Теория Вероятностей

Глава 2 «Случайные Величины»

Важнейшие законы распределения дискретных случайных величин

Равномерное распределение на конечном множестве

Так называется распределение вероятностей случайной величины, заданной следующим законом распределения:

			…….	

Пример. На новогодней елке погасла гирлянда, состоящая из 12 лампочек. Для отыскания перегоревшей лампочки, проверяются по очереди (начиная с первой) все лампочки гирлянды. Случайная величина – порядковый номер перегоревшей лампочки, равномерно распределенная случайная величина со следующим законом распределения:

	1	**2**	**3**	**…..**	**12**

Распределение Бернулли

Рассмотрим некоторый эксперимент, в котором будем наблюдать событие $\boldsymbol{A}$. Пусть вероятность наступления события $\boldsymbol{A}$ в одном таком эксперименте равна $P(A) = p$. Соответственно, $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Говорят, что дискретная случайная величина $\boldsymbol{X}$ имеет

Распределение Бернулли если $X = 1$ в случае наступления события $\boldsymbol{A}$ и $X = 0$, если событие $\boldsymbol{A}$ не наступило.

иначе говорят, что $\boldsymbol{X}$ – индикаторная случайная величина, которая констатирует либо факт наступления события, либо факт его не наступления

Пример

Стрелок попадает в мишень при однократном выстреле с вероятностью $^2/_3$. Пусть случайная величина X описывает попадание или непопадание при однократном выстреле, тогда $X = 0$ при промахе с вероятностью $1 - {^2/_3} = {^1/_3}$ и $X = 1$ при попадании с вероятностью $^2/_3$.

Случайная величина ***X*** может быть записана рядом распределения:

Биномиальный закон распределения

Среди законов распределения ***ДСВ*** наиболее распространенным является биномиальное распределение, с которым мы уже встречались. Вспомним схему испытаний Бернулли.

Пусть имеется некоторый эксперимент, в рамках которого наблюдается некоторое событие A, вероятность наступления которого в одном эксперименте равна $P(A) = p$.

Соответственно, $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Проведем серию из n таких экспериментов. В этой серии событие A может наступить m раз, где $0 \leq m \leq n$.

Говорят, что дискретная случайная величина $\boldsymbol{X}$, определяющая число успехов $\boldsymbol{m}$ в серии из $\boldsymbol{n}$ экспериментов, имеет ***биномиальное распределение*** с параметрами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, при этом:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \qquad m = 0,1, \dots, n$$

Другими словами, случайная величина $\boldsymbol{X}$ — это количество экспериментов в серии из $\boldsymbol{n}$, в которых наблюдаемое событие $\boldsymbol{A}$ наступило ровно $\boldsymbol{m}$ раз.

Условие нормировки:

$$\sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1$$

Примеры

Пример 1: Стрелок, поражающий мишень с одного выстрела с вероятностью p , стреляет n раз. Случайная величина X , описывающая количество попаданий в серии из n выстрелов, имеет биномиальное распределение.

Пример 2: Монетку подбрасывают n раз. Случайная величина X - количество выпадения орла имеет биномиальное распределение.

Пример 3:* *Опыт: Покупка квартиры. Опрос соседей, относительно ее «хорошести» или «плохости». Случайная величина X – количество соседей из n опрошенных, кто ответил, что квартира хорошая и нужно брать.

Геометрическое распределение

Пусть проводится некоторый эксперимент, в рамках которого наблюдается некоторое событие A, вероятность наступления A в одном эксперименте равна $P(A) = p$. Соответственно, вероятность противоположного события $P(\overline{A}) = q = 1 - p$. Будем проводить эксперимент до тех пор, пока событие A не наступит. Случайная величина $\boldsymbol{X}$- количество испытаний до первого успеха (наступило событие A) имеет геометрическое распределение:

$$p_k = P(X = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1,2,3, \dots .$$

Геометрическое распределение

Множество возможных значений X есть счетное множество $\{1,2,\dots\}$ и ее закон распределения следующий:

X	1	2	3	…	k	…
P	p	qp	$q^2 p$	…	$q^{k-1} p$	…

Где

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = 1$$

условие нормировки, которое означает, как указывалось ранее, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины должна быть равна 1.

Пример : Баскетболист поочередно забрасывает мяч в корзину до тех пор, пока не попадет. Вероятность попасть при одном броске 0.3.

Пусть ξ - число бросков баскетболиста до первого попадания. Множество возможных значений ξ есть счетное множество $\{1,2,\dots\}$. Закон распределения ξ будет иметь следующий вид:

ξ	1	2	3	...	k	...
p	0.3	$0.3 \cdot 0.7$	$0,3 \cdot 0.7^2$	...	$0,3 \cdot 0.7^{k-1}$	...

В данном эксперименте можно задать случайную величину и так:

η – число неудачных бросков, до первой результативной попытки. Множество возможных значений η есть счетное множество $\{0,1,2,\dots\}$, и оно начинается уже с 0. Закон распределения такой случайной величины будет иметь вид:

η	0	1	2	...	k	...
p	0.3	$0.3 \cdot 0.7$	$0,3 \cdot 0.7^2$	...	$0,3 \cdot 0.7^{k}$	...

X - количество неудачных испытаний до первого успеха; Тогда

$$p_k = P(X = k) = q^k p, \qquad k = 0,1,2,\ldots .$$

И в том, и в другом случае количество ее возможных значений есть счетное множество. Но в первом случае, значения начинаются с нуля, а во втором – с единицы.

Для варианта 1 ряд распределения указан выше, а для варианта 2:

X	0	1	2	…	k	…
P	p	qp	$q^2 p$	…	$q^k p$	…

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k p = 1$$

Распределение Пуассона

Пусть имеется некоторый эксперимент, в рамках которого наблюдается некоторое событие A, вероятность наступления которого в одном эксперименте равна $P(A) = p$, соответственно, $P(\overline{A}) = q = 1 - p$.

Проведем серию из бесконечно большого числа таких экспериментов, т.е. $n \to \infty$ и пусть в этой серии вероятность наступления события A (успеха) в единичном испытании ***мала***.

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет ***распределение Пуассона*** с параметром $\lambda > 0$, если ее возможные значения $0,1,2,\ldots,m,\ldots$, а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона:

$$P_n(m) = P(X=m) = P(m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, m = 0,1,2,\ldots.$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда $n \to \infty$ и $p \to 0$, так что $np = \lambda$ - постоянно.

Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются: число вызовов на телефонной станции за время ***t***; число опечаток в большом тексте; число бракованных изделий в большой партии; число $\alpha-$ частиц, испускаемых радиоактивным источником, и т.д. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром $np = \lambda$

Случайная величина X, распределенная по закону Пуассона, имеет следующий ряд распределения:

X=m	*0*	*1*	*2*	…	*m*	…
p_m	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Закон распределения Пуассона называют законом редких явлений.

Задачи по теме:

1. Подбрасывается однократно кубик. Найти закон распределения случайной величины $X -$ выпавшее число очков.

2. В системе, состоящей из шести равнонадежных занумерованных (1,2,3,4,5,6) приборов, отказал один какой - то прибор. Для его обнаружения и устранения неисправности приборы проверяются один за другим в порядке их нумерации. Построить закон распределения случайной величины $X -$ номер отказавшего прибора.

3. В связке из трех ключей только один подходит к двери. Ключи перебираются до тех пор, пока не отыщут подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины $X -$ число опробованных ключей. Построить функцию распределения для данной дискретной случайной величины. Изобразить ее графически.

4. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам ***M*** и ***T***, равны соответственно 0.7 и 0.9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

5. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0.515. Составить закон распределения случайной величины $X -$ числа мальчиков в семье из 4 детей. Построить полигон распределения, построить функцию распределения и изобразить ее графически.

6. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0.4. Составить закон распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более 3; записать функцию распределения данной случайной величины; б) число вызовов неограниченно.

Непрерывные случайные величины

Непрерывная случайная величина - это случайная величина, множество значений которой бесконечное несчетное множество, заполняющее непрерывно некоторый интервал числовой оси.

Другими словами, это случайная величина, множество возможных значений которой имеет мощность континуума.

Способы задания непрерывных случайных величин

1.Функция распределения.

2.Функция плотности распределения вероятностей.

Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства

Определение : Случайную величину ξ называют ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме быть может отдельных точек.

Свойства функции распределения непрерывных случайных величин:

1. $F_\xi(x)$ – неубывающая непрерывная функция;
2. $0 \le F_\xi(x) \le 1;$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0; \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1;$
4. $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$

Плотность распределения вероятностей

Определение: Случайная величина ξ называется ***непрерывно распределенной***, если ее функция распределения допускает представление в виде: $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt$.

Подынтегральная функция $p_\xi(t)$ называется ***плотностью распределения вероятности*** случайной величины ξ.

Плотность распределения вероятностей является удобным способом задания непрерывной случайной величины, наиболее часто употребляющийся для задания непрерывных случайных величин

Пусть ξ непрерывная случайная величина с функцией распределения $F_\xi(x)$.

Плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ называется функция:

$$p_\xi(x)=\frac{dF_\xi(x)}{dx}=F_\xi'(x)$$

Функцию $p_\xi(x)$ – также называют ***дифференциальной функцией*** распределения.

Вероятностный смысл плотности

По определению производной можем расписать:

$$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le\xi\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Отношение $\frac{P(x\le\xi\le x+\Delta x)}{\Delta x}$ можно трактовать как количество вероятности, приходящееся на единицу длины промежутка Δx, или среднюю плотность распределения вероятности.

А в пределе при $\Delta x \to 0$, как мгновенную плотность распределения вероятности

Используя известную теорему математического анализа, можем из $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le\xi\le x+\Delta x)}{\Delta x} = p_\xi(x)$, записать:

$$\frac{P(x\le\xi\le x+\Delta x)}{\Delta x} = p_\xi(x)+\beta(x),$$ где $\beta(x)$ - бесконечно малая функция.

Откуда

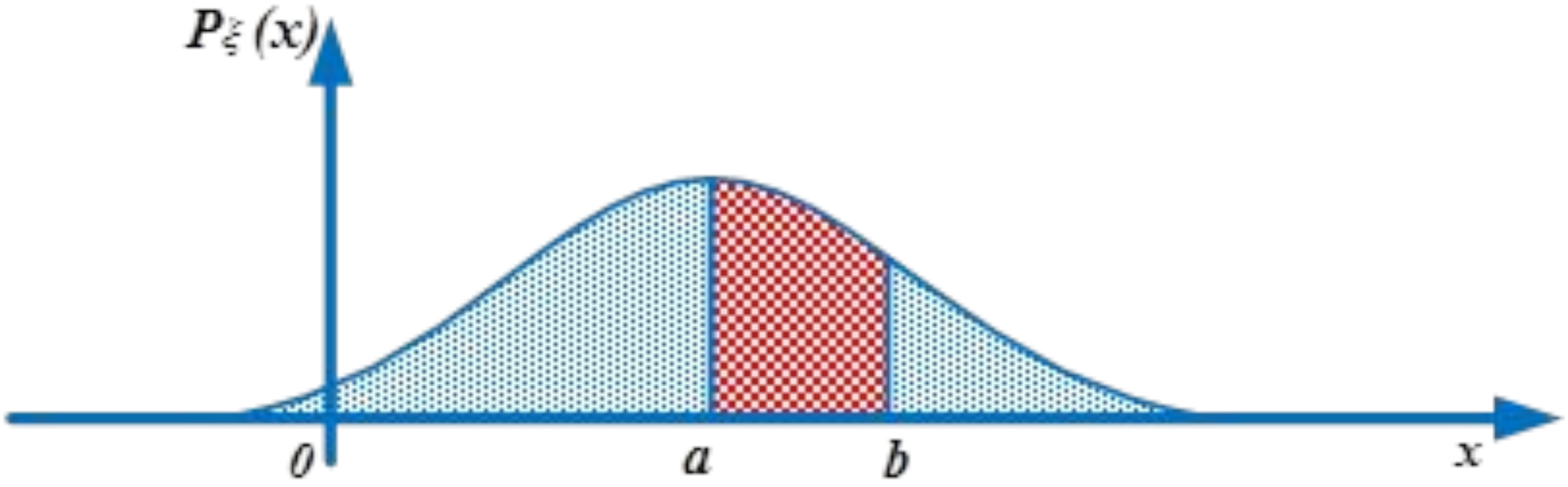
$P(x\le\xi\le x+\Delta x)\approx\ p(x)\cdot\Delta x$, где $p(x)\cdot\Delta x$ – называется «***элементом вероятности***», эта величина приближенно выражает вероятность попадания случайной величины ξ в элементарный отрезок Δx, примыкающий к точке x.

Свойства функции плотности

1. $p_\xi(x) \geq 0$ – функция неотрицательна, т.е. график функции лежит выше оси [illegible]

2. $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$, т.е. функция плотности нормирована.

3. $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b p_\xi(t)\,dt$ – вероятность попадания случайной величины ξ в любой промежуток с концами [illegible] и [illegible] равна той части площади под графиком плотности вероятностей, которая приходится на данный промежуток.



Пример 1

Пример. Функция распределения случайной величины ξ имеет вид $F(x) = A + B \cdot arctgx, \quad -\infty < x < \infty$, (распределение Коши).

Найти: **а)** постоянные A и B; **б)** плотность вероятности случайной величины ξ; **в)** построить график плотности вероятности.

Решение:

1. Найдем вначале плотность вероятности случайной величины ξ, для чего продифференцируем функцию распределения $F(x) = A + B \cdot arctgx, \quad -\infty < x < \infty$.

$$p_\xi(x) = F'(x) = (A + B \cdot arctgx)'_x = \frac{B}{1+x^2}$$

В полученном выражении присутствует один неизвестный коэффициент B. Одним из вариантов найти неизвестные коэффициенты является вариант использования условия нормировки. И в нашем случае, и в общем виде оно выглядит так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$$

То есть непрерывно просуммировав все «элементы вероятности» $p_\xi(x)dx$ на интервале $(-\infty,\infty)$ мы должны получить единицу. Итак, подставляя полученную плотность, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B}{1+x^2}dx=1$$

Это несобственный интеграл 1 рода, который легко находится:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B}{1+x^2}dx=B\cdot\lim_{s\to+\infty}\int_{-s}^{s}\frac{1}{1+x^2}dx=B\cdot\lim_{s\to+\infty}arctg\,x\Big|_{-s}^{s}=B\cdot\left(\lim_{s\to+\infty}\left[arctg\,s-arctg(-s)\right]\right)=$$

$$=B\cdot\left(\lim_{s\to+\infty}\left[arctg\,s+arctg\,s\right]\right)=2B\cdot\left(\lim_{s\to+\infty}arctg\,s\right)=2B\cdot\frac{\pi}{2}=B\cdot\pi=1$$

Откуда получаем коэффициент $B=\dfrac{1}{\pi}$.

Теперь мы можем записать выражение для ***<u>функции плотности</u>*** случайной величины ξ :

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\ -\infty<x<\infty$$

1. Для того, чтобы записать точное выражение для функции распределения случайной величины ξ, нам необходимо найти коэффициент A и подставить его в

$$F(x) = A + B \cdot arctgx = A + \frac{1}{\pi} \cdot arctgx \,.$$

Найдем данный коэффициент, используя свойство функции распределения: $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,

Для нашей функции: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(A + \frac{1}{\pi} \cdot arctgx\right) = A + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = A + \frac{1}{2} = 1$, откуда $A = \frac{1}{2}$.

Мы могли использовать и другое свойство функции распределения: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, результат был бы аналогичным:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(A + \frac{1}{\pi} \cdot arctgx\right) = A - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = A - \frac{1}{2} = 0, \text{ откуда } A = \frac{1}{2}.$$

Окончательно ***функция распределения*** случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arctgx, \quad -\infty < x < \infty$$

1. Построим график плотности вероятности случайной величины ξ. Для чего исследуем данную функцию. При $x=0$, соответствующее значение функции $p_\xi(0)=\dfrac{1}{\pi}$. Очевидно, что данная функция $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$, $-\infty<x<\infty$ четная. Следовательно ее график будет симметричен относительно оси $O\,p(x)$. Производная функции: $p'(x)=-\dfrac{1}{\pi}\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Критическая точка 1 рода, в которой производная обращается в ноль: $x=0$.

+   -

$x=0$

То есть на интервале функция возрастает, а на убывает. При функция достигает своего максимума.

Поищем асимптоты. Уравнение асимптоты может быть записано в общем виде так:

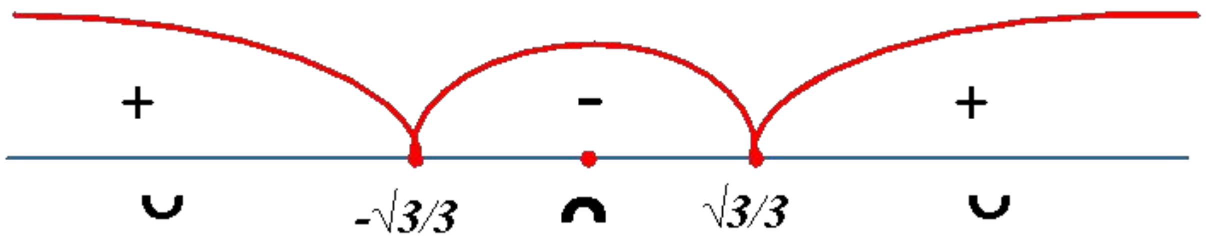
где угловой коэффициент находится так: , а константа : .

У нас: и наклонных асимптот нет. Но

, поэтому горизонтальная асимптота

для функции плотности.

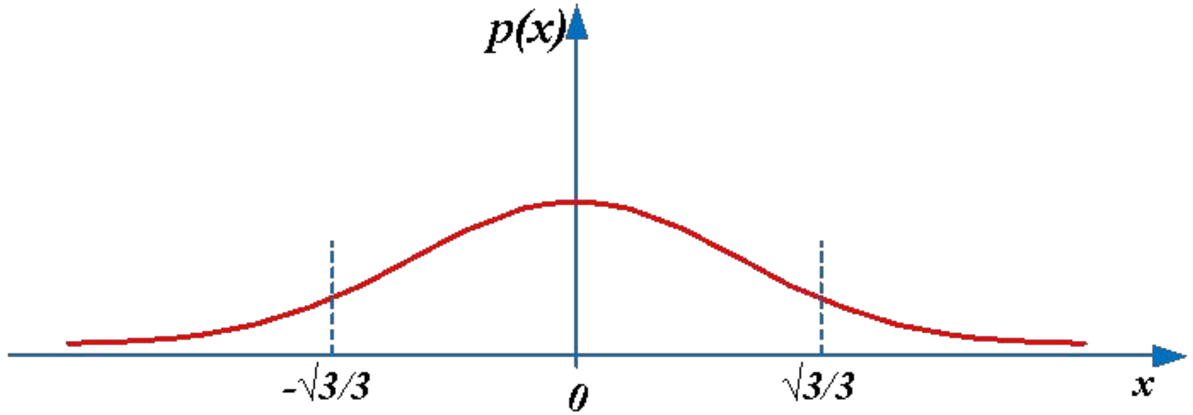
Не сложно найти вторую производную: $p''(x) = \left(-\frac{1}{\pi}\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)' = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(3x^2-1)}{\left(1+x^2\right)^3}$, откуда получаем значение критических точек 2 рода, где вторая производная обращается в ноль: $3x^2-1=0$, $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Из схемы видно, что на интервалах и функция вогнута, а на интервале

выпукла.

Можем построить эскиз графика функции плотности:



Пример 2

Пример Плотность вероятности случайной величины ξ имеет вид:

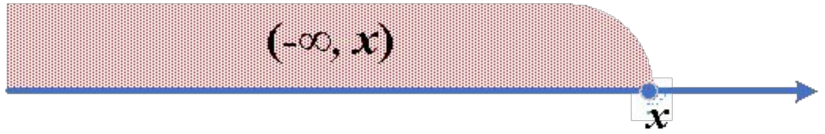
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения и построить ее график.

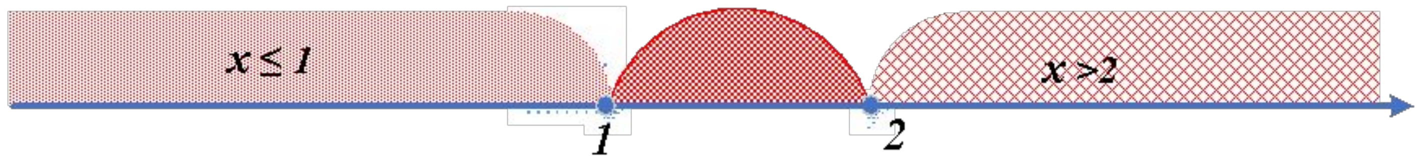
Решение:

1. По определению .

Замечание: Ранее указывалось, что $P(\xi < x)$, является вероятностью попадания случайной величины ξ слева от какого-то наперед заданного «барьерного» значения x, т.е. в выделенный красным интервал $(-\infty, x)$:

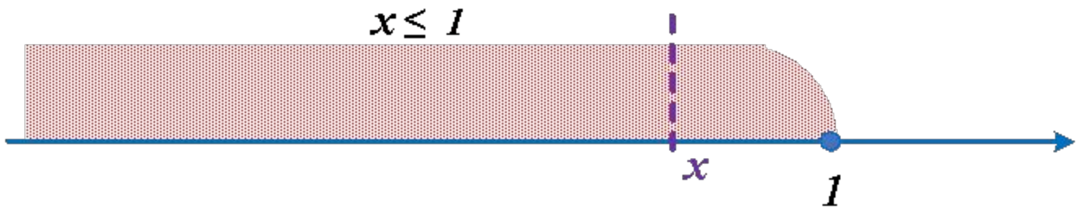


В нашем примере значения функции плотности на трех разных интервалах действительной прямой разные:



Логично, что наш «барьерный» будет как-то связан с выделенными интервалами. Будем поочередно «запускать» его в каждый из интервалов.

Пусть , т.е. «барьер» , относительно которого мы оцениваем вероятность попадания случайной величины в интервал , может находится в любом месте на интервале

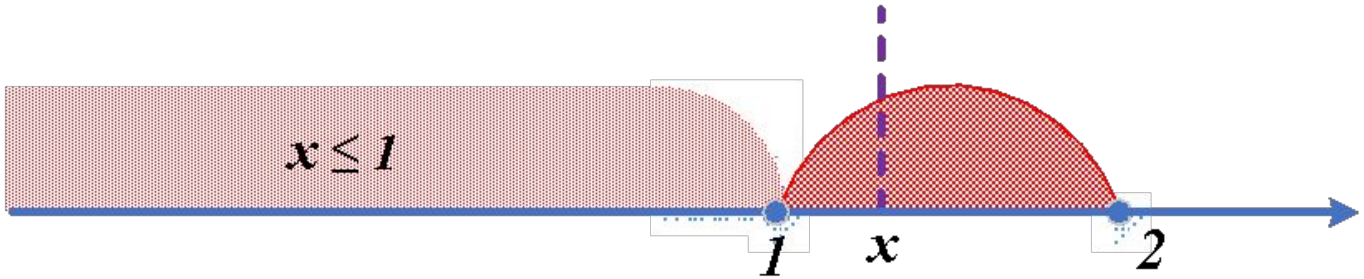


Очевидно, что интеграл до любого такого , будет всегда равен нулю

так как при таких значениях функция плотности

тождественно равна 0, т.е. оказаться слева от таких «иксов» случайная величина никак не может.

Как только мы сдвигаем свой барьер вправо за значение $x=1$ и попадаем в интервал $1<x\leq 2$:

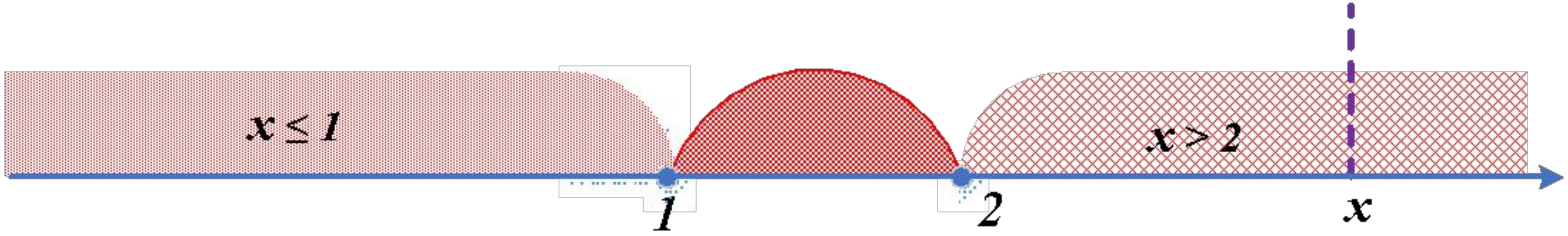


Наш интеграл и соответственно функция распределения на этом участке приобретает вид:

Выбирая произвольные значения на интервале , мы будем получать соответствующую вероятность оказаться левее любого зафиксированного нами Например: при вероятность того, что случайная величина окажется слева от такого равна:

.

Продвинем дальше вправо свой «барьер», пусть $x > 2$,



Тогда вероятность того, что случайная величина , попадет в интервал , т.е. слева от любого «барьерного» из промежутка :

Таким образом можем записать окончательный вид функции распределения исследуемой случайной величины и построить ее график:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$