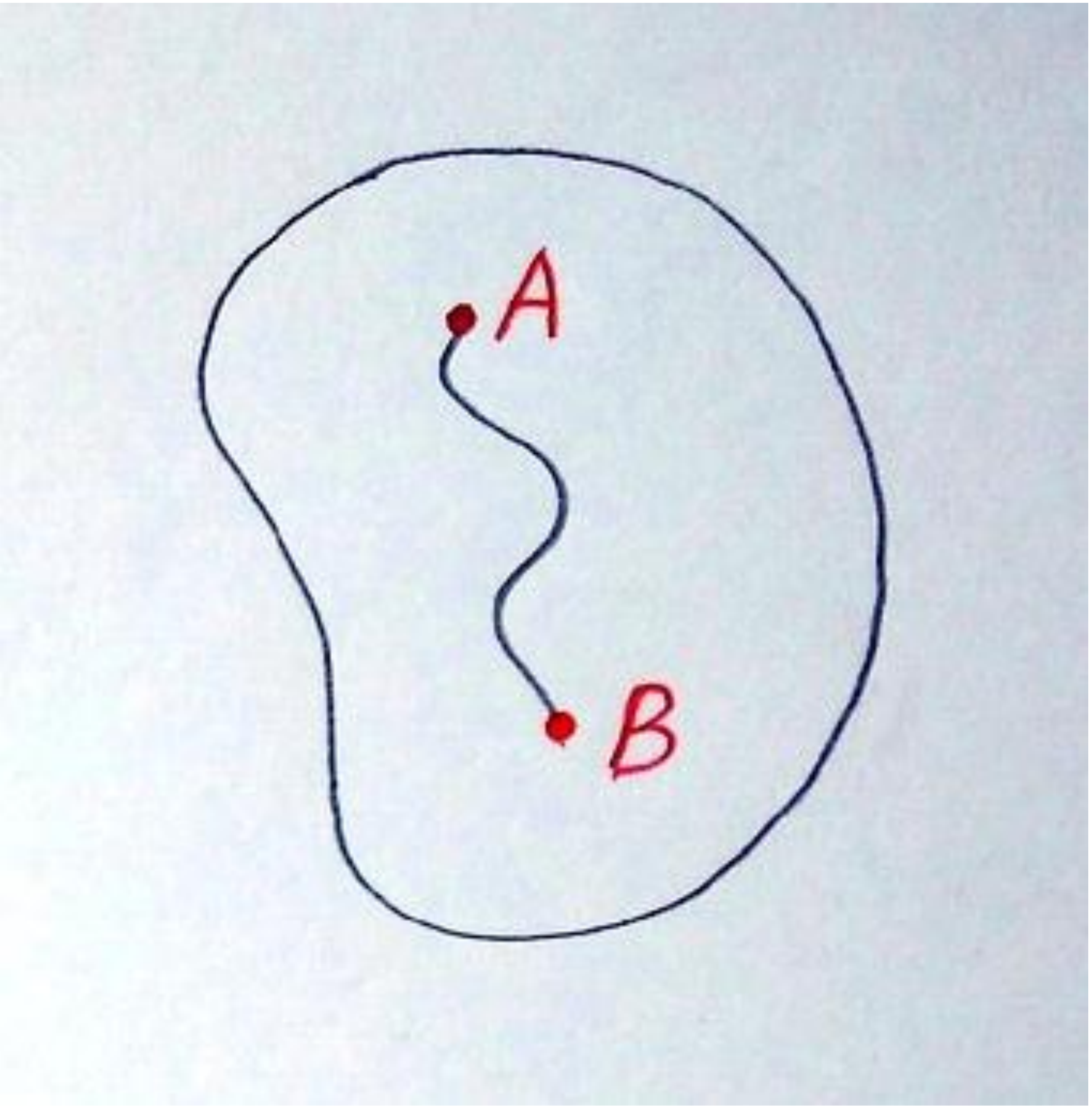
Рассмотрим некоторое множество $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек, которое будем называть «системой».

Определение 1. Система $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек называется ***неизменяемой***, если расстояния между точками этой системы не меняются со временем.

Примеры : ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$; какая-либо система точек $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем.

Определение 2. ***Твердым телом*** называется ограниченная неизменяемая система отмеченных точек.

Замечание. Иногда в определение твердого тела добавляют условие ***линейной связности*** : для любой пары точек из твердого тела существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в теле. В этом случае твердое тело рассматривается как континуальное множество, как «сплошная среда».


A
B

Примеры. Конечная система точек $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем, – пример «дискретного» твердого тела (не выполняется условие линейной связности).

Шар радиуса R с центром в начале координат – пример «сплошного» твердого тела (выполняется условие линейной связности).

Определение 3. ***Твердой средой*** называется неизменяемая система отмеченных точек, которая в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3.

Пример. Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и «подвижную» $S'=(O',E_1',E_2',E_3')$. Пусть Σ – множество отмеченных точек, неподвижных относительно S':

$$M\in\Sigma \Leftrightarrow r'_{O'M}=const,$$

где $r'_{O'M}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S'.

Система точек Σ является неизменяемой и в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3. Следовательно, Σ – твердая среда. В этом случае говорят, что *твердая среда* Σ *неподвижна относительно ДСО* S', а *система* S' *жестко связана со средой* Σ.

§ 6. Векторное произведение двух векторов

1. Векторное произведение двух геометрических векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарных вектора. ***Векторным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (обозначение: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$, где $(\vec{a},\vec{b})$ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$,

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы, то, по определению, их векторное произведение равно нулевому вектору.

Рассмотрим координатные представления векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в ДСО S: $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Тогда

верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Векторное произведение двух арифметических векторов. Рассмотрим два арифметических вектора $p=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ и $q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Их векторное произведение h определяется следующим равенством :

$$h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; j=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; k=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение: $h = p \times q$.

Нетрудно убедиться, что из равенства $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ следует аналогичное равенство для координатных представлений этих векторов:

$$r_c = r_a \times r_b.$$

§ 7. Смешанное произведение трех векторов

1. Смешанное произведение трех геометрических векторов. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – три геометрических вектора. ***Смешанным произведением*** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = < \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} >,$$

где символом $< \cdot , \cdot >$ обозначается скалярное произведение.

Рассмотрим координатные представления векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в ДСО S: $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Тогда верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии):

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Смешанное произведение трех арифметических векторов. Для трех арифметических векторов

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

их смешанное произведение определяется аналогично :

$$(h, p, q) = < h \times p, q >.$$

Свойство смешанного произведения :

$$(h, p, q) = (p, q, h) = (q, h, p) \quad \forall h, p, q \in \mathbb{R}^3.$$

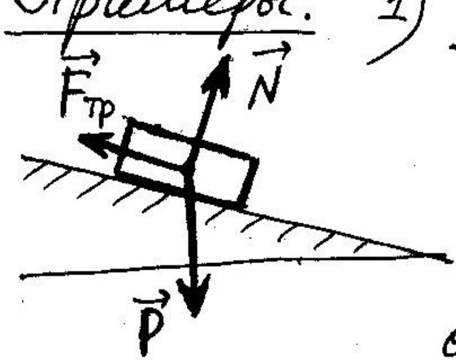
§ 8. Силы, действующие на точки материальной системы.

Рассмотрим систему матер. точек $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$.
На точки Σ_A действуют силы двух видов:
внешние и внутренние.

<u>Внутренние силы</u> — силы, с которыми точки Σ_A действуют друг на друга (силы взаимодействия между точками системы Σ_A).

<u>Внешние силы</u> — силы, с которыми действуют на точки Σ_A посторонние точки (не входящие в Σ_A).

<u>Примеры.</u> 1) <u>Кирпич</u>, лежащий на наклонной шероховатой плоскости.



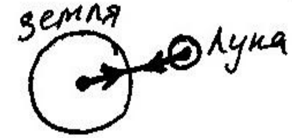
Кирпич = система мат. точек (молекул).

Внутренние силы системы "кирпич" — силы взаимодействия м/у молекулами кирпича.

Внешние силы — сила тяжести $\vec{P}$ (действует со стороны земли), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

2) Система "Земля + Луна".

Внутренние силы системы — силы притяжения между этими небесными телами и силы взаимодействия м/у молекулами, образующими эти тела.

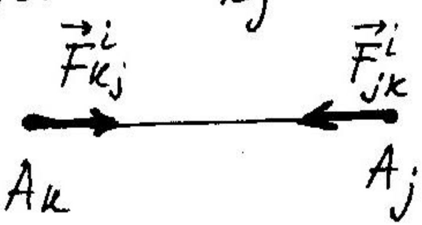


Силы притяжения со стороны Солнца и др. планет являются внешними.

Th Сумма всех внутренних сил системы матер. точек равна нулю.

Док-во.

Пусть $\vec{F}^{\,i}_{kj}$ — сила, с которой т. A_j действует на т. A_k;



В силу III закона Ньютона: $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$.

Тогда
$$\sum_{1 \le k,j \le n} \vec{F}^{\,i}_{kj} = \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{12} + \vec{F}^{\,i}_{21}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{13} + \vec{F}^{\,i}_{31}\right)}_{\vec{0}} + \ldots + \underbrace{\left(\vec{F}^{\,i}_{1n} + \vec{F}^{\,i}_{n1}\right)}_{\vec{0}} + \ldots = \vec{0}.$$ ■

Замечание. Из внутренних сил системы можно составить кососимметрическую векторную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{F}^{\,i}_{12} & \vec{F}^{\,i}_{13} & \ldots & \vec{F}^{\,i}_{1n} \\ \vec{F}^{\,i}_{21} & \vec{0} & \vec{F}^{\,i}_{23} & \ldots & \vec{F}^{\,i}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{F}^{\,i}_{n1} & \vec{F}^{\,i}_{n2} & \vec{F}^{\,i}_{n3} & \ldots & \vec{0} \end{pmatrix} \quad \left(\text{здесь мы полагаем: } \vec{F}^{\,i}_{kk} = \vec{0}\right).$$

§ 9. Импульс системы материальных точек.

Пусть $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$ — система мат. точек,

$S = \{O, E_1, E_2, E_3\}$ — инерциальная ДСО,

m_k — масса A_k, $r_k = \overline{r_{OA_k}} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ — арифметический радиус-вектор т. A_k.

Тогда $v = \dot{r}_k = \begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{pmatrix}$ — скорость т. A_k,

а вектор $\underline{p_k = m_k v_k}$ назыв-ся <u>импульсом т. A_k</u>.

Вектор $\underline{p = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k}$ называется <u>импульсом системы Σ_A</u>.

Рассмотрим скорость изменения импульса $p(t)$:

$$\dot{p}(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{v}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{r}_k(t) \ominus$$

По II закону Ньютона $m_k \ddot{r}_k$ есть сумма всех сил, действ-х на т. A_k, т.е. $m_k \ddot{r}_k = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}}_{\text{сумма всех внутр-х сил, д-х на } A_k} + F_k^e$, где F_k^e — сумма всех внешних сил, действ-х на A_k.

$$\ominus \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} F_{kj}^{i}\right)}_{\substack{\text{сумма всех внутр. сил} \\ \text{системы } \Sigma_A \\ = \vec{0}}} + \sum_{k=1}^{n} F_k^e = \sum_{k=1}^{n} F_k^e$$ — сумма всех внешних сил системы.

(см. §6)

Итак, мы доказали следующую теорему.

Th Скорость изменения импульса системы мат. точек равна сумме всех внешних сил, д-х на точки данной системы.

Следствие. Если сумма всех внешних системы мат. точек равна нулю, то импульс данной системы сохраняет постоянное значение.

(это следствие называется законом сохранения импульса системы мат. точек).