Тема 2.
Парная регрессия и корреляция

Тема 2. Парная регрессия и корреляция

2.1. Основные цели и задачи регрессионного анализа

2.2. Постановка задачи, основные предположения регрессионного анализа

2.3. Парная линейная регрессия и метод наименьших квадратов

2.4. Меры вариации в уравнении регрессии

2.5. Проверка гипотез в модели парной регрессии

2.6. Прогнозирование в регрессионных моделях

Виды связи между явлениями (переменными *Y* и *X*):

- *Функциональная (жестко детерминированная)*. Переменные*Y* и *X* являются неслучайными, значения *Y* полностью определяются соответствующими значениями *X*, т.е.*Y* является некоторой функцией от переменной *X (например, зависимость длины окружности от радиуса)*.
- *Стохастическая (случайно детерминированная)*. Зависимость Y от X проявляется в среднем (в массе случаев). В каждом отдельном случае может не проявиться в силу случайных обстоятельств. Это зависимость среднего значения Y от изменения X *(например, зависимость потребления мяса от дохода):*

\- *Регрессионная. Y* является случайной переменной, а *X* – неслучайной.

\- *Корреляционно-регрессионная. Y* и *X* являются случайными по своей сущности.

По направлению связи различают:

- а) прямую;
- б) обратную.

По виду аналитической функции различают:

- а) линейную связь;
- б) нелинейную связь.

Постановка задачи регрессии

Будем предполагать, что объясняющая переменная X оказывает воздействие на значения переменной Y, которая, таким образом, является зависимой переменной, т. е. имеет место зависимость

$$Y=f(X)$$

Постановка задачи регрессии

Пусть мы располагаем n парами выборочных наблюдений над двумя переменными X и Y: X_1, …, X_n; Y_1, …, Y_n

Функция $f(X)$ называется <u>функцией регрессии</u> Y по X, если она описывает изменение условного среднего значения результирующей переменной Y в зависимости от изменения значений объясняющей переменной X:

$$f(X)=\mathrm{E}(Y \mid X).$$

Модель регрессии между Y и X имеет вид

$$Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i,$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

$f(X)$ - функция регрессии Y по X

ε – случайная составляющая (случайный член, возмущение).

Выбор вида аналитической функции $f(X)$

- используется априорная информация о содержательной экономической сущности анализируемой зависимости – аналитический способ,
- предварительный анализ зависимости с помощью визуализации – графический способ,
- использование различных статистических приемов обработки исходных данных и экспериментальных расчетов.

Парная линейная регрессия и корреляция

Пусть функция f – линейная.

Тогда **модель парной линейной регрессии** примет вид:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i,$$

$i=1,\ldots,n,$

где:

β_0 - свободный член (константа);

β_1 – коэффициент регрессии;

ε – случайная составляющая.

Показатели направления и степени тесноты связи

Для того чтобы иметь основание включить объясняющую переменную X в модель регрессии, необходимо, чтобы между переменными X и Y существовала значимая статистическая связь.

Для оценки направления и степени тесноты статистической связи используются коэффициенты ковариации, корреляции, эмпирическое и теоретическое корреляционные отношения.

Направление линейной связи можно определить с помощью линейного коэффициента ковариации.

Направление и степень тесноты линейной связи – с помощью линейного коэффициента корреляции К. Пирсона.

Коэффициент ковариации

$$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right]}{n}$$

$$cov(x,y) \in \left]-\infty;+\infty\right[$$

Для выявления влияния стажа работы (X) в годах на выработку (Y) в штуках в смену из большого количества рабочих отобраны 5 человек. Ниже приведены результаты обследования.

x	y
1	2
2	4
3	8
4	6
5	10

Задание

1. Оценить параметры модели парной линейной регрессии;
2. Записать уравнение регрессии;
3. Проверить значимость уравнения регрессии в целом;
4. Проверить значимость оценок параметров модели регрессии;
5. Найти границы 95%-ных доверительных интервалов параметров линейной модели регрессии;
6. Дать интерпретацию полученных результатов.

Рассчитать:

1) Среднюю арифметическую
2) Моду
3) Медиану
4) Дисперсию: а) неисправленную; б) исправленную
5) Среднее квадратическое отклонение
6) Коэффициент вариации
7) Коэффициент асимметрии
8) Коэффициент эксцесса
9) Коэффициент ковариации
10) Коэффициент корреляции
11) Коэффициент детерминации

Расчет коэффициента ковариации

[illegible]	x	y			
	1	2	-2	-4	8
	2	4	-1	-2	2
	3	8	0	2	0
	4	6	1	0	0
	5	10	2	4	8
Сумма	**15**	**30**	**0**	**0**	**18**
cov (x,y) = 3,6					

Линейный коэффициент корреляции К.Пирсона

$$r_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

$$r_{x,y} \in \left[-1;+1\right]$$

Дисперсия

$$\sigma^2(x) = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2(x) = \frac{10}{5} = 2$$

[illegible]	x	y					
	1	2	-2	-4	8	4	16
	2	4	-1	-2	2	1	4
	3	8	0	2	0	0	4
	4	6	1	0	0	1	0
	5	10	2	4	8	4	16
Сумма	**15**	**30**	**0**	**0**	**18**	**10**	**40**

Дисперсия

$$\sigma^2(y) = \frac{\sum(y - \bar{y})^2}{n}$$

$$\sigma^2(y) = \frac{40}{5} = 8$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{2}$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(y) = \sqrt{\sigma^2(y)}$$

$$\sigma(y) = \sqrt{8}$$

Линейный коэффициент корреляции К.Пирсона

$$r_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{3,6}{\sqrt{2*8}} = 0,9$$

Коэффициент детерминации

$$r^2{}_{x,y} = (r_{x,y})^2 = (0{,}9)^2 = 0{,}81$$

$$r^2{}_{x,y} \in [0;+1]$$

Коэффициент детерминации показывает, какая часть колеблемости (вариации) Y объясняется колеблемостью (вариацией) X.

Коэффициент детерминации показывает, на сколько процентов Y зависит от X.

Проверка значимости коэффициента корреляции

Формулируем гипотезы

$H_0 : \rho = 0$ (линейной корреляцонной связи между X и Y нет; коэффициент корреляции не значим)

$H_1 : \rho \neq 0$ (между X и Y есть линейная корреляцонная связь; коэффициент корреляции значим)

Устанавливаем уровень значимости α

$$\alpha = 0{,}05$$

Находим наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл.}} = \frac{r_{x,y}}{\sigma_r}$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}$$

Находим наблюдаемое значение критерия

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1 - 0{,}81}{5 - 2}} = 0{,}2517$$

$$t_{\text{набл.}} = \frac{0{,}9}{0{,}2517} = 3{,}58$$

Находим критическое значение критерия по таблице Стьюдента по уровню значимости α и по числу степеней свободы k=n-m

$$t_{\text{кр.}(\alpha;k=n-m)}$$

$$t_{\text{кр.}(\alpha=0{,}05;k=5-2)} = 3{,}18$$

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,00	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,70
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
…	…	…	…	…	…	….
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
…	…	…	…	…	…	….
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,07	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
Число степеней	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая					

Если $|t_{набл.}| > t_{кр.}$, то нулевая гипотеза отклоняется в пользу альтернативной о статистической значимости коэффициента корреляции.

Если $|t_{набл.}| \leq t_{кр.}$, оснований отклонять нулевую гипотезу нет.

$$3,58 > 3,18$$

С надежностью, большей 0,95, и риском ошибиться, меньшим 0,05, можно утверждать, что между X и Y (между стажем и выработкой) в генеральной совокупности (для всех рабочих) существует линейная корреляционная связь.

Доверительный интервал коэффициента корреляции в генеральной совокупности

- $$r_{x,y} - t_{\text{кр.}}\sigma_r < \rho < r_{x,y} + t_{\text{кр.}}\sigma_r$$

$$0{,}9 - 3{,}18 * 0{,}2517 < \rho < 0{,}9 + 3{,}18 * 0{,}2517$$

$$0{,}1 < \rho \leq 1$$

С надежностью 0,95 и риском ошибиться 0,05 можно утверждать, что коэффициент корреляции между X и Y (между стажем и выработкой) в генеральной совокупности (для всех рабочих) находится в интервале от 0,1 до 1.

Модель парной линейной регрессии

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon,$$

где:

β_0 - свободный член (константа);

β_1 – коэффициент регрессии;

ε – случайная составляющая.

Задачи регрессионного анализа

- Для любых значений объясняющей переменной X построить наилучшие по некоторому критерию оценки для неизвестной функции $f(X)$.
- По заданным значениям объясняющей переменной X построить наилучший по некоторому критерию прогноз для неизвестного значения результирующей переменной $Y(X)$.

Эмпирическое уравнение регрессии:

- $$\hat{y}_x = b_0 + b_1 x$$

где

b_0 и b_1 – оценки неизвестных параметров β_0 и β_1

- $$y - \hat{y}_x = e$$

$$y = \hat{y}_x + e$$

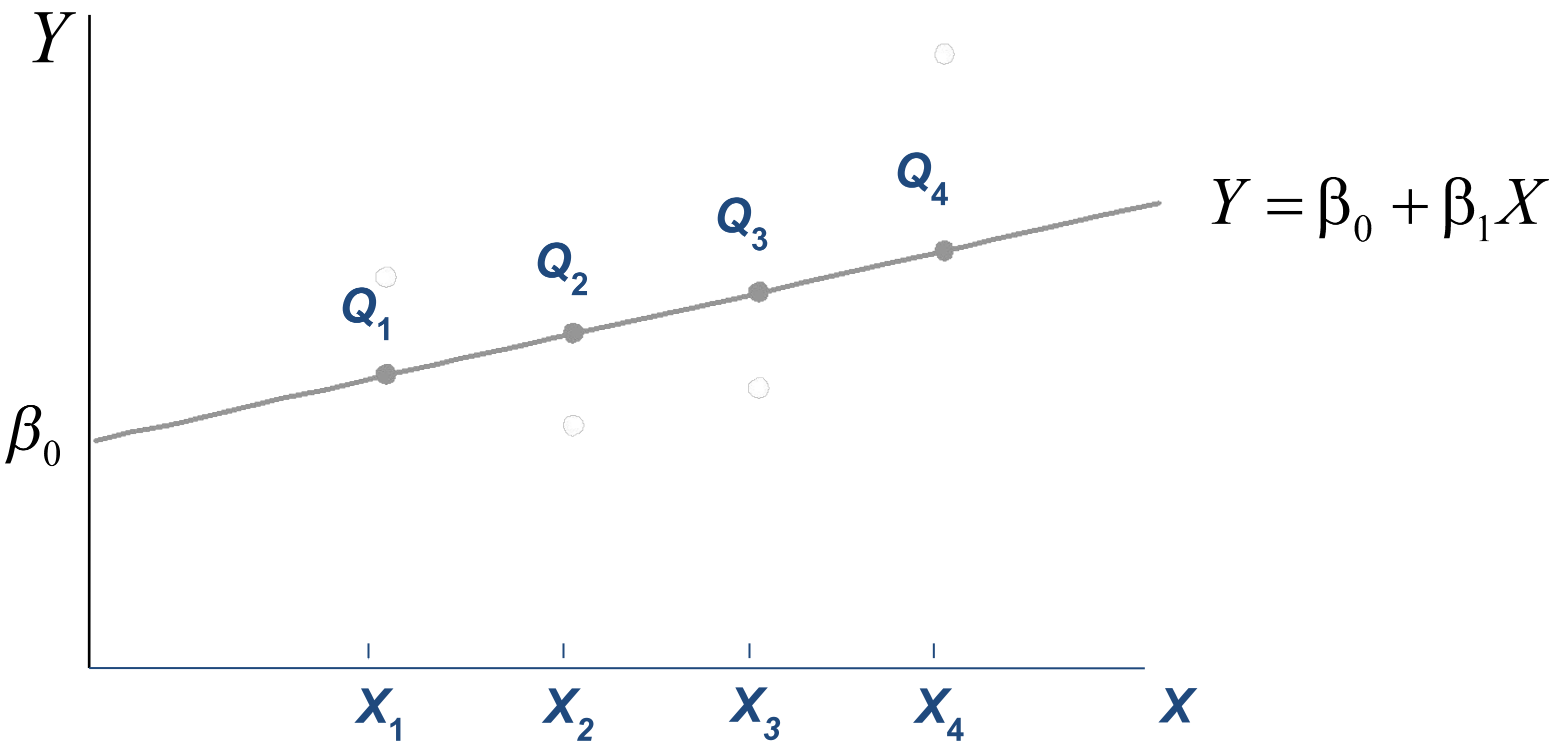
$$y = b_0 + b_1 x + e$$

Модель и уравнение регрессии

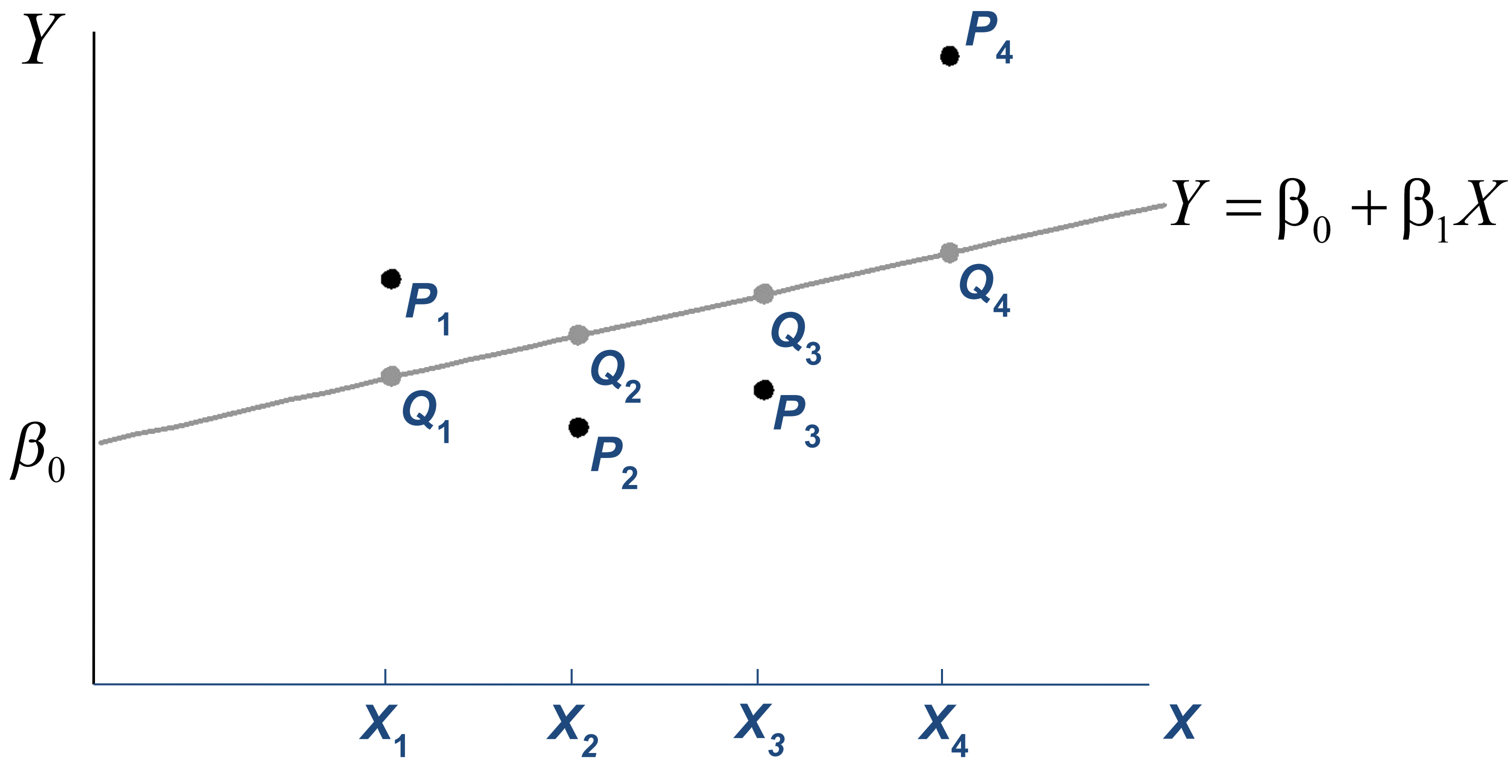
•

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

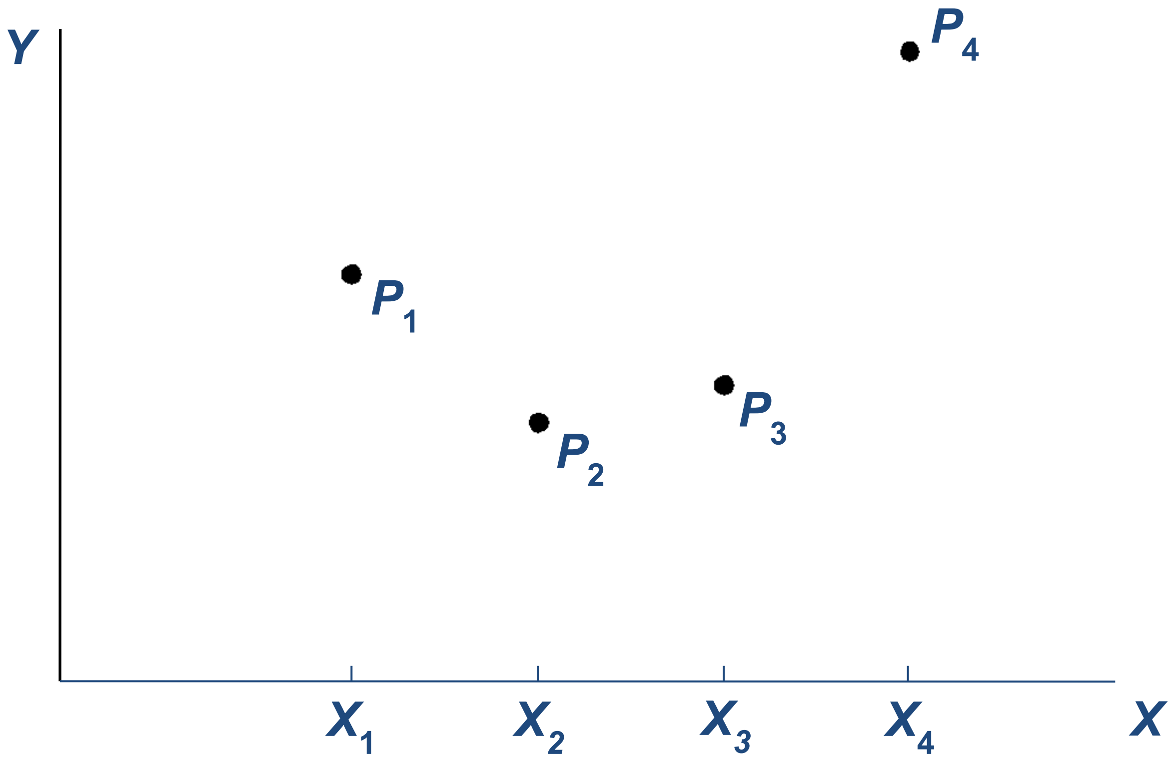
$$y = b_0 + b_1 x + e$$



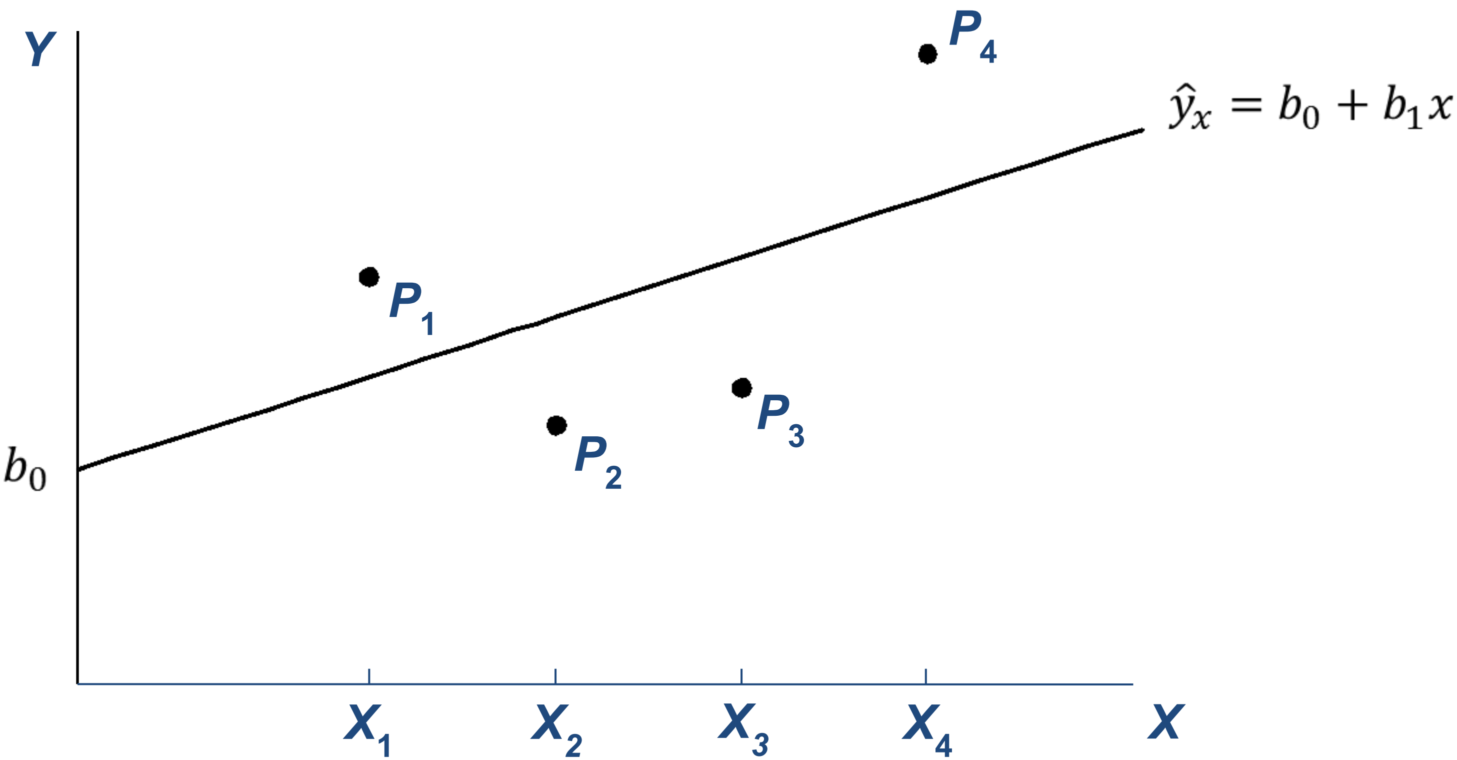
Если связь между переменными X и Y *функциональная*, наблюдения будут в точности лежать на прямой линии.



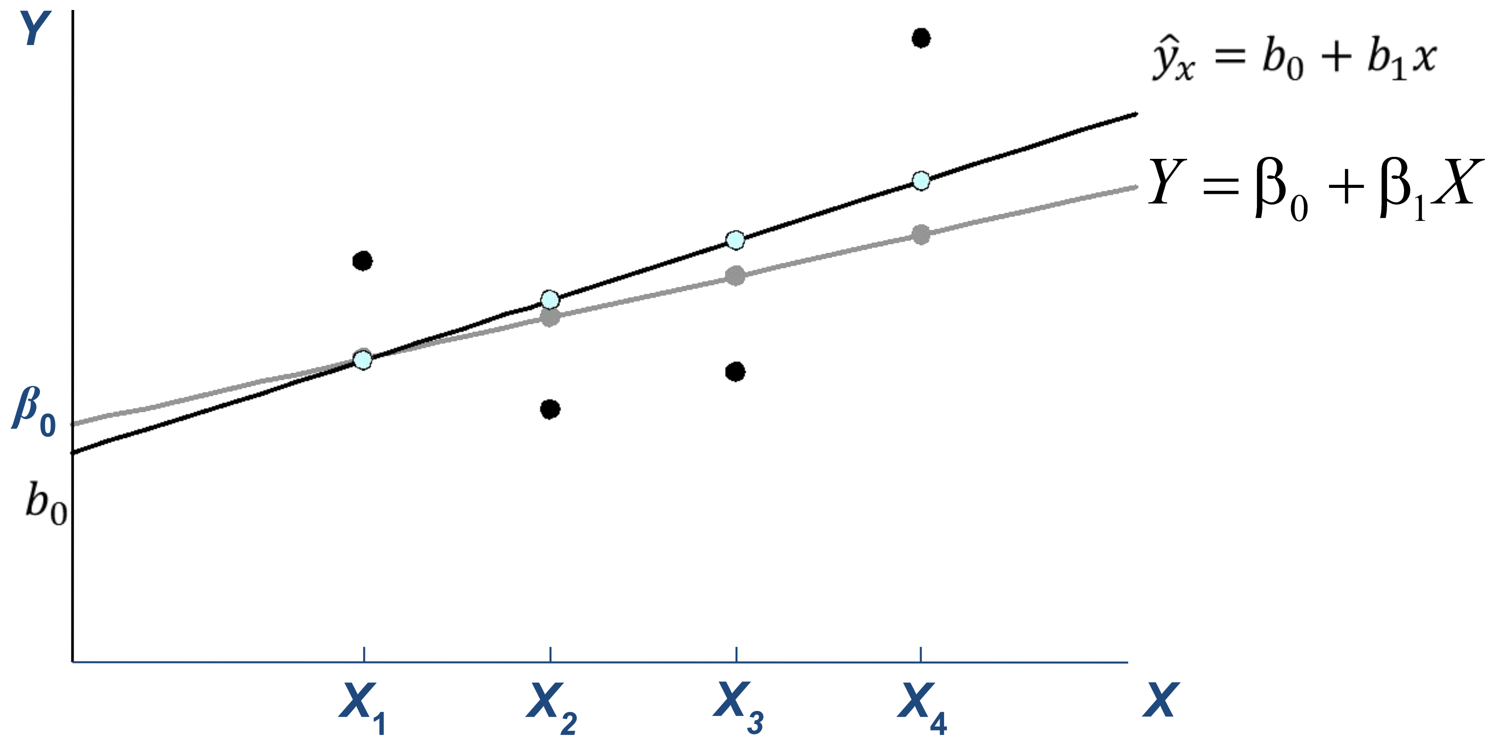
В действительности, большинство экономических связей не являются функциональными и наблюдаемые значения *Y* отличаются от тех, которые лежат на одной прямой.



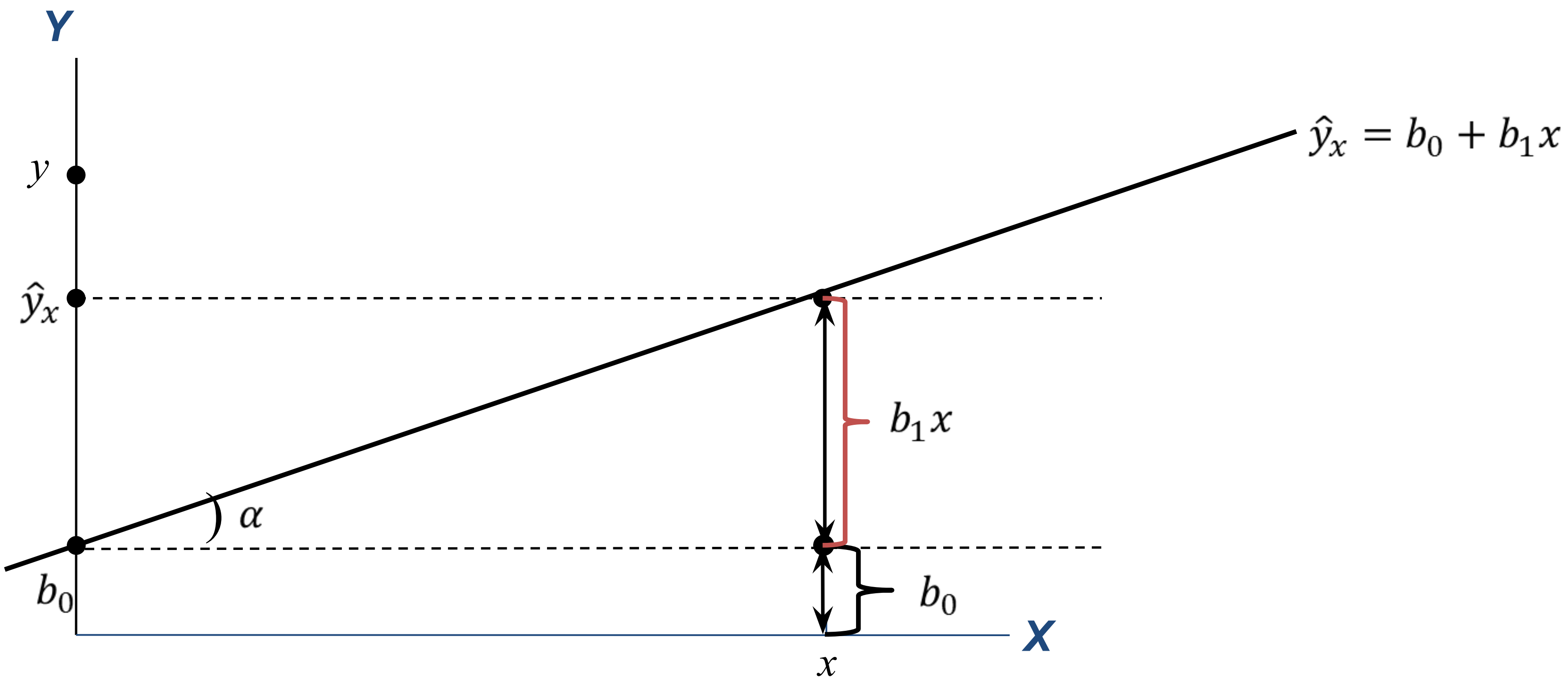
На практике мы наблюдаем только точки *P*.



Очевидно, мы можем использовать точки P для поиска линии, которая приближает $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$. Если записать уравнение прямой $\hat{y}_x = b_0 + b_1 x$ то будет b_0 оценкой β_0 и b_1 оценкой β_1.

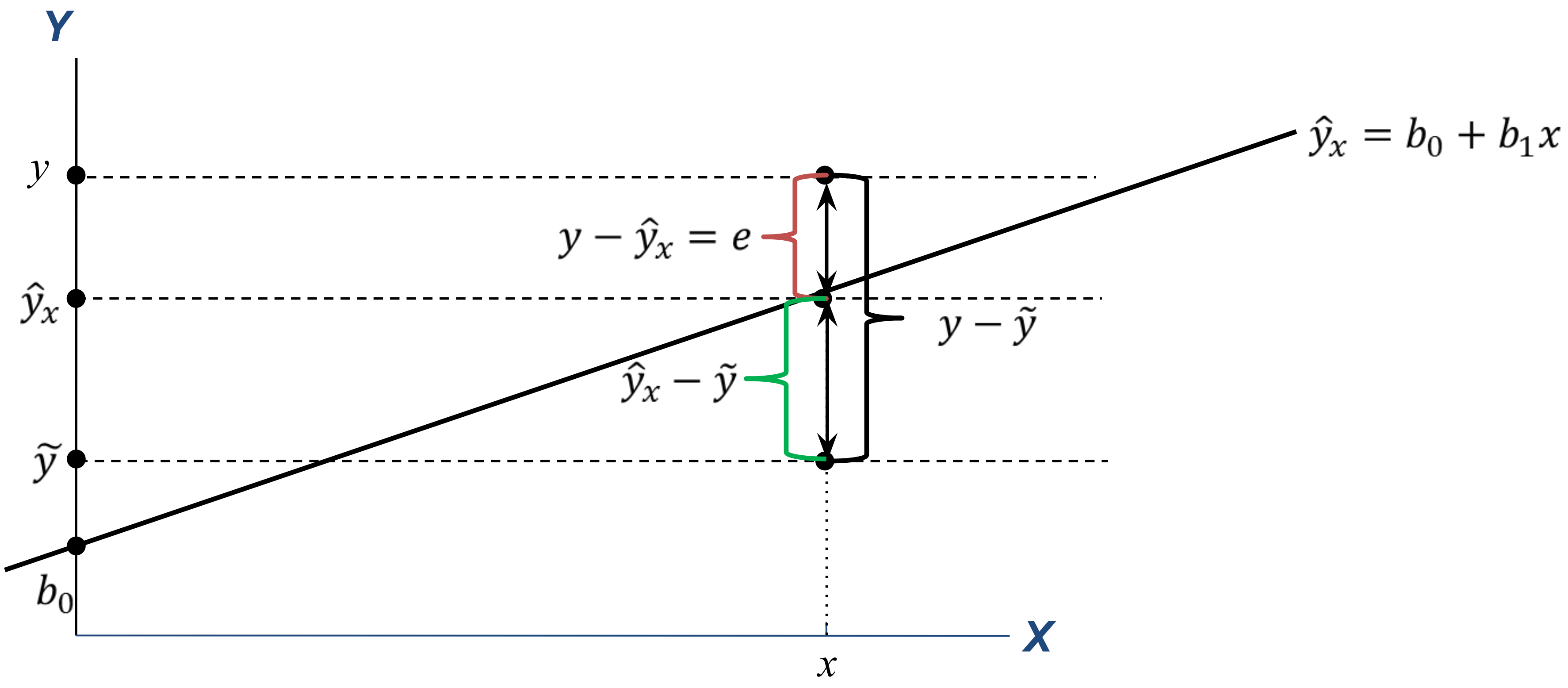


Уравнение регрессии – лишь оценка модели регрессии.



$$tg\,\alpha = b_1$$

Метод наименьших квадратов



-

$$(y - \tilde{y}) = (\hat{y}_x - \tilde{y}) + (y - \hat{y}_x)$$

$$\sum (y - \tilde{y})^2 = \sum (\hat{y}_x - \tilde{y})^2 + \sum (y - \hat{y}_x)^2$$

$$SST = SSR + SSE$$

- $SSR = \sum(\hat{y}_x - \tilde{y})^2$ – сумма квадратов за счет регрессии (объясненная регрессией Y по X часть колеблемости Y);

$SSE = \sum(y - \hat{y}_x)^2$ – сумма квадратов ошибок (остатков) (необъясненная регрессией Y по X часть колеблемости Y);

$SST = \sum(y - \tilde{y})^2$ – общая сумма квадратов, показывает общую колеблемость Y.

$$SST = SSR + SSE$$

Принцип метода наименьших квадратов (МНК) заключается в выборе таких оценок b_0 и b_1, для которых сумма квадратов остатков (ошибок) (е) для всех точек становится минимальной.

$$e = y - \hat{y}_x$$

Для определения оценок параметров модели регрессии b_0 и b_1 необходимо минимизировать выражение:

- $$SSE = \sum e^2 =$$

$$= \sum (y - \hat{y}_x)^2 = \sum (y - b_0 - b_1 x)^2 \to min$$

- Для этого находим частные производные первого порядка и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{dSSE}{db_0} = -2\sum(y - b_0 - b_1 x)^2 = 0 \\ \dfrac{dSSE}{db_1} = -2\sum x(y - b_0 - b_1 x)^2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда получим формулы расчета оценок параметров модели регрессии

$$b_1 = \frac{cov(x, y)}{\sigma^2(x)}$$

$$b_0 = \tilde{y} - b_1 \tilde{x}$$

Для выявления влияния стажа работы (X) в годах на выработку (Y) в штуках в смену из большого количества рабочих отобраны 5 человек. Ниже приведены результаты обследования.

x	y
1	2
2	4
3	8
4	6
5	10

Расчет оценок параметров модели регрессии

$$b_1 = \frac{3,6}{2} = 1,8$$

$$b_0 = 6 - 1,8 * 3 = 0,6$$

Уравнение регрессии

$$\hat{y}_x = b_0 + b_1 x$$

$$\hat{y}_x = 0{,}6 + 1{,}8x$$

Интерпретация коэффициента регрессии

Коэффициент регрессии b_1 показывает на сколько единиц увеличится (уменьшится) в среднем значение зависимой переменной Y (в единицах измерения переменной Y) при увеличении (уменьшении) значения объясняющей переменной X на одну единицу (в единицах измерения переменной X).

Интерпретация константы

Константа b_0 показывает базисный (начальный) уровень, т.е. значение зависимой переменной Y при условии, что объясняющая переменная X равна нулю.

В случае, если такая интерпретация лишена экономического смысла, константа интерпретируется как параметр, отражающий агрегированное влияние переменных, не включенных в модель.

Интерпретация коэффициента регрессии

Коэффициент регрессии b_1 показывает, что при увеличении стажа на 1 год выработка в среднем увеличится на 1,8 штуки в смену.

Интерпретация константы

Константа b_0 показывает, что средняя выработка рабочего, не имеющего стажа, составит 0,6 штуки в смену.

Проверка статистической значимости уравнения регрессии в целом.

Сформулируем гипотезы:

$$H_0 : R^2 = 0$$

Y не зависит от всех X, включенных в модель (уравнение в целом не значимо)

$$H_1 : R^2 > 0$$

Y зависит от всех X (вместе взятых), включенных в модель (уравнение в целом значимо)

Устанавливаем уровень значимости α

$$\alpha = 0{,}05$$

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$F_{набл.} = \frac{SSR/(m-1)}{SSE/(n-m)}$$

где n – число наблюдений,

m – число параметров в модели регрессии (для парной регрессии $m=2$)

Расчет SSR, SSE и SST

[illegible]	x	y				
	1	2	2,4	-0,4	-3,6	-4
	2	4	4,2	-0,2	-1,8	-2
	3	8	6	2	0	2
	4	6	7,8	-1,8	1,8	0
	5	10	9,6	0,4	3,6	4
Сумма	**15**	**30**	**30**	**0**	**0**	**0**

Расчет SSR, SSE и SST

[illegible]		
0,16	12,96	16
0,04	3,24	4
4	0	4
3,24	3,24	0
0,16	12,96	16
7,6	32,4	40
SSE	SSR	SST

Найдем наблюдаемое значение критерия

$$F_{\text{набл.}} = \frac{32{,}4/(2-1)}{7{,}6/(5-2)} = 12{,}79$$

По таблице распределения Фишера найдем критическое значение критерия:

$$F_{кр} = F(\alpha; m-1; n-m)$$

$$F_{кр} = F(\alpha = 0{,}05; 2-1; 5-2) = 10{,}13$$

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
K_2 \ K_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Если $F_{набл.} > F_{кр.}$, то нулевая гипотеза отклоняется в пользу альтернативной о статистической значимости уравнения регрессии в целом. Если $F_{набл.} \leq F_{кр.}$, оснований отклонять нулевую гипотезу нет.

$$12{,}79 > 10{,}13$$

С надежностью, большей 0,95, и риском ошибиться, меньшим 0,05, можно утверждать, что Y (выработка) зависит от всех X, включенных в модель (от стажа).

Проверка статистической значимости коэффициента регрессии

Сформулируем гипотезы

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

Y не зависит от данного конкретного X (коэффициент регрессии не значим)

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Y зависит от данного конкретного X (коэффициент регрессии значим)

Устанавливаем уровень значимости α

$$\alpha = 0{,}05$$

Находим наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл.}} = \frac{b_1}{S_{b_1}}$$

S_{b_1}- стандартная ошибка коэффициента регрессии

$$S_{b_1} = \sqrt{\frac{S_{yx}^2}{n\sigma^2(x)}}$$

Стандартная ошибка уравнения регрессии

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{SSE}{n-m}}$$

- $$S_{yx} = \sqrt{\frac{7,6}{5-2}} = \sqrt{2,53} = 1,5916$$

Стандартная ошибка коэффициента регрессии

$$S_{b_1} = \sqrt{\frac{2,53}{5 * 2}} = 0,5033$$

Находим наблюдаемое значение критерия

$$t_{\text{набл.}} = \frac{1,8}{0,5033} = 3,58$$

Находим критическое значение критерия по таблице Стьюдента по уровню значимости α и по числу степеней свободы k=n-m

$$t_{\text{кр.}(\alpha;k=n-m)}$$

$$t_{\text{кр.}(\alpha=0,05;k=5-2)} = 3,18$$

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	**3,18**	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,00	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,70
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
…	…	…	…	…	…	….
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
…	…	…	…	…	…	….
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,07	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
Число степеней	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая					

Если $|t_{набл.}| > t_{кр.}$, то нулевая гипотеза отклоняется в пользу альтернативной о статистической значимости коэффициента регрессии.

Если $|t_{набл.}| \leq t_{кр.}$, оснований отклонять нулевую гипотезу нет.

$3{,}58 > 3{,}18$

С надежностью, большей 0,95, и риском ошибиться, меньшим 0,05, можно утверждать, что Y (выработка) зависит от данного конкретного X (от стажа).

Проверка статистической значимости константы

Сформулируем гипотезы

$$H_0 : \beta_0 = 0$$

Константа не значима (незначимо отличается от 0)

$$H_1 : \beta_0 \neq 0$$

Константа значима (значимо отличается от 0)

Устанавливаем уровень значимости α

$$\alpha = 0{,}05$$

Наблюдаемое значение критерия

$$t_{набл} = \frac{b_0}{S_{b_0}}$$

S_{b_0}- стандартная ошибка константы

Стандартная ошибка константы:

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{S^2{}_{yx}}{n}\left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{\sigma^2(x)}\right)}$$

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{2,53}{5}\left(1 + \frac{3^2}{2}\right)} = 1,6693$$

Наблюдаемое значение критерия

$$t_{набл} = \frac{0,6}{1,6693} = 0,36$$

Находим критическое значение критерия по таблице Стьюдента по уровню значимости α и по числу степеней свободы k=n-m

$$t_{\text{кр.}(\alpha;k=n-m)}$$

$$t_{\text{кр.}(\alpha=0,05;k=5-2)} = 3{,}18$$

Если $|t_{набл.}| > t_{кр.}$, то нулевая гипотеза отклоняется в пользу альтернативной о статистической значимости константы.

Если $|t_{набл.}| \leq t_{кр.}$, оснований отклонять нулевую гипотезу нет.

$$0{,}36 < 3{,}18$$

На уровне значимости α=0,05 константа не значима.

Доверительные интервалы неизвестных значений β_1 и β_0

$$b_1 - t_{\text{кр}} S_{b_1} < \beta_1 < b_1 + t_{\text{кр}} S_{b_1}$$

$$b_0 - t_{\text{кр}} S_{b_0} < \beta_0 < b_0 + t_{\text{кр}} S_{b_0}$$

Доверительный интервал неизвестного значения β_1

- $$b_1 - t_{\text{кр.}} S_{b_1} < \beta_1 < b_1 + t_{\text{кр.}} S_{b_1}$$

$$1{,}8 - 3{,}18 * 0{,}5033 < \beta_1 < 1{,}8 + 3{,}18 * 0{,}5033$$

$$0{,}2 < \beta_1 < 3{,}4$$

С надежностью 0,95 и риском ошибиться 0,05 можно утверждать, что коэффициент регрессии в генеральной совокупности (для всех рабочих) находится в интервале от 0,2 до 3,4.

При увеличении стажа на 1 год выработка в среднем увеличится от 0,2 до 3,4 штуки в смену.

Так как интервал не включает 0, коэффициент регрессии значим.

Доверительный интервал неизвестного значения β_0

- $$b_0 - t_{\text{кр.}} S_{b_0} < \beta_0 < b_0 + t_{\text{кр.}} S_{b_0}$$

$$0{,}6 - 3{,}18 * 1{,}6693 < \beta_0 < 0{,}6 + 3{,}18 * 1{,}6693$$

$$-4{,}71 < \beta_0 < 5{,}91$$

С надежностью 0,95 и риском ошибиться 0,05 можно утверждать, что константа в генеральной совокупности (для всех рабочих) находится в интервале от -4,71 до 5,91.

Так как интервал включает 0, константа не значима.

Точечный прогноз по уравнению регрессии

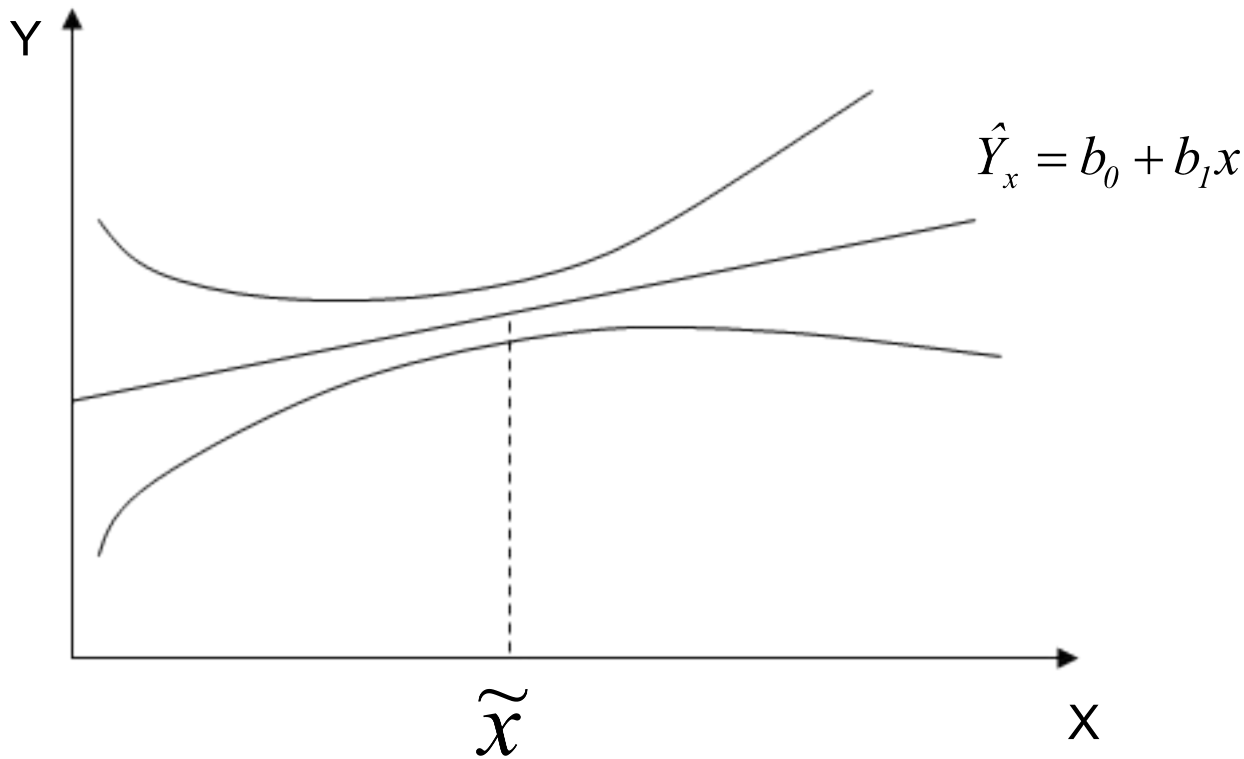
$$\hat{y}_{x^*} = b_0 + b_1 x^*$$

Точечный прогноз по уравнению регрессии

$$\hat{y}_x = 0,6 + 1,8x$$

$$x^* = 2,5$$

$$\hat{y}_{x=2,5} = 0,6 + 1,8 * 2,5 = 5,1 шт.$$


Y
$\hat{Y}_x = b_0 + b_1 x$
$\tilde{x}$
X

Интервальный прогноз неизвестного среднего генерального значения Y

$$\hat{Y}_{x*} - t_{кр} S_{yx} \sqrt{h^*} < \overline{Y_г} < \hat{Y}_{x*} + t_{кр} S_{yx} \sqrt{h^*}$$

$$h^* = \frac{1}{n} + \frac{\left(x^* - \widetilde{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widetilde{x}\right)^2} = \frac{1}{n} + \frac{(x^* - \widetilde{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}$$

$$t_{кр} = 3{,}18$$

$$S_{yx} = 1{,}5916$$

$$h^* = \frac{1}{5} + \frac{(2{,}5 - 3)^2}{55 - \frac{15^2}{5}} = 0{,}225$$

Интервальный прогноз неизвестного среднего генерального значения Y

$$5{,}1 - 3{,}18 * 1{,}5916 * \sqrt{0{,}225} < \overline{Y_{г}} < 5{,}1 + 3{,}18 * 1{,}5916 * \sqrt{0{,}225}$$

$$2{,}7 < \overline{Y_{г}} < 7{,}5$$

- С надежностью 0,95 можно утверждать, что средняя выработка рабочих со стажем 2.5 года находится в интервале от 2,7 до 7,5 шт.

Интервальный прогноз неизвестного индивидуального значения Y

$$\hat{Y}_{x*} - t_{кр} S_{yx} \sqrt{1 + h^*} < Y_и < \hat{Y}_{x*} + t_{кр} S_{yx} \sqrt{1 + h^*}$$

Интервальный прогноз неизвестного индивидуального значения Y

$$5{,}1-3{,}18*1{,}5916*\sqrt{1+0{,}225}<Y_{и}<5{,}1+3{,}18*1{,}5916*\sqrt{1+0{,}225}$$

$$5{,}1-5{,}6<Y_{и}<5{,}1+5{,}6$$

$$0<Y_{и}<10{,}7$$

- С надежностью 0,95 можно утверждать, что выработка рабочего со стажем 2.5 года находится в интервале от 0 до 10,7 шт.