Сложная функция.

Производная сложной функции.

Рассмотрим функции

$$f(t) = \sin t \qquad t(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$y = \sin\left(x^2 - 2x + 5\right)$$

$$y = f(t(x))$$

Внешняя функция

Внутренняя функция

Примеры:

$$1)\, y = (\underbrace{2x+1}) ^{\boxed{6}}$$

Внешняя функция $f = t^6$

Внутренняя функция $t = 2x+1$

$$2)\, y = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$$

Внешняя функция $f = t^{-2}$

$$y = (\underbrace{\sin x})^{\boxed{-2}}$$

Внутренняя функция $t = \sin x$

$$3)\; y = \boxed{tg}\underbrace{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Внутренняя функция

$$t = 2x + \frac{\pi}{4}$$

Внешняя функция $f = tgt$

Определить внутреннюю и внешнюю функции для данной сложной функции:

$$1)\ y = (\underbrace{4x+1})^{\boxed{4}}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 4x+1 \\ f = t^4 \end{array}\right.$$

$t = 4x + 1$ - внутренняя функция

$f = t^4$ - внешняя функция

Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$2)\, y = \boxed{\sin}\, \underbrace{2x}$$

$$\left[\begin{array}{ll} t = 2x & \text{- Внутренняя функция} \\ f = \sin t & \text{- Внешняя функция} \end{array}\right.$$

Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$$3)\, y = \frac{1}{(x+1)^3} \qquad y = (\underbrace{x+1}_{})^{\boxed{-3}}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = x+1 \\ f = t^{-3} \end{array}\right.$$

$t = x+1$ - **Внутренняя функция**

$f = t^{-3}$ - **Внешняя функция**

Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:

$4)\, y = \cos^2 x \qquad y = (\underbrace{\cos x})^{\boxed{2}}$

$\begin{cases} t = \cos x & \text{- Внутренняя функция} \\ f = t^2 & \text{- Внешняя функция} \end{cases}$

Правило нахождения производной сложной функции

Производная сложной функции равна производной внешней функции на производную внутренней функции

$$1)\; y = \boxed{\cos}\,\underbrace{4x}$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$y' = (\cos t)' \cdot (4x)' = -\sin t \cdot 4 = -4\sin t =$$

$$= -4\sin 4x$$

$$2)\, y = \boxed{ctg}\underbrace{\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\begin{cases} t = 2x + \dfrac{\pi}{3} \\ f = ctgt \end{cases} \qquad \boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$y' = (ctgt)' \cdot \left(2x+\frac{\pi}{3}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 t}\cdot 2 = -\frac{2}{\sin^2 t} =$$

$$= -\frac{2}{\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$$

$3) y = \sin^2 x \qquad y = (\underbrace{\sin x}) ^{\boxed{2}}$

$$\begin{cases} t = \sin x \\ f = t^2 \end{cases} \qquad \boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$y' = (t^2)' \cdot (\sin x)' = 2t \cdot \cos x =$$

$$= \underbrace{2 \sin x \cos x} = \sin 2x$$

$$4)\; y = \left(x^2 + 2x\right)^{\boxed{4}}$$

$$\begin{cases} t = x^2 + 2x \\ f = t^4 \end{cases} \qquad \boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$y' = \left(t^4\right)' \cdot \left(x^2 + 2x\right)' = 4t^3 \cdot (2x + 2) = 8t^3 \cdot (x + 1) =$$

$$= 8(x+1) \cdot \left(x^2 + 2x\right)^3$$

Найти производные функций:

$$1)\ y=(1-4x)^2$$

$$2)\ y=\frac{1}{3x+2}$$

$$3)\ y=\cos 3x$$

$$4)\ y=ctg(4x-3)$$

$$1)\ y'=-8(1-4x)$$

$$2)\ y'=-\frac{3}{(3x+2)^2}$$

$$3)\ y'=-3\sin 3x$$

$$4)\ y'=-\frac{4}{\sin^2(4x-3)}$$

Решить уравнение $y' = 0$

$$1)\; y = \boxed{\cos}\,\underbrace{2x} + x - 1$$

$$y' = \left(\cos 2x + x - 1\right)' = \left(\cos 2x\right)' + \left(x\right)' - 1' =$$

$$\begin{cases} t = 2x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$= \left(\cos t\right)' \cdot \left(2x\right)' + 1 - 0 = -\sin t \cdot 2 + 1 =$$

$$= -2\sin t + 1 = -2\sin 2x + 1$$

$$-2\sin 2x + 1 = 0$$

$$-2\sin 2x = -1$$

$$2\sin 2x = 1$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cdots$$

ДЗ:

$$1)\ y=(7x+1)^8$$

$$2)\ y=(1-3x^2+4x)^5$$

$$3)\ y=7(5x-4)^6$$

$$4)\ y=\frac{1}{(6x+2)^5}$$

$$5)\ y=\frac{14}{(4-5x)^5}$$

$$6)\ y=3\sqrt{4x+6}$$

$$7)\ y=\sqrt{\frac{x}{6}-9}$$

$$8)\ y=\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$9)\ y=2\cos(3x+\pi)$$

$$10)\ y=tg\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$11)\ y=4ctg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$12)\ y=7\sin^3\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$$