ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 3

Формула классической вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n},$$ где

m – число элементарных исходов, благоприятствующих ***A***;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Элементарные исходы **несовместны**, **равновозможны** и **образуют полную группу**.

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность ***достоверного события равна единице.***

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

Свойство 3. **Вероятность случайного события А есть число, заключенное между нулем и единицей.**

$$0 \le P(A) = \frac{m}{n} \le 1.$$

Требования к классической схеме

- 1) Выбрать множество элементарных исходов
- 2)Подсчитать число всех элементарных исходов
- 3)Если вычисляем Р(А), подсчитать число благоприятных исходов.

Пример 1

Монету подбрасывают дважды. Построить множество элементарных исходов.

Решение

- Если учитывать порядок, то исходов получится четыре

  (герб,герб) (решка,решка) (герб,решка) (решка,герб)

  Все эти исходы равновозможны.

- Если порядок не учитывать, то исходы (решка,герб) и (герб,решка) считают как один. Тогда элементарных исходов будет три

(герб,герб) (решка,решка) (герб,решка)

Гипергеометрическая формула

В случае разбиения исходного множества на два подмножества

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$P(A)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

- N – общее количество элементов
- M – количество элементов определенного типа
- n – отобранные
- m – количество элементов в выборке, связанных с M

Пример 1

В фирме работают 6 женщин и 4 мужчин. Наудачу отобраны 7 человек. Чему равна вероятность, что среди отобранных ровно 3 женщины?

Решение: Имеем N=10; n=7; M=6; m=3. Тогда

$$P(A) = \frac{C_6^3 C_4^4}{C_{10}^7} = \frac{1}{6}$$

Пример 2

В партии из 6 деталей 3 стандартных. Найти вероятность того, что среди четырех взятых наудачу деталей 2 стандартных.

Решение: Имеем N=6; n=4; M=3; m=2.

Тогда

$$P(A)=\frac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\frac{3}{5}$$

Покерные комбинации

- Пара(2) :Т♠;10♣;К♣;2♦;2♠
- Две пары:(2+2) 10♠;10♣;К♣;2♦;2♠
- Тройка(3): Т♠;10♣;2♣;2♦;2♠
- Стрит(Street): Т♠;10♣;К♣;Д♦;В♥
- Флеш(Flush): Т♠;10 ♠;К ♠;2 ♠;2♠
- 3+2: 10♠;10♣;2♣;2♦;2♠
- Каре: 10♠; 2♥;2♣;2♦;2♠
- S+F: Т♣;10♣;К♣;Д♣;В♣.

Расчет вероятностей покерных комбинаций

Результат эксперимента – наименования пяти карт, например, (Т♠;10♣; К♣;2♦;2♠).

Число всех исходов

$$n = C_{52}^{5} = 2\ 598\ 960$$

Вероятность пары

- Число благоприятных исходов и вероятность пары

$$m = C_{13}^{1} \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{12}^{3} \cdot C_{4}^{1} \cdot C_{4}^{1} \cdot C_{4}^{1} = 1098240$$

$$P(\text{"2"}) = \frac{m}{n} = 0{,}4225690276$$

Вероятность двух пар

- Число благоприятных исходов и вероятность двух пар

$$m = C_{13}^{2} \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{4}^{2} \cdot C_{11}^{1} \cdot C_{4}^{1} = 494208$$

$$P\left("2+2"\right) = \frac{m}{n} = 0{,}1901560624$$

$$P("3")=\frac{C_{13}^{1}\cdot C_{4}^{3}\cdot C_{12}^{2}\cdot C_{4}^{1}\cdot \tilde{N}_{4}^{1}}{2598960}=\frac{54912}{2598960}=0{,}0211284514$$

$$P("S")=\frac{9\cdot C_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}\cdot \tilde{N}_{4}^{1}\cdot C_{4}^{1}}{2598960}=\frac{9216}{2598960}=0{,}0035460338$$

$$P("F")=\frac{C_{13}^{5}\cdot \tilde{N}_{4}^{1}}{2598960}=\frac{5148}{2598960}=0{,}0019807923$$

$$P("3+2")=\frac{C_{13}^{1}\cdot C_{4}^{3}\cdot C_{12}^{1}\cdot C_{4}^{2}}{2598960}=\frac{3744}{2598960}=0{,}0014405762$$

$$P("K")=\frac{C_{13}^{1}\cdot \tilde{N}_{12}^{1}\cdot C_{4}^{1}}{2598960}=\frac{624}{2598960}=0{,}0002400960$$

$$P("S+F")=\frac{9\cdot 4}{2598960}=\frac{36}{2598960}=0{,}0000138517$$

Относительная частота

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$\boxed{W(A) = \frac{m}{n}}$$

где **m** – число появлений события,
n – общее число испытаний.

Пример

По цели произвели 32 выстрела, причем было зарегистрировано 15 попаданий. Чему равна относительная частота поражения цели?

Решение: общее число испытаний $n=32$.

Событие появилось 15 раз, то есть $m=15$. Тогда $W(A)=15/32$.

Статистическая вероятность появления события

Относительная частота – приближенное значение вероятности, называемое статистической.

Пример

По данным статистики, относительная частота рождения девочек за некоторый год по месяцам характеризуется следующими числами (начиная с января):

0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за *приближенное значение вероятности рождения девочек*.

Проверка свойств статистической вероятности

1. Если событие достоверно, то **m = n** и относительная частота

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2. Если событие невозможно, то **m = 0** и, следовательно, относительная частота

$$\frac{0}{n} = 0$$

Для любого события $0 \le m \le n$,
следовательно, относительная частота

$$0 \le \frac{m}{n} \le 1$$

т.е. *статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей.*

Операции над событиями

Сумма событий

Пусть даны события А и В.
Сумма событий А+В – событие, которое означает, что произошло хотя бы одно из исходных событий.

Разность событий

Разностью двух событий А-В называется событие, состоящее в том, что А произошло, но В не произошло

Произведение событий

Пусть даны события A и B.

Произведение событий AB – событие, которое означает, что одновременно произошли оба события.

Противоположные события

A и $\overline{A}$

События называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу.

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1$$

Другими словами:

Событием, противоположным к А, называется событие Ā, состоящее в том, что событие А не произошло.

Примеры

A={идет дождь}

B={идет снег}

AB={идет дождь и снег}

A+B={идет дождь или снег}

Пример противоположного события

A = {попадание в мишень}

$\overline{A}$ = {промах}

Задача 1

Вероятность того, что день будет ясным равна 0,3. Чему равна вероятность, что день будет дождливым?

Решение. A ={день ясный}

$\overline{A}$ ={день дождливый}

Так как сумма противоположных событий равна 1, то вероятность, что день будет дождливым равна 1- 0,3 = 0,7.

Задача 2

Вероятность не сдать зачет по предмету для некоторого студента равна 0,8. Какова вероятность сдать зачет?

Решение

- Обозначим событие А={сдать зачет}. Тогда противоположным событием будет событие Ā={не сдать зачет}.
- Так как P(A)+P(Ā)=1, то P(A)=1-P(Ā)
- Вероятность P(A)=1-0,8=0,2

Вероятностное пространство

- Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из совокупности событий, называемых ***элементарными событиями (элементарными исходами)***:

$$\omega_i, (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют ***пространством элементарных событий*** , Ω

а сами элементарные события – ***точками пространства*** . Ω

Пример

В урне 4 шара: красный, синий, желтый, зеленый. Наудачу вынимают один шар.

Выпишем множество элементарных исходов

ω_1 - вынули красный шар

ω_2 - вынули синий шар

ω_3 - вынули желтый шар

ω_4 - вынули зеленый шар

- Пространство

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

- Точки этого пространства

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$$

Поле событий S

- Поле событий – подмножество множества всех подмножеств Ω, замкнутое относительно операций объединения, пересечения, дополнения, содержащее само Ω и пустое подмножество.

Аксиомы вероятностного пространства:

1. Каждому событию ***A*** поставлено в соответствие неотрицательное действительное число ***P (A).*** Это число называется вероятностью события ***A***;
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$;
3. Вероятность наступления суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Вероятностное пространство

$$\langle \Omega, S, p \rangle$$

Типы пространств

Выделяют два основных типа:

- Дискретное вероятностное пространство;
- Непрерывное вероятностное пространство.

Дискретное вероятностное пространство

- Конечное –
  - классическая схема;
  - неклассическая.
- Бесконечное.

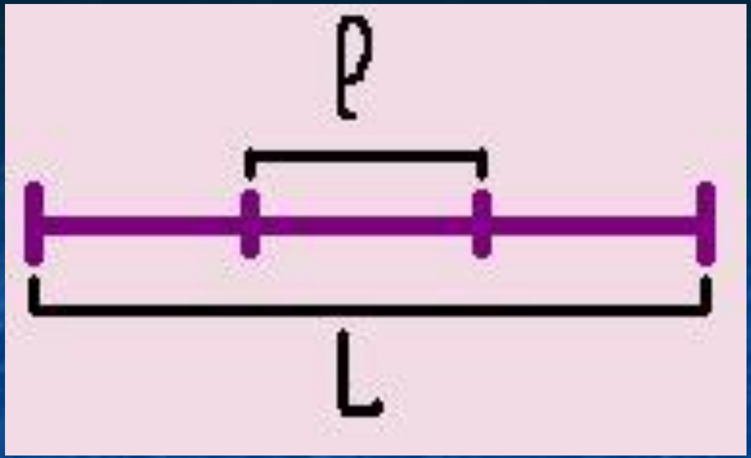
Непрерывное пространство

- **Пример.**

  Случайный эксперимент – измерение роста человека. Случайное событие – произвольное положительное действительное число.

Геометрические вероятности

- ***Геометрические вероятности*** – вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.).



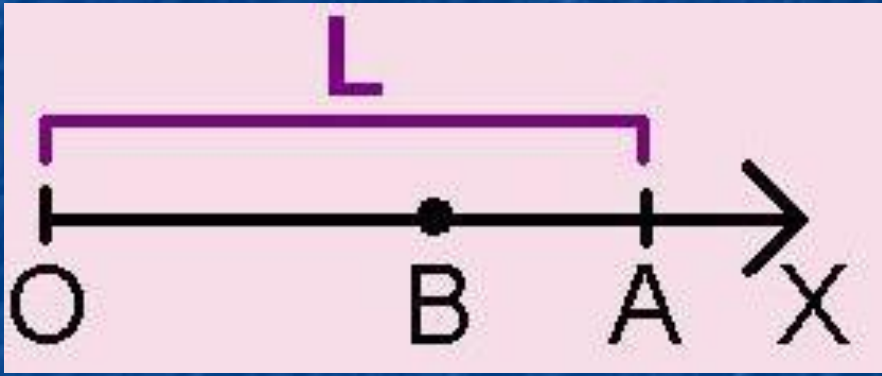
Пусть отрезок l - часть отрезка **L**.
На отрезок **L** наудачу поставлена точка.

Это означает выполнение следующих предположений:
- поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L,
- вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L.

Вероятность попадания точки на отрезок *l* определяется равенством

$$\boxed{P = \frac{\text{Длина } l}{\text{Длина } L}}$$

Пример 1

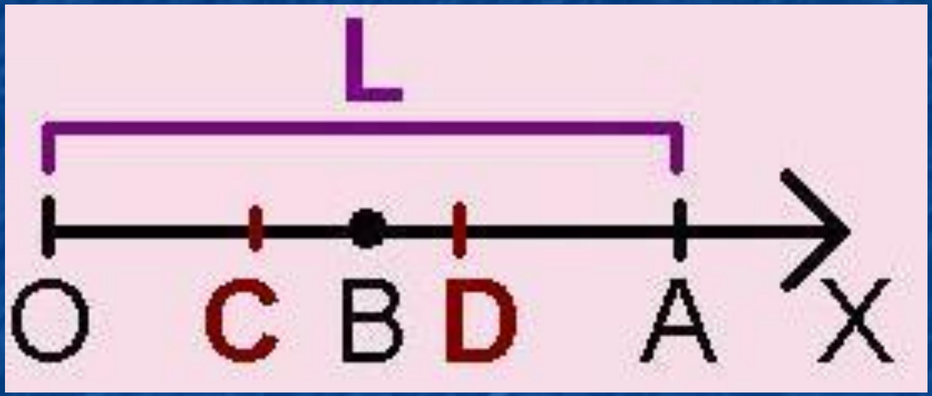


На отрезок **OA** длины **L** числовой оси **Ox** наудачу поставлена точка **B(x).**

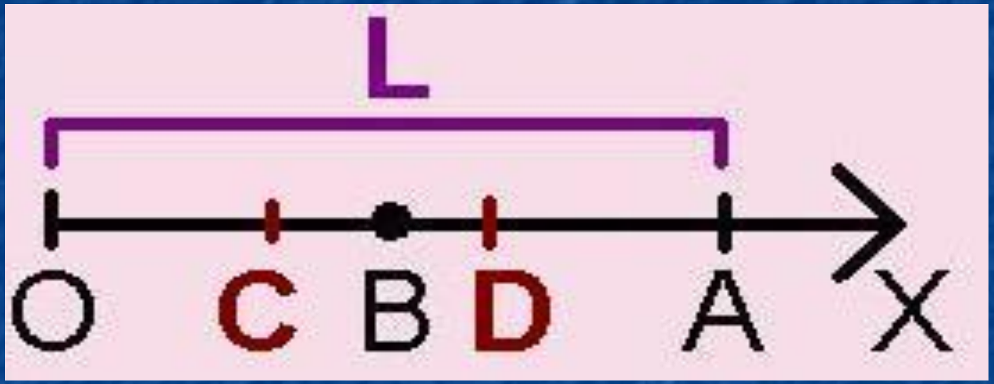
Найти вероятность того, что меньший из отрезков **OB** и **BA** имеет длину, большую $\frac{L}{3}$.

Решение.

Разобьем отрезок ***OA*** точками ***C*** и ***D*** на *3* равных части.



Требование задачи будет выполнено, если точка ***B(x)*** попадет на отрезок ***CD*** длины $\dfrac{L}{3}$.



Искомая вероятность:

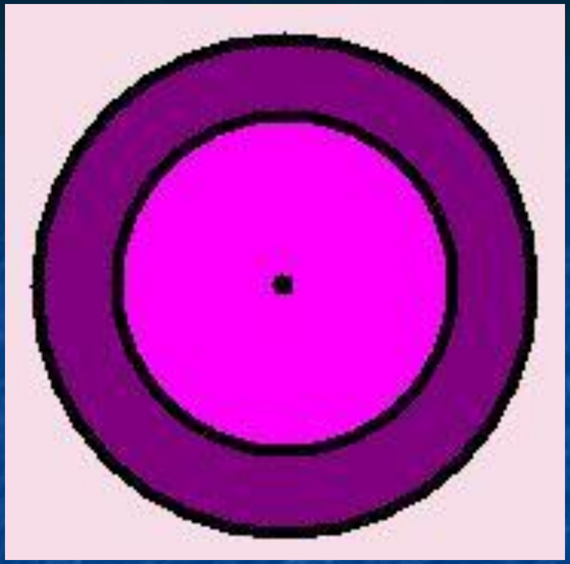
$$P = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3}.$$

Пусть плоская фигура **g** составляет часть плоской фигуры **G**.

На фигуру **G** наудачу брошена точка.

Вероятность попадания точки в фигуру **g** определяется равенством:

$$\boxed{P = \frac{Площадь\ g}{Площадь\ G}}$$



Пример 2

На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.

Решение.

Площадь кольца (фигуры **g**):

$$S_g = \pi 10^2 - \pi 5^2 = 75\pi$$

Площадь большого круга (фигуры **G**):

$$S_G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$$

Искомая вероятность:

$$P = \frac{75\pi}{100\pi} = 0{,}75$$

Замечание

В случае классического определения вероятность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно).

В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места.

Задача о встрече

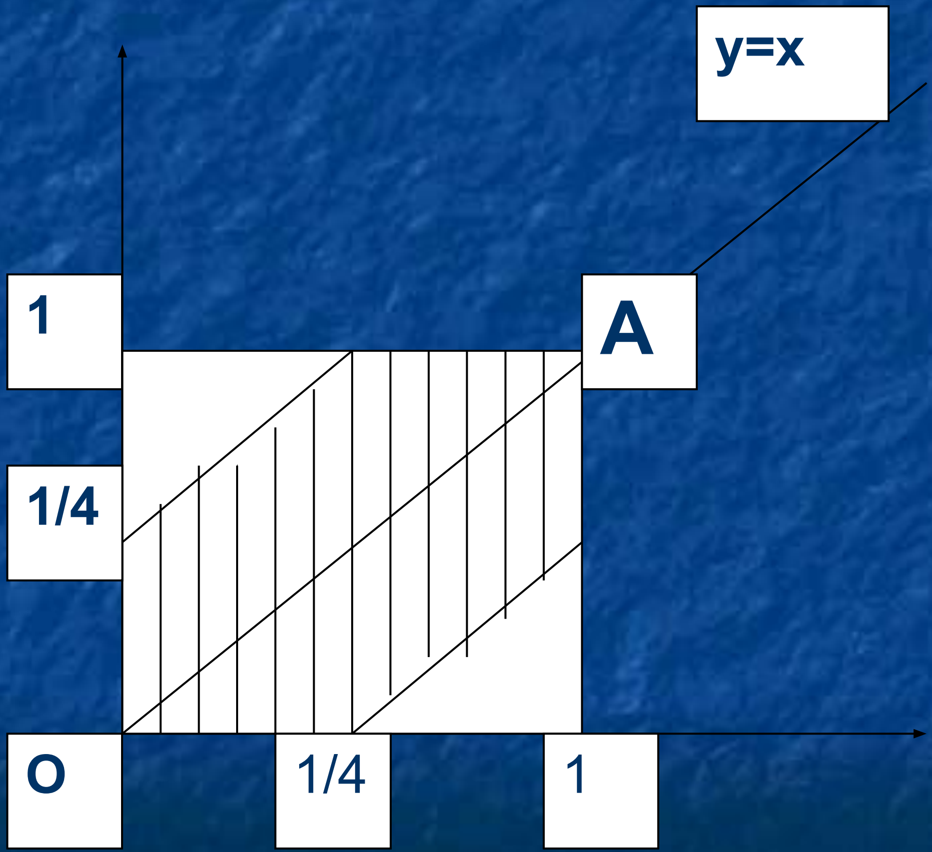
- Два человека договорились встретится в течение часа, причем время ожидания первым относительно второго не превышает 15 минут. Найти вероятность их встречи.

Решение.

Обозначим моменты прихода первого и второго соответственно через ***x*** и ***y***. В силу условия задачи должны выполняться двойные неравенства:

$$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Введем в рассмотрение прямоугольную систему *xOy*.



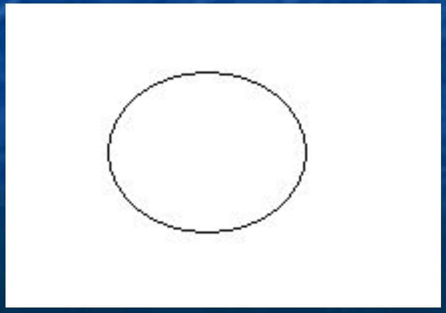
Таким образом,

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1} = \frac{7}{16}$$

Задачи

Задача 1

В прямоугольник 5х4 $см^2$ вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?



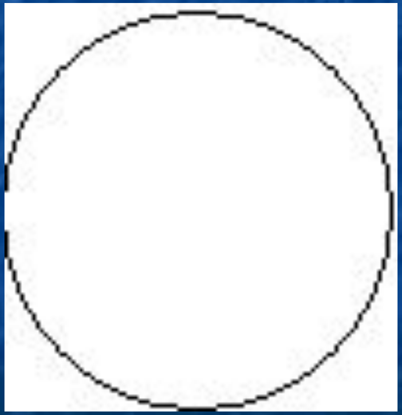
Решение

- По определению геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади круга (в который точка должна попасть) к площади прямоугольника, то есть

$$P(A) = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{5 \cdot 4} = 0{,}353$$

Задача 2

В квадрат со стороной 6 вписан круг. Наудачу в квадрат бросают точку. Найти вероятность, что точка попадет в круг.



Решение

- По определению геометрической вероятности искомая вероятность равна отношению площади квадрата к площади круга
- Площадь квадрата со стороной 6 равна

$S=36$

- Заметим, что радиус вписанного в квадрат круга будет равен половине стороны квадрата, R=3
- Площадь круга с радиусом R=3 равна

$$S = \pi R^2 = \pi 3^2 = 9\pi$$

- Тогда вероятность

$$P(A) = \frac{9\pi}{36} = \frac{\pi}{4}$$

Вопросы к лекции 3

- Напишите гипергеометричекую формулу
- Что называют относительной частотой?
- Что такое статистическая вероятность?
- Сумма событий
- Произведение событий
- Противоположные события. Пример
- Формула вычисления геометрической вероятности

Конец лекции 2