Лекция №7

Нормальный случайный процесс

Дисциплина: “Статистическая теория радиотехнических систем”

- Совместная плотность вероятности *n* сечений $\hat{x}(t_1), \hat{x}(t_2), \dots \dots \hat{x}(t_n)$ нормального случайного процесса описывается выражением:
- $P_{\hat{x}}(x_1, x_2, \dots \dots x_n, t_1, t_2, \dots \dots t_n) = \dfrac{1}{\sigma_{\hat{x}}(t_1)\sigma_{\hat{x}}(t_2)\dots\dots\sigma_{\hat{x}}(t_n)\sqrt{(2\pi)^n |R_n|}} \cdot$
- $\cdot \exp\left(-\dfrac{1}{2|R_n|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}\dfrac{x_i - m_{\hat{x}}(t_i)}{\sigma_{\hat{x}}(t_i)} \cdot \dfrac{x_j - m_{\hat{x}}(t_j)}{\sigma_{\hat{x}}(t_j)}\right)$ (1.10)
- где $|R_n|$ – определитель матрицы $n - \text{го}$ порядка
- $\|R_n\| = \left\| \begin{matrix} r_{11} & r_{12} \dots \dots \dots . & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \dots \dots \dots . & r_{2n} \\ r_{n1} & r_{n2} \dots \dots \dots . & r_{nn} \end{matrix} \right\|$
- элементами, которой являются коэффициенты корреляции
- $r_{ij} = \dfrac{M\left[\left(x(t_i) - m_{\hat{x}}(t_i)\right)\left(x(t_j) - m_{\hat{x}}(t_j)\right)\right]}{\sigma_{\hat{x}}(t_i)\sigma_{\hat{x}}(t_j)}; ij = \overline{1, n}$

- Одномерная плотность вероятности нормального процесса имеет вид:
- $$P_{\hat{x}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t)} e^{-\frac{\left(x - m_{\hat{x}}(t)\right)^2}{\sigma_{\hat{x}}^2(t)}} \qquad (1.21)$$
-

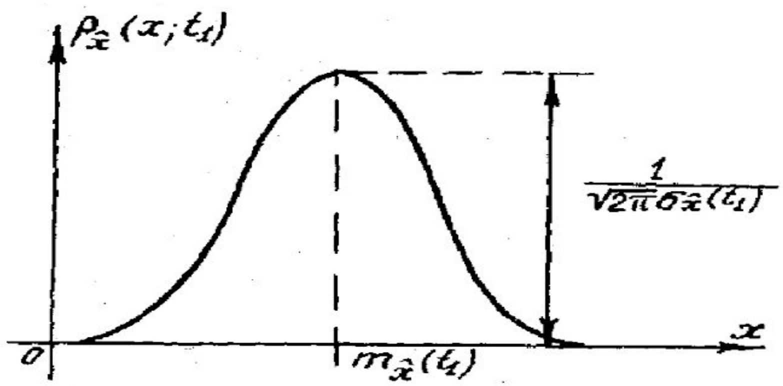

Рис. I.10.I

- Одномерный интегральный закон распределения нормального процесса получается из (1.1)

-
- $F(x,t_1) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}^2(t)} e^{\frac{-\left(x-m_{\hat{x}}(t_1)\right)^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_1)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_{\hat{x}}(t_1)}{\sigma_{\hat{x}}(t_1)}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \phi\left(\frac{x-m_{\hat{x}}(t)}{\sigma_{\hat{x}}(t)}\right),$
- Двумерная плотность вероятности нормального процесса описывается формулой
- $P_{\hat{x}}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\hat{x}}(t_1)\sigma_{\hat{x}}(t_2)\sqrt{1-r_{\hat{x}}^2(t_1,t_2)}} \cdot$
- $\cdot\ exp\left\{-\frac{1}{1-r_{\hat{x}}^2(t_1,t_2)}\left[\frac{(x_1-m_{\hat{x}}(t_1))^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_1)} - \frac{2r_{\hat{x}}(t_1,t_2)(x_1-m_{\hat{x}}(t_1))(x_2-m_{\hat{x}}(t_2))}{\sigma_{\hat{x}}(t_1)\sigma_{\hat{x}}(t_2)} + \frac{(x_2-m_{\hat{x}}(t_2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_2)}\right.\right.$
- (1.22)

- В том случае, когда случайный процесс стационарен,
- $m_{\hat{x}}(t_1) = m_{\hat{x}}(t_2) = m_{\hat{x}}$; $\sigma_{\hat{x}}(t_1) = \sigma_{\hat{x}}(t_2) = \sigma_{\hat{x}}$; $r_{\hat{x}}(t_1, t_2) = r_{\hat{x}}(\tau)$
- Поверхность, соответствующая (1.22), изображена на рисунке 1.35.

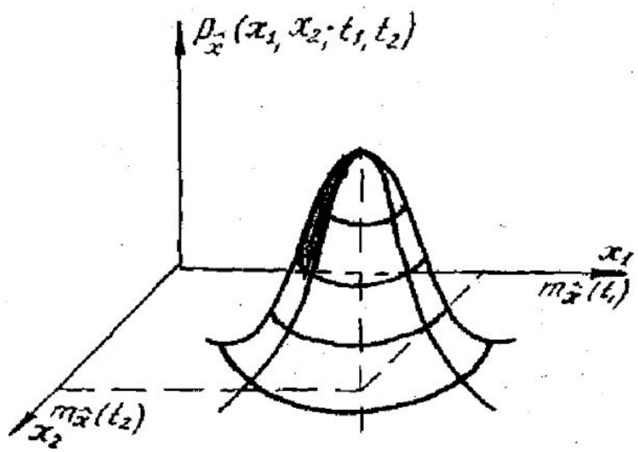

Рис. I.IO.2

- Если сечения процесса не коррелированы, т.е. $r_{\hat{x}}(t_1, t_2) = 0$, то из формулы (1.22) следует:
- $P_{\hat{x}}(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t_1)} e^{\frac{-\left(x_1 - m_{\hat{x}}(t_1)\right)^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_1)}} \cdot$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{x}}(t_2)} e^{\frac{-\left(x_2 - m_{\hat{x}}(t_2)\right)^2}{2\sigma_{\hat{x}}^2(t_2)}} =$

- $= P_{\hat{x}}\ (x_1, t_1) P_{\hat{x}}(x_2; , t_2)$

- Зная $B_{\hat{x}}(\tau)$, можно найти математическое ожидание случайного процесса по формуле:
- $m_{\hat{x}} = \sqrt{B_{\hat{x}}(\infty)}$
- дисперсию:
- $\sigma_{\hat{x}}^2 = B_{\hat{x}}(0) - B_{\hat{x}}(\infty)$
- и нормированную корреляционную функцию:
- $r_{\hat{x}}(\tau) = \frac{B_{\hat{x}}(\tau) - m_{\hat{x}}^2}{\sigma_{\hat{x}}^2}$
- Зная $r_{\hat{x}}(\tau)$, определяем все элементы матрицы $\|R_n\|$:
- $r_{ij} = r_{\hat{x}}[(i-j)\Delta\tau]$
- Здесь $\Delta\tau$ – интервал между смежными сечениями.
- Из матрицы $\|R_n\|$ определяются $|R_n|$ и r_{ij}.