

*Сложная функция.  
Производная сложной  
функции.*





## *Рассмотрим функции*

$$f(t) = \sin t \quad t(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$y = \sin(x^2 - 2x + 5)$$

$$y = f(t(x))$$

***Внешняя  
функция***

***Внутренняя  
функция***



## Примеры:

$$1) y = (2x + 1)^6$$

Внешняя функция  $f = t^6$

Внутренняя функция  $t = 2x + 1$

$$2) y = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$$

Внешняя функция  $f = t^{-2}$

$$y = (\sin x)^{-2}$$

Внутренняя функция  $t = \sin x$



$$3) y = \boxed{tg} \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

**Внутренняя функция**  
 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$

**Внешняя функция**  $f = tgt$



**Определить внутреннюю и внешнюю функции для данной сложной функции:**

$$1) y = (4x + 1)^4$$

$$\left[ \begin{array}{l} t = 4x + 1 - \text{внутренняя функция} \\ f = t^4 - \text{внешняя функция} \end{array} \right.$$



**Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:**

$$2) y = \sin 2x$$

$t = 2x$  - **Внутренняя функция**

$f = \sin t$  - **Внешняя функция**



**Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:**

$$3) y = \frac{1}{(x+1)^3} \quad y = \underbrace{(x+1)}_{\text{внутренняя}}^{\boxed{-3}}$$

$t = x + 1$  - **Внутренняя функция**

$f = t^{-3}$  - **Внешняя функция**



**Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:**

$$4) y = \cos^2 x \quad y = (\underbrace{\cos x}_{\text{внутренняя}})^{\overbrace{2}^{\text{внешняя}}}$$

$t = \cos x$  - **Внутренняя функция**

$f = t^2$  - **Внешняя функция**





## **Правило нахождения производной сложной функции**

**Производная сложной функции равна  
производной внешней функции  
на производную внутренней функции**

$$1) y = \boxed{\cos} 4x$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$\begin{aligned} y' &= (\cos t)' \cdot (4x)' = -\sin t \cdot 4 = -4 \sin t = \\ &= -4 \sin 4x \end{aligned}$$



$$2) y = \boxed{ctg} \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{cases} t = 2x + \frac{\pi}{3} \\ f = ctgt \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$\begin{aligned} y' &= (ctgt)' \cdot \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 t} \cdot 2 = -\frac{2}{\sin^2 t} = \\ &= -\frac{2}{\sin^2 \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right)} \end{aligned}$$



$$3) y = \sin^2 x \quad y = (\underbrace{\sin x}_{f})^{\boxed{2}}$$

$$\begin{cases} t = \sin x \\ f = t^2 \end{cases}$$

$$\boxed{y' = f' \cdot t'}$$

$$\begin{aligned} y' &= (t^2)' \cdot (\sin x)' = 2t \cdot \cos x = \\ &= \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \sin 2x \end{aligned}$$



$$4) y = (x^2 + 2x)^4$$

$$\begin{cases} t = x^2 + 2x \\ f = t^4 \end{cases}$$

$$y' = f' \cdot t'$$

$$\begin{aligned} y' &= (t^4)' \cdot (x^2 + 2x)' = 4t^3 \cdot (2x + 2) = 8t^3 \cdot (x + 1) = \\ &= 8(x + 1) \cdot (x^2 + 2x)^3 \end{aligned}$$



**Найти производные функций:**

$$1) y = (1 - 4x)^2$$

$$2) y = \frac{1}{3x + 2}$$

$$3) y = \cos 3x$$

$$4) y = \operatorname{ctg}(4x - 3)$$

$$1) y' = -8(1 - 4x)$$

$$2) y' = -\frac{3}{(3x + 2)^2}$$

$$3) y' = -3 \sin 3x$$

$$4) y' = -\frac{4}{\sin^2(4x - 3)}$$



Решить уравнение  $y' = 0$

$$1) y = \boxed{\cos} 2x + x - 1$$

$$y' = (\cos 2x + x - 1)' = (\cos 2x)' + (x)' - 1' =$$

$$\begin{cases} t = 2x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$= (\cos t)' \cdot (2x)' + 1 - 0 = -\sin t \cdot 2 + 1 =$$

$$= -2 \sin t + 1 = -2 \sin 2x + 1$$



$$-2 \sin 2x + 1 = 0$$

$$-2 \sin 2x = -1$$

$$2 \sin 2x = 1$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

...



**ДЗ:**

$$1) y = (7x + 1)^8$$

$$2) y = (1 - 3x^2 + 4x)^5$$

$$3) y = 7(5x - 4)^6$$

$$4) y = \frac{1}{(6x + 2)^5}$$

$$5) y = \frac{14}{(4 - 5x)^5}$$

$$6) y = 3\sqrt{4x + 6}$$

$$7) y = \sqrt{\frac{x}{6} - 9}$$

$$8) y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$9) y = 2 \cos(3x + \pi)$$

$$10) y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$11) y = 4 \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$12) y = 7 \sin^3\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$$