

# Практическая работа

## Задание RSA: Everything is Big

# Условие

- Даны следующие данные:
  - С – Зашифрованное сообщение
  - N – Модуль
  - E – Публичная экспонента
- Задача:
  - Найти исходное сообщение

- Наше решение, главным образом, является реализацией атаки Винера, основанное на предположении, что закрытый ключ –  $d$  слишком мал. Как оказалось в итоге, так оно и было.
- Сейчас мы разберём каждую из реализованных функций.

# isPerfectSqr(int)

```
def isPerfectSqr(num):  
    x = num // 2  
    seen = set([x])  
  
    while x * x != num:  
        x = (x + (num // x)) // 2  
        if x in seen:  
            return False  
        seen.add(x)  
  
    return True
```

Главным образом функция даёт ответ на вопрос: “Является ли её аргумент идеальным квадратом?” (Это понадобится позже)

Работает следующим образом:

- 1) Функция считает число «x», равное половине аргумента
- 2) Работа цикла «While» будет идти до тех пор пока « $x^2$ » не будет равно аргументу либо «x» не повторится (все проверенные значения хранятся во множестве «seen»)
- 3) Каждое следующее «x» вычисляется по приведённой формуле, такой подход обеспечивает эффективное выполнение функции, или, другими словами, более быстрое выполнение при достаточно больших значениях аргумента, в сравнении с методом простого перебора.

# rational\_to\_contfrac(e, n)

```
def rational_to_contfrac(e, n):  
    while e:  
        a = e // n  
        yield a  
        e, n = n, e - a * n
```

Функция занимается задачей разложения дроби, где числитель – первый аргумент функции, знаменатель – второй, в цепную дробь; возвращает список-итератор.

Принцип работы следующий:

- 1) Цикл «while» работает до тех пор, пока переменная «e» не обратится в нуль.
- 2) Вычисляем «a» - остаток от деления аргументов
- 3) Меняем значение переменных-аргументов, следуя алгоритму Евклида. Таким образом мы будем делить делитель на остаток

# contfrac\_to\_rational\_iter(contfrac)

```
def contfrac_to_rational_iter(contfrac):  
    n0, d0 = 0, 1  
    n1, d1 = 1, 0  
  
    for q in contfrac:  
        n = q * n1 + n0  
        d = q * d1 + d0  
        yield n, d  
  
        n0, d0 = n1, d1  
        n1, d1 = n, d
```

Данная функция является, в какой-то степени, логическим продолжением предыдущей и вычисляет «подходящие дроби» используя циклическую дробь, вычисленную предыдущей функцией. Для этого используются рекуррентные соотношения теории чисел, которые можно видеть внутри цикла «for» на слайде. Возвращает итератор-кортеж, где первая компонента – числитель, вторая – знаменатель.

# convergents\_from\_contfrac(contfrac)

```
def convergents_from_contfrac(contfrac):  
    nn, dd = 1, 0  
  
    for i, (n, d) in enumerate(contfrac_to_rational_iter(contfrac)):  
        if i % 2 == 0:  
            yield n + nn, d + dd  
        else:  
            yield n, d  
        nn, dd = n, d
```

Хз, что эта штука делает и как работает

Для рассмотрения следующей функции необходимо провести следующие рассуждения:

- Знаем, что  $e * d = 1 \pmod{\text{phi}}$ ,  $\text{phi} = \text{НОК}(p - 1, q - 1)$
- Значит существует целое  $K$ :  $e * d = K * \text{phi} + 1$
- Пусть  $G = \text{НОД}(p - 1, q - 1)$ , тогда  $e * d = (K / G) * \text{phi} + 1$
- Обозначим  $k = K / \text{НОД}(K, G)$ ,  $g = G / \text{НОД}(K, G)$
- Получаем следующее:  $e * d = (k / g) * \text{phi} + 1$
- Или  $e * d * g = k * (p - 1)(q - 1) + g$

# get\_private\_exponent(e, n)

```
def get_private_exponent(e, n):  
    for k, dg in convergents_from_contfrac(rational_to_contfrac(e, n)):  
        edg = e * dg  
        phi = edg // k  
        x = n - phi + 1  
  
        if x % 2 == 0 and isPerfectSqr((x//2)**2 - n):  
            g = edg - phi * k  
            return dg // g  
  
    return 0
```

Заключительная функция программы, которая либо вернёт нам искомый закрытый ключ «d», либо «0», что означает провал в задаче его поиска.

Принцип работы:

- 1) Каждую итерацию цикла «for» высчитываем произведение «e \* d \* g», phi, исходя из предыдущих рассуждений – предполагая, что «g», или остаток от деления, равен нулю
- 2) В последнем случае, следуя алгоритму атаки Винера, проверяем два предположения, которые оба должны оказаться истиной:
  - «x» / 2 не имеет остатка отличного от нуля, где  $x = N - \text{phi} + 1$
  - $(x^2) - N$  должно являться идеальным квадратом
- 3) В случае логической истины при конъюнкции этих двух условий получаем нужный нам закрытый ключ простым арифметическим

# Итог

- Таким образом при исходных данных:

- N =

```
0x8da7d2ec7bf9b322a539afb9962d4d2eb3e3d449d709b80a51dc680a14c87ffa863edfc7b5a2a542a0fa610fe  
be2d967b58ae714c46a6eccb44cd5c90d1cf5e271224aa3367e5a13305f2744e2e56059b17bf520c95d521d34fda  
d3b0c12e7821a3169aa900c711e6923ca1a26c71fc5ac8a9ff8c878164e2434c724b68b508a030f86211c1307b6f9  
0c0cd489a27fdc5e6190f6193447e0441a49edde165cf6074994ea260a21ea1fc7e2dfb038df437f02b9ddb7b5244  
a9620c8eca858865e83bab3413135e76a54ee718f4e431c29d3cb6e353a75d74f831bed2cc7bdce553f25b617b3b  
dd9ef901e249e43545c91b0cd8798b27804d61926e317a2b745
```

- E =

```
0x86d357db4e1b60a2e9f9f25e2db15204c820b6e8d8d04d29db168c890bc8a6c1e31b9316c9680174e128515a0  
0256b775a1a8ccca9c6936f1b4c2298c03032cda4dd8eca1145828d31466bf56bfc0c6a8b4a1b2fb27de7a57fae7  
430048d7590734b2f05b6443ad60d89606802409d2fa4c6767ad42bffa01a8ef1364418362e133fa7b2770af64a  
68ad50ad8d2bd5cebb99ceb13368fb31a6e7503e753f8638e21a96af1b6498c18578ba89b98d70fa482ad137d28f  
e701b4b77baa25d5e84c81b26ee9bddf8cbb51a071c60dd57714de379cd4bc14932809ba18524a0a18e4133665c  
fc46e2c4cfbc28e0a0957e5513a7307c422b87a6182d0b6a074b4d
```

- C =

```
0x6a2f2e401a54eeb5dab1e6d5d80e92a6ca189049e22844c825012b8f0578f95b269b19644c7c8af3d544840d38  
0ed75fdf86844aa8976622fa0501eaec0e5a1a5ab09d3d1037e55501c4e270060470c9f4019ced6c4e67673843da  
f2fd71c64f3dd8939ae322f2b79d283b3382052d076ebe9bb50b0042f1f7dd7beadf0f5686926ade9fc8370283ead  
781a21896e7a878d99e77c3bb1f470401062c0e0327fd85da1cf12901635f1df310e8f8c7d87aff5a01dbbecd739c  
d8f36462060d0eb237af8d613e2d9cebb67d612bcfc353ef2cd44b7ac85e471287eb04ae9b388b66ea8eb32429ae  
96dba5da8206894fa8c58a7440a127fceb5717a2eaa3c29f25f7
```

- Ответом будет являться следующее сообщение: **crypto{s0m3th1ng5\_c4n\_b3\_t00\_b1g}**

# ССЫЛКИ

- Задача: <https://cryptohack.org/challenges/rsa/>
- Научная работа по атаке Винера:  
<https://www.cits.ruhr-uni-bochum.de/imperia/md/content/may/krypto2ss08/shortsecretexponents.pdf>