Задачи небесной механики

Задачи небесной механики (4^h).

1. Закон всемирного тяготения.
2. Законы Кеплера. Орбиты планет и комет.
3. Понятие о задаче трёх тел.
4. Устойчивость планетной системы.
5. Поверхность и предел Роша.

Закон всемирного тяготения

Идея всеобщей силы тяготения неоднократно высказывалась и до Ньютона. Ранее о ней размышляли Эпикур, Гассенди, Кеплер, Борелли, Декарт, Роберваль, Гюйгенс и другие.

В своём основном труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) Исаак Ньютон вывел закон тяготения, основываясь на ***эмпирических*** законах Кеплера, известных к тому времени. Он показал, что:

- наблюдаемые движения планет свидетельствуют ***о наличии центральной силы***;
- центральная сила притяжения приводит к ***эллиптическим (или гиперболическим) орбитам***.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad G \cong 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг с}^2}$$

$$\vec{F} = -Gm_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \varphi(r) = -Gm\frac{1}{r}$$

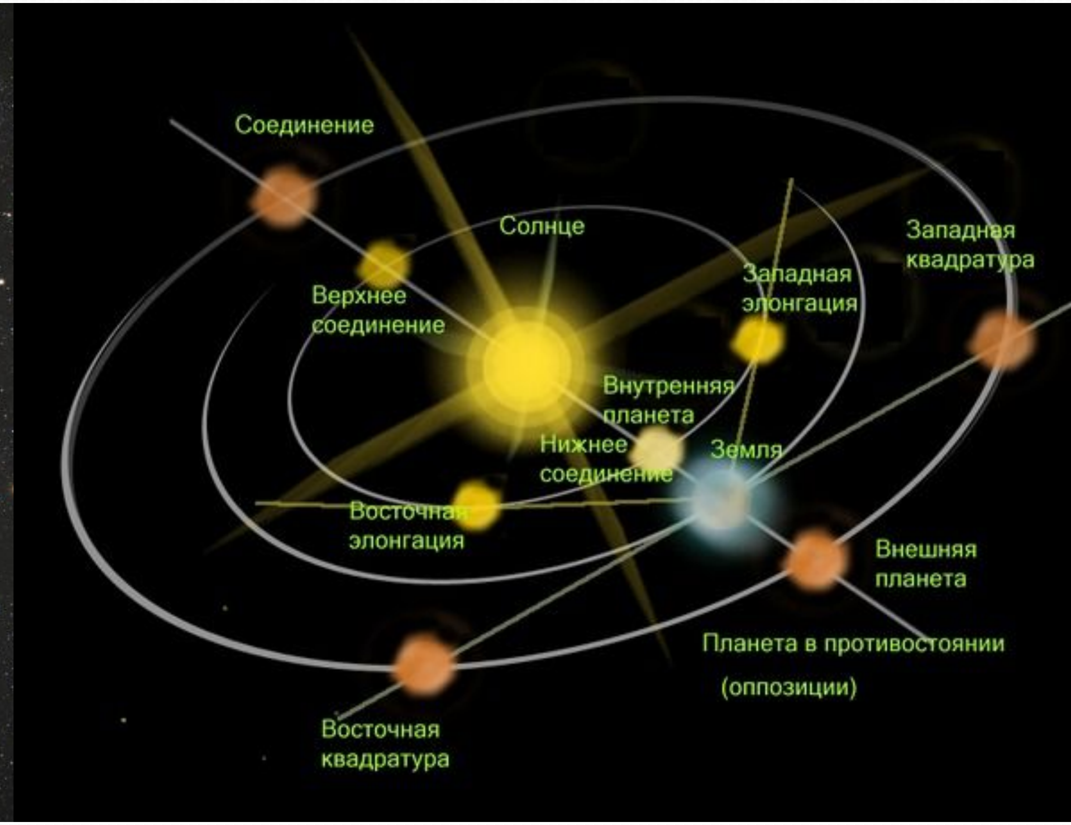
Теория Ньютона оказалась приближением более общей теории относительности, применимым при выполнении двух условий:

1. Гравитационный потенциал в исследуемой системе не слишком велик:
$$\frac{\varphi}{\text{c}^2} \ll 1.$$
2. Скорости движения в этой системе незначительны по сравнению со скоростью света:
$$\frac{v}{c} \ll 1.$$

Законы Кеплера.
Орбиты планет и комет

Видимое движение планет


Ретроградное движение Марса



Прямое движение – с запада на восток
Обратное движение – с востока на запад

Конфигурация нижних планет

У нижних планет и других небесных тел, чьи орбиты расположены внутри земной орбиты, различают:

1. соединения с Солнцем при которых планета и Солнце имеют одинаковую эклиптическую долготу (или одинаковое прямое восхождение)
   - верхнее соединение (Солнце находится между планетой и Землей)
   - нижнее соединение (планета находится между Солнцем и Землей)

2. наибольшие элонгации, соответствующие наибольшему видимому угловому расстоянию планеты от Солнца:
   - наибольшую восточную элонгацию
   - наибольшую западную элонгацию.

Вблизи верхнего соединения нижние планеты недоступны для наблюдения, так как находятся за Солнцем, скрываясь в его лучах. Непосредственно перед нижним соединением и после него нижние планеты видны в виде узкого серпа. Во время нижнего соединения возможно прохождение Меркурия или Венеры по диску Солнца, однако из-за относительного наклона планетарных орбит фактическое прохождение происходит достаточно редко, обычно при нижнем соединении нижняя планета находится выше или ниже Солнца по эклиптической широте. В элонгациях нижние планеты имеют вид светлого полудиска.

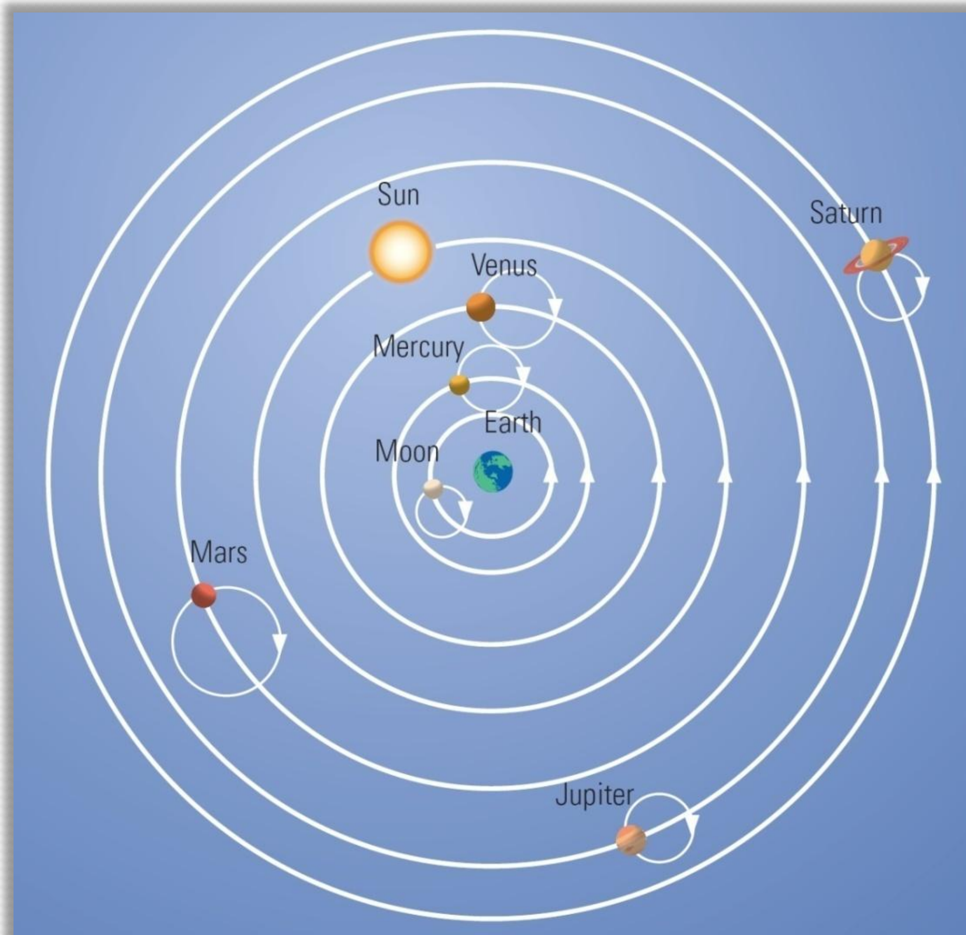
Конфигурация верхних планет и Луны

У Луны, верхних планет, а также других тел Солнечной системы, чья орбита лежит полностью вне земной орбиты, различают:

1. соединения с Солнцем, при которых планета и Солнце имеют одинаковую эклиптическую долготу (или одинаковое прямое восхождение);
2. противостояния, при которых эклиптические долготы (прямое восхождение) планеты и Солнца отличаются на 180°;
3. восточные и
4. западные квадратуры.

Вблизи соединений верхние планеты находятся за Солнцем и не видны.

Клавдий Птолемей. II в. н. э.



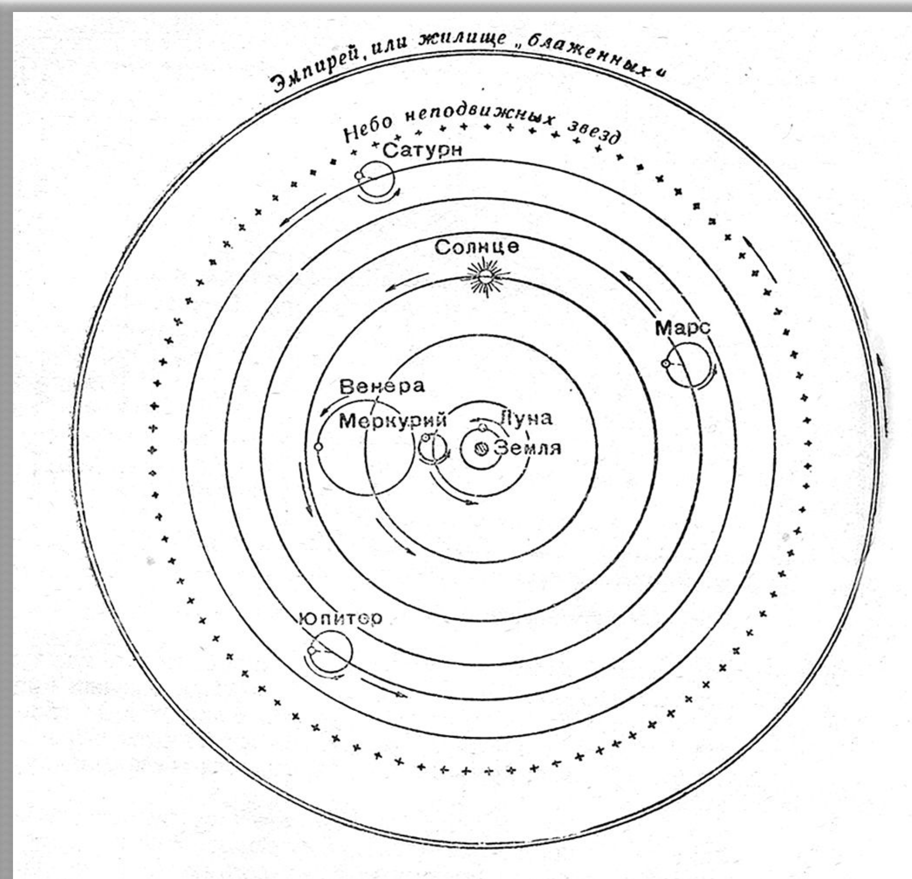
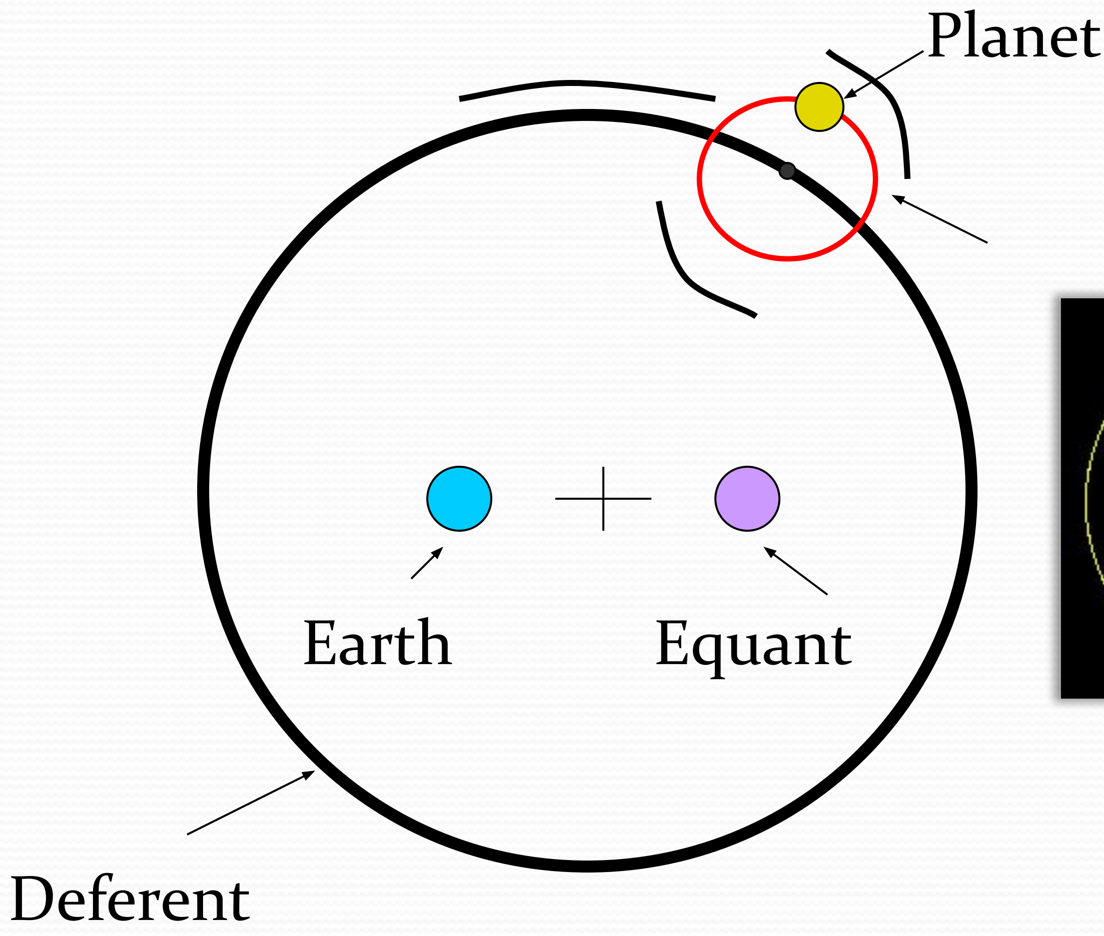
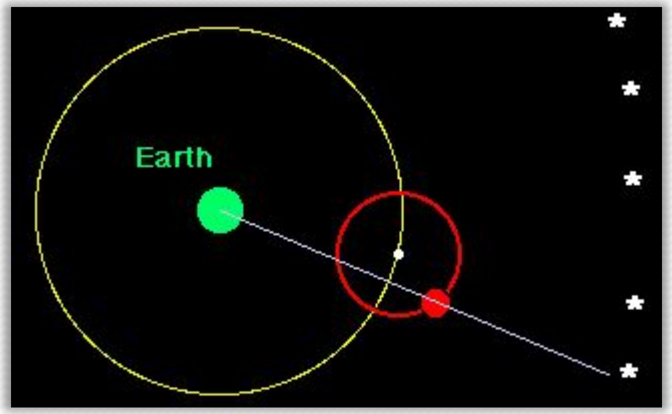
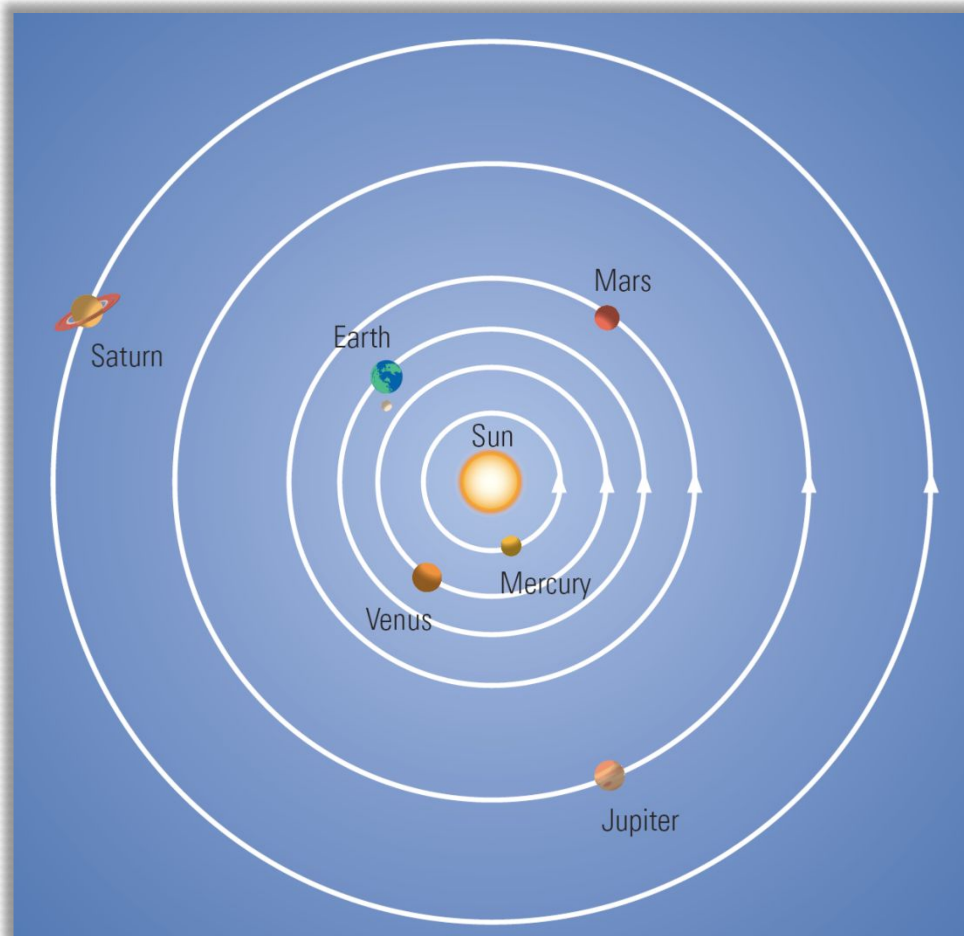


Рис. 75. Птолемеева система, преподававшаяся до XVII столетия.


Planet
Earth
Equant
Deferent


Earth

Николай Коперник (1473 – 1543)



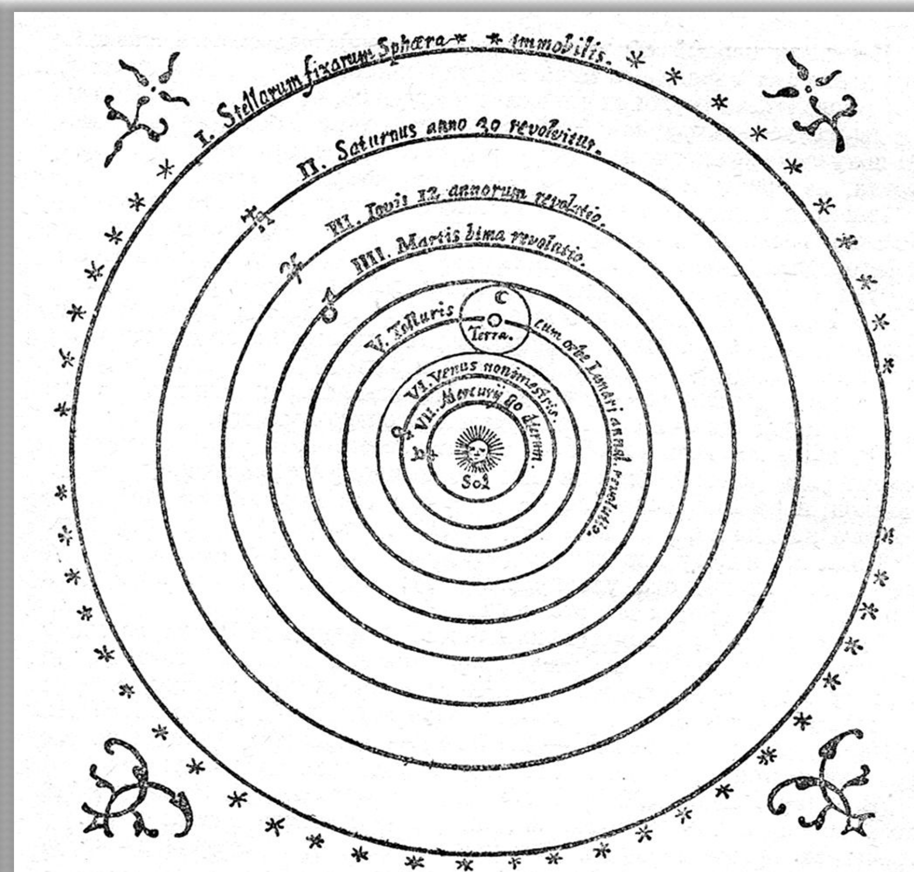
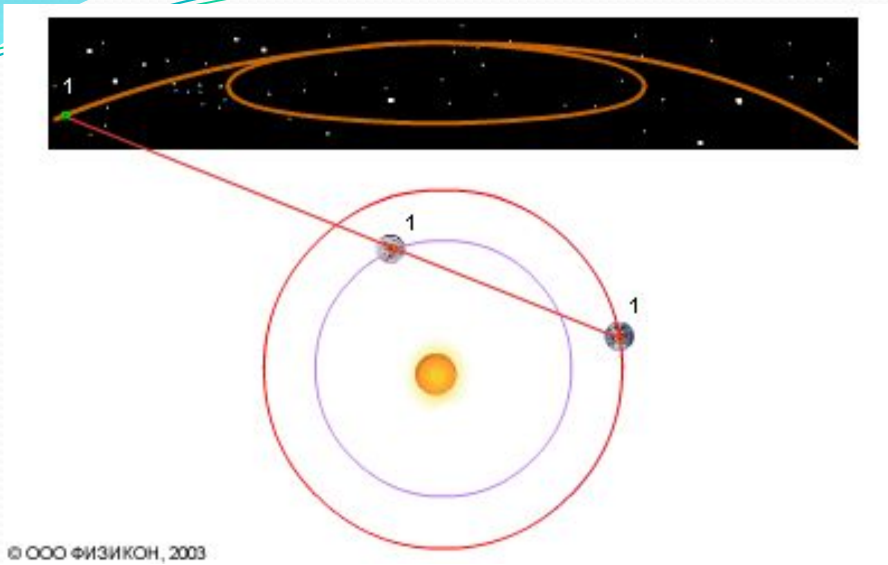
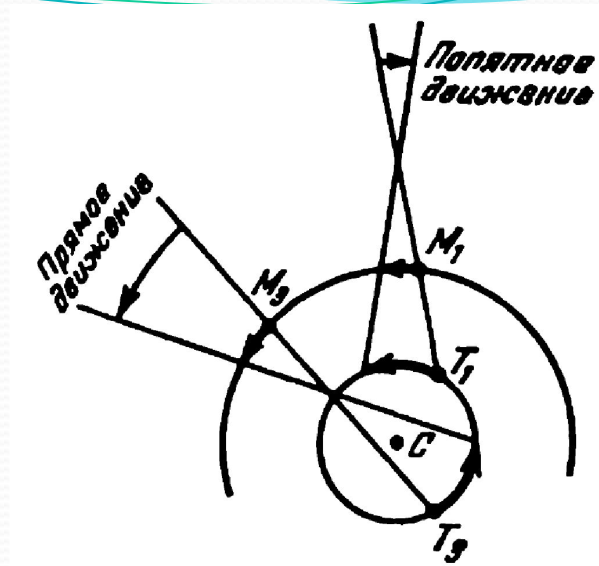
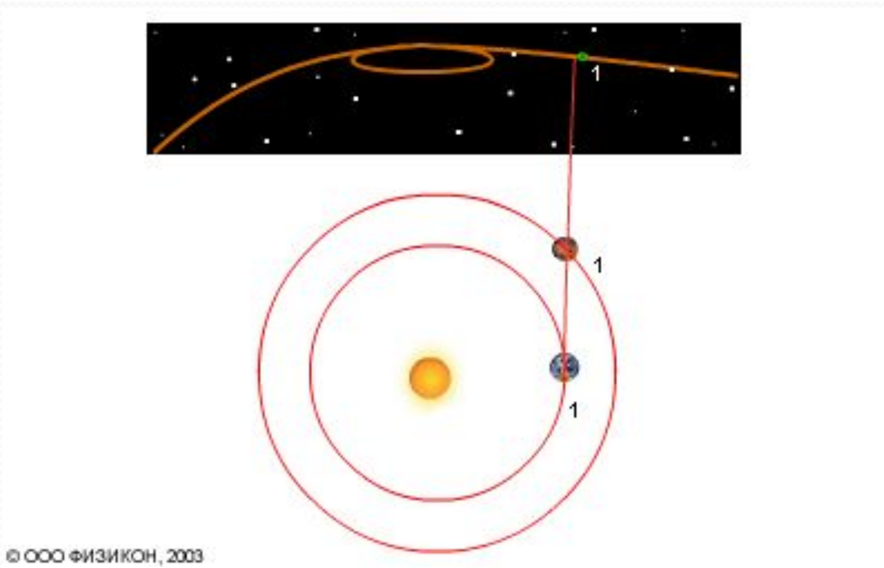
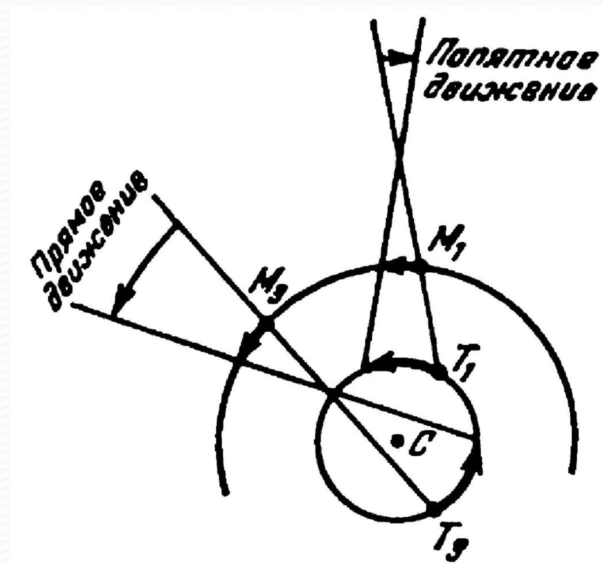


Рис. 76. Система Коперника. Рисунок из сочинения Коперника (1543 год).


1
1
1
© ООО ФИЗИКОН, 2003


Попятное движение
Прямое движение
M_1
M_2
T_1
T_2
C


1
1
1
© ООО ФИЗИКОН, 2003


Попятное движение
Прямое движение
M_1
M_2
T_1
T_2
C

Синодический и сидерический периоды обращения планет

Синодическим периодом обращения (S) планеты называется промежуток времени между ее двумя последовательными одноименными конфигурациями.

Сидерическим, или звездным периодом обращения (T) планеты называется промежуток времени, в течение которого планета совершает один полный оборот вокруг Солнца по своей орбите.

Сидерический период обращения Земли называется ***звездным годом*** ($T_{\oplus}$).

Между этими тремя периодами можно установить простую математическую зависимость из следующих рассуждений. Угловое перемещение по орбите за сутки у планеты равно 360°/T, а у Земли 360°/ $T_{\oplus}$. Разность суточных угловых перемещений планеты и Земли (или Земли и планеты) есть видимое смещение планеты за сутки, т. е. 360°/S. Отсюда для нижних планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\oplus}}$$

Для верхних планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T}$$

Непосредственно из наблюдений могут быть определены только синодические периоды обращения планет S и сидерический период обращения Земли.

Законы Кеплера

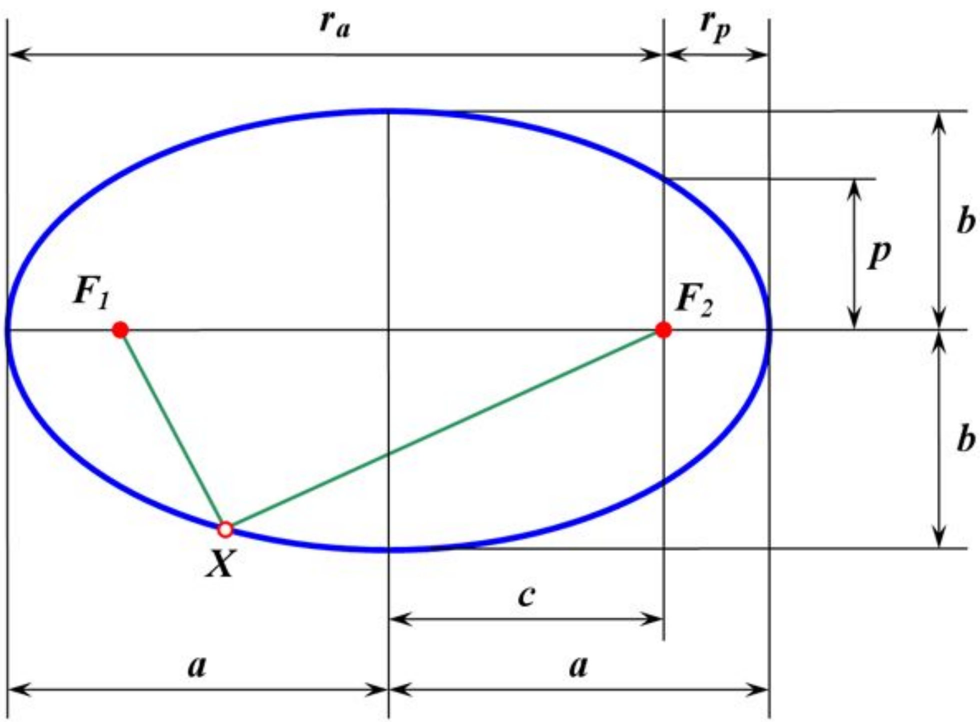
1. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце.

2. Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равновеликие площади.

3. Квадраты сидерических периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

Законы получены как обобщение данных наблюдений

I закон Кеплера



a – большая полуось;
b – малая полуось;
c – фокальный радиус (полурасстояние между фокусами);
p – фокальный параметр;
r_p – перифокусное расстояние (минимальное расстояние от фокуса до точки на эллипсе);
r_a – апофокусное расстояние (максимальное расстояние от фокуса до точки на эллипсе);

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (0 \leq e < 1)$$

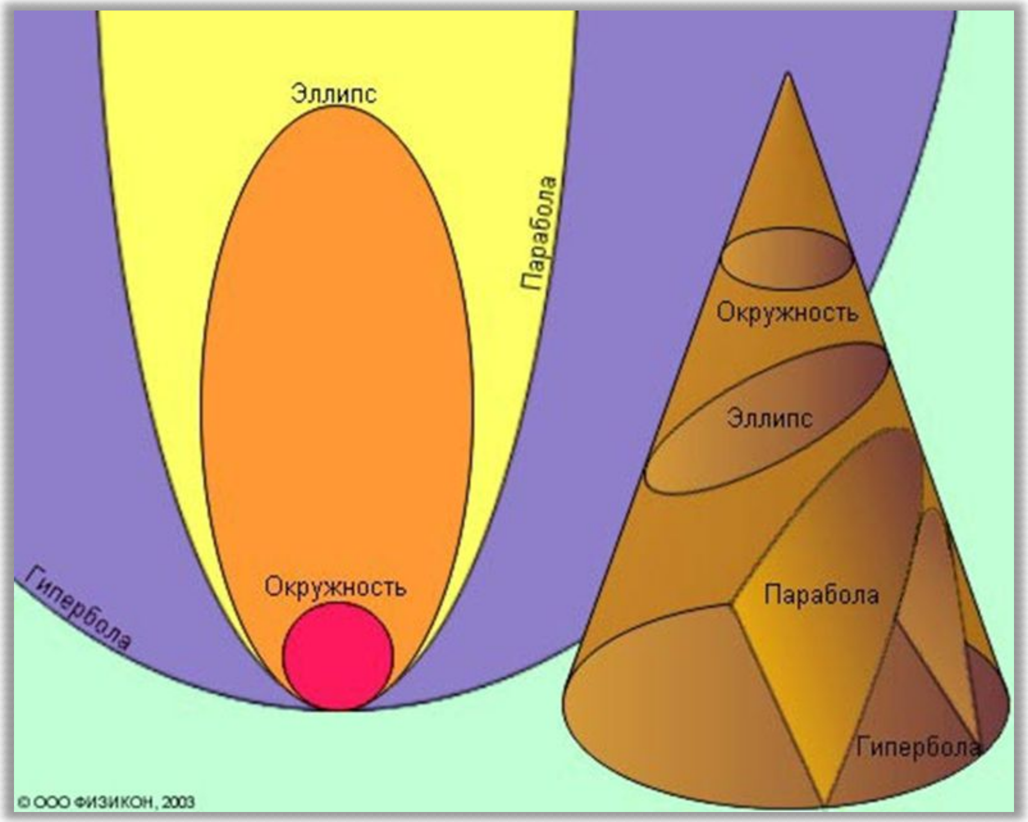
$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

Первый закон Кеплера. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Современная формулировка первого закона: в невозмущенном движении орбита движущегося тела есть кривая второго порядка – эллипс, парабола или гипербола.



Траектории в ограниченной задаче двух тел

II закон Кеплера

Второй закон Кеплера (закон равных площадей). Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равновеликие площади. **Другая формулировка этого закона**: секториальная скорость планеты постоянна.

$v_q = v_c \sqrt[2]{\frac{1+e}{1-e}}$ – в перигелии (максимальная)

$v_Q = v_c \sqrt[2]{\frac{1-e}{1+e}}$ – в афелии (минимальная)

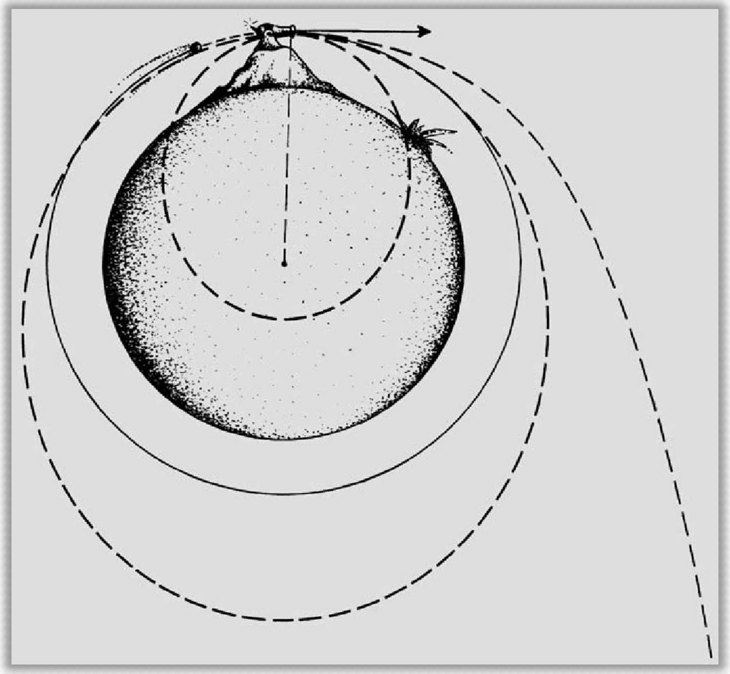
$v_c = \sqrt[2]{v_Q v_q}$ – средняя или круговая скорость планеты при r = a (аналог первой космической скорости).
Круговая скорость Земли равна 29.78 км/с.

Первая космическая скорость может быть просто вычислена для случая кругового движения. Центробежное ускорение равно силе притяжения.

$$m\frac{v_1^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2},$$

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{r}},$$

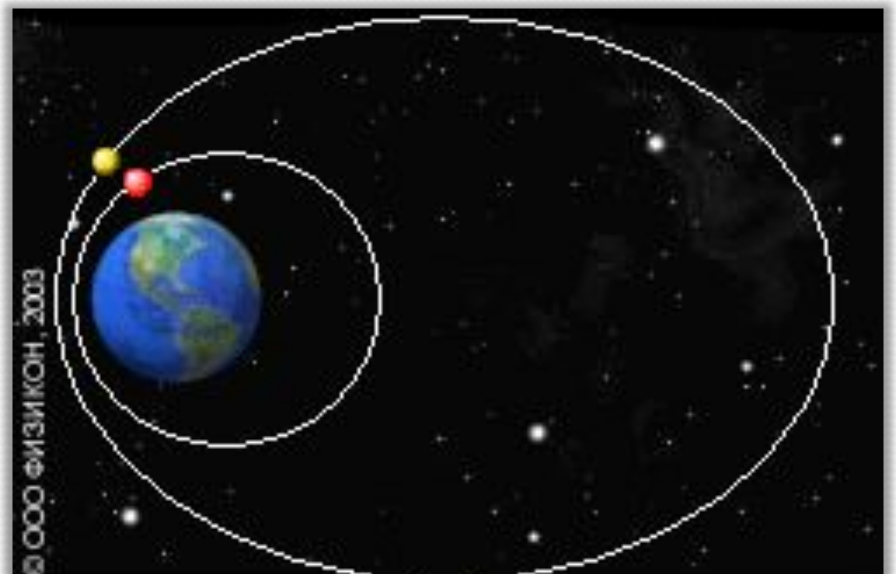
где m – масса планеты; M – масса центрального тела; G – гравитационная постоянная; r – расстояние от гравитирующего центра.



III закон Кеплера

$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$, применим **только** к эллиптическим орбитам

где T_1 и T_2 — ***сидерические*** периоды обращений планет, a_1 и a_2 – большие полуоси их орбит.

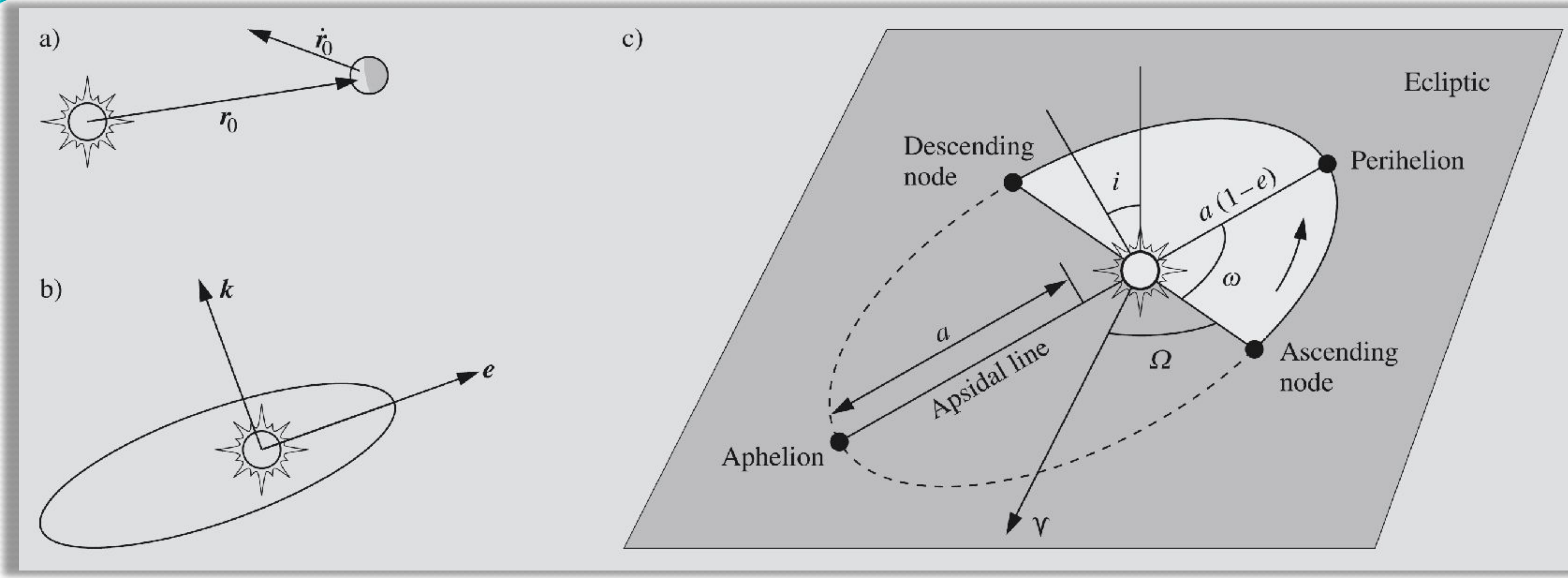


Третий закон Кеплера можно также выразить как зависимость между периодом T обращения по орбите тела с массой m и большой полуосью орбиты a (G – гравитационная постоянная):

$$\frac{a^3}{T^2(m+M_{\odot})} = \left(\frac{G}{4\pi}\right)^2$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Для простоты часто говорится, что одно тело обращается вокруг другого, но это справедливо только для случая, когда масса первого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой второго (притягивающего центра). Если же массы сравнимы, то следует учитывать и влияние менее массивного тела на более массивное. В системе координат с началом в центре масс орбиты обоих тел будут коническими сечениями, лежащими в одной плоскости и с фокусами в центре масс, с одинаковым эксцентриситетом. Различие будет только в линейных размерах орбит (если тела разной массы). В любой момент времени центр масс будет лежать на прямой, соединяющей центры тел, а расстояния до центра масс r_1 и r_2 тел массой M_1 и M_2 соответственно связаны следующим соотношением: $r_1/r_2 = M_2/M_1$. Перицентры и апоцентры своих орбит (если движение финитно) тела также будут проходить одновременно.

Элементы орбит планет



Форма орбиты и ее положение в пространстве, положение тела на орбите описываются с помощью шести параметров (элементов орбиты):

a – большая полуось;

e – эксцентриситет;

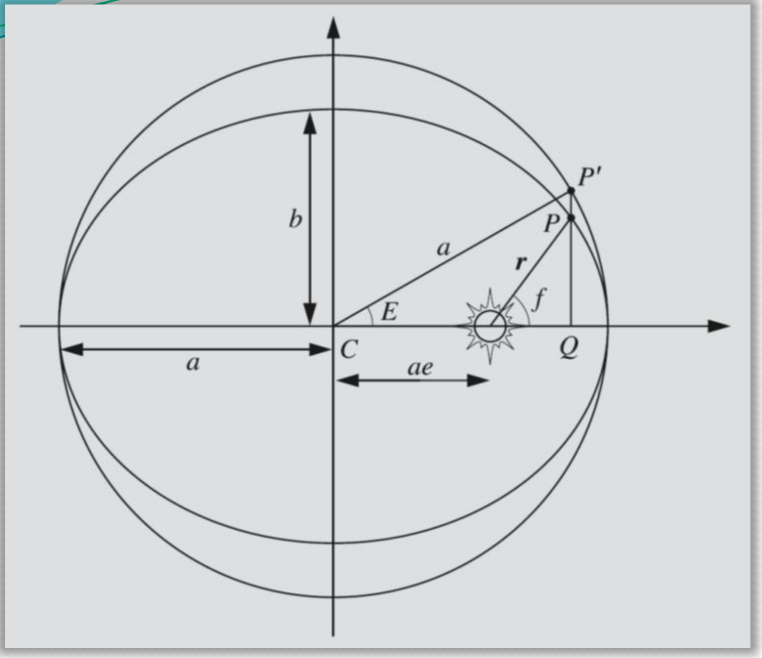
i – наклон орбиты;

Ω – долгота восходящего узла орбиты;

ω – аргумент перигелия;

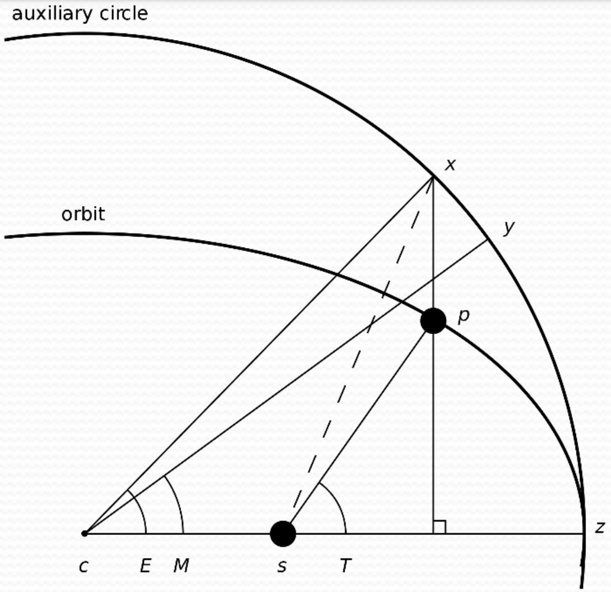
τ – момент прохождения перигелия.

Положение тела на орбите



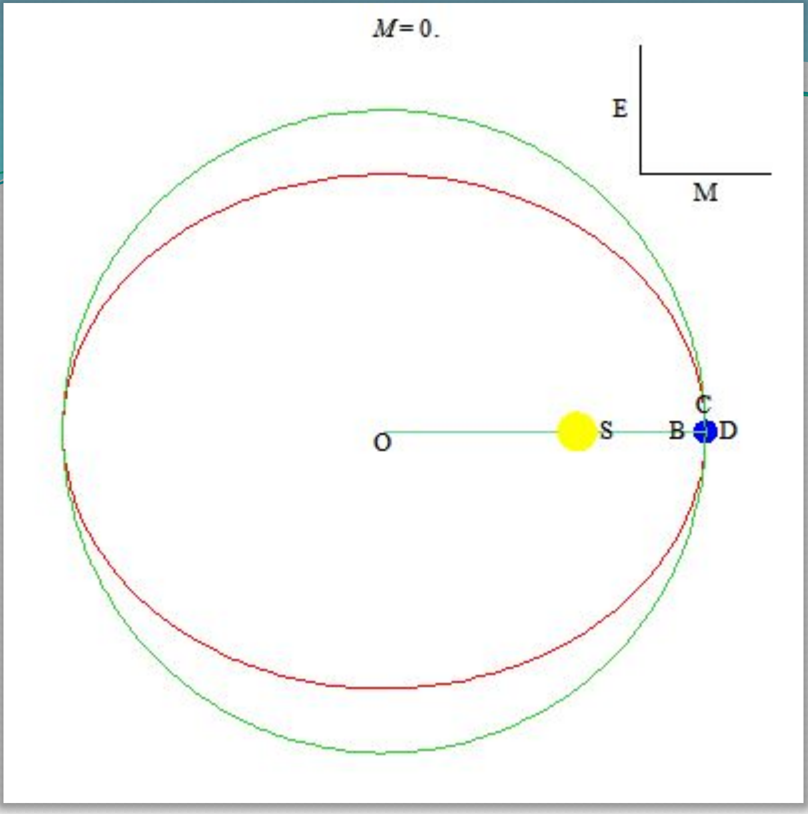
Положение тела на орбите в заданный момент времени t определяется углом f – ***истинной аномалией*** объекта. Истинная аномалия неравномерно изменяется со временем. Уравнения небесной механики обычно записывают через ***эксцентрическую аномалию*** E, что упрощает вид уравнений. E также изменяется со временем неравномерно.

$$r = a(1 - e \cos E)$$



Средняя аномалия M для тела, движущегося по невозмущённой орбите – произведение его среднего движения и интервала времени после прохождения перицентра. Средняя аномалия есть угловое расстояние от перицентра гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью, равной ***среднему движению*** $n = 2\pi/T$.

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau)$$



Средняя аномалия и эксцентрическая аномалия связаны между собой через ***уравнение Кеплера***

$$E - e\sin E = M.$$

Определив эксцентрическую аномалию можно вычислить истинную аномалию и, тем самым, полностью описать движение тела по реальной орбите.

$$\cos f = \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

$$\sin f = \frac{b\sin E}{r} = \sqrt{1 - e^2}\frac{\sin E}{1 - e\cos E}.$$

Понятие о задаче трех тел

Точное аналитическое определение траекторий движения в поле тяготения возможно только в задаче двух тел. Для задачи трех тел известны лишь пять точных решений для особых конфигураций системы.

В общем случае, уравнения движения для системы n тел записываются в виде

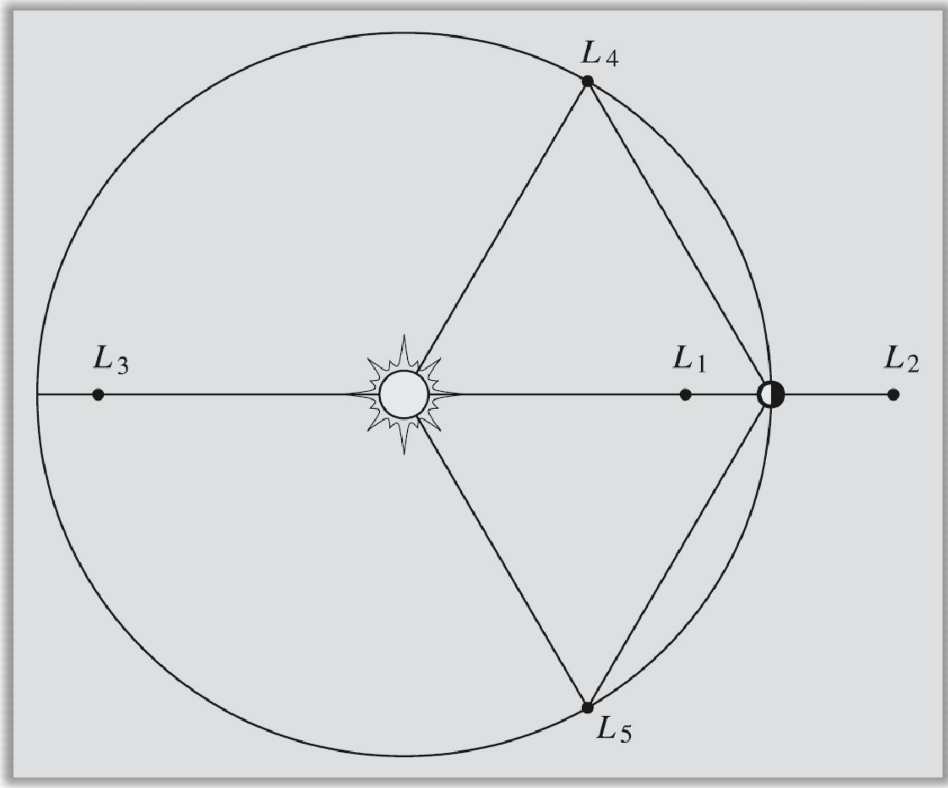
$$\ddot{\vec{r}}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}, \qquad k = 1 \dots n.$$

Способы решения:

1. При задании $\dot{\vec{r}}_i(t_0), \vec{r}_i(t_0)$, положения и скорости объектов в другой момент могут быть получены путем численного интегрирования системы уравнений.
2. Если одно из тел системы доминирует по массе (Солнце и планеты), то орбиты планет могут быть определены в задаче двух тел, а влияние других планет учитывается через малые возмущения к влиянию центрального тела.
3. Решение в рамках ***ограниченной задачи трех тел***. Два массивных тела, обращающихся друг вокруг друга, и маломассивное тело, обращающееся в той же плоскости, что и массивные тела системы. Орбиты массивных тел определяются в рамках задачи двух тел. Общего решения задачи не найдено.

Частные решения ограниченной задачи трех тел

Существует пять частных решений, в которых положение третьего тела остается неизменным по отношению к положениям двух массивных тел системы. Точки в плоскости системы, в которых реализуются такие решения называются ***точками Лагранжа*** системы трех тел $\{L_1, L_2, \ldots, L_5\}$.



Лагранж показал, что если третье тело находится в одной из этих пяти точек и обладает определенным значением начальной скорости, то конфигурация, которую образуют все три тела, всегда остается подобной самой себе, а движение всех тел происходит по коническим сечениям одинакового вида.

1. Три тела расположены на одной прямой и обращаются, оставаясь на ней, вокруг общего центра масс. Конфигурация неустойчива по отношению к малым возмущениям.
2. Три тела расположены в вершинах равностороннего треугольника и обращаются вокруг общего центра масс так, что треугольник остается все время равносторонним.

Устойчивость планетной системы. Возмущенное движение

Невозмущенное движение = задача двух тел.

В задаче n тел орбиты перестают быть истинно кеплеровыми = ***возмущенное движение***.

Зависимость элементов орбиты тела от времени *вследствие притяжения его другими телами, помимо центрального, называется* ***возмущениями*** *или* ***неравенствами элементов***.

Возмущения описываются суммой линейной и множества периодических функций с различными значениями периодов. Линейные члены называются ***вековыми возмущениями***, а остальные слагаемые – ***периодическими возмущениями***.

Коэффициенты в функциях, представляющих возмущения, как правило, весьма малы, однако ***за достаточно большой промежуток времени*** вековые возмущения могут стать ***сколь угодно большими***.

Наибольший интерес представляют ***вековые возмущения больших полуосей, эксцентриситетов и углов наклона*** орбит планет, поскольку именно они определяют ***характер устойчивости Солнечной системы***.

Как следует из теории движения планет, вековые возмущения элементов орбит a, e и i чрезвычайно малы, и ***есть основания полагать, что Солнечная система устойчива по крайней мере в течение весьма длительных промежутков времени***, возможно достигающих даже нескольких миллиардов лет.

Из остальных элементов орбиты – долгота восходящего узла Ω, и аргумент перигелия ω – подвержены значительным вековым возмущениям, которые в силу малости эксцентриситетов и наклонений орбит планет практически не изменяют общую конфигурацию Солнечной системы.

Дальнейшее уточнение теории движения планет приводит к появлению квадратичных и кубических по времени возмущений элементов орбит. Согласно теории, вполне возможно, что сумма таких возмущений может представлять собой начальные члены разложения в степенной ряд некоторой периодической функции. В этом случае изменение всех элементов будет ограниченным.

Вопрос об устойчивости Солнечной системы на неограниченном интервале времени пока остается открытым.

Пусть имеются три небесных тела: Солнце C с массой M, планета P_1 с массой m_1 на расстоянии r_1 от центра Солнца и планета P_2 с массой m_2 на расстоянии r_2 от центра Солнца и на расстоянии r от планеты P_1. Все три тела действуют друг на друга по закону всемирного тяготения Ньютона. Солнце получает ускорения

$$\omega_1 = G\frac{m_1}{r_1^2}, \qquad \omega_2 = G\frac{m_2}{r_2^2}$$

по направлению CP_i от планеты P_i. Рассмотрим движение планеты P_1 относительно Солнца. В этом случае на планету P_1 будут действовать силы, вызывающие следующие ускорения:

$$\omega = G\frac{M + m_1}{r_1^2}, \qquad \omega' = G\frac{m_2}{r^2}, \qquad \omega'' = -\omega_2 = G\frac{m_2}{r_2^2}.$$

Ускорения w' и w'' составляют ускорение возмущающей силы и обусловливают отклонения в движении планеты P_1 от законов Кеплера. Возмущающая сила, следовательно, состоит из двух сил: из силы действия планеты P_2 на планету P_1 и из силы действия планеты P_2 на Солнце. Так как ускорение w'' откладывается в сторону, противоположную w_2, то ***ускорение от возмущения есть разность векторов ускорений, вызываемых возмущающим телом на планете и на Солнце***.

Возмущающая сила (возмущающее ускорение) в общем случае не направлена к возмущающему телу, т. е. к планете P_2. Возмущающая сила будет направлена точно к возмущающему телу P_2 только в том случае, если тела P_1 и P_2 находятся на одной прямой с Солнцем, и притом оба по одну сторону от него (в порядке CP_1P_2 или CP_2P_1). Если же тела P_1 и P_2 находятся на одной прямой с Солнцем, но по разные стороны от него (P_1CP_2), то возмущающая сила направлена от возмущающего тела. Величина и направление возмущающей силы вследствие движения тел непрерывно меняются.

Поверхность и предел Роша

Предел Роша – ***радиус круговой орбиты спутника, обращающегося вокруг небесного тела, на котором приливные силы, вызванные гравитацией центрального тела, равны силам самогравитации спутника***.

Обычно следствием существования предела Роша называют тот факт, что спутники с нулевой собственной прочностью, обращающиеся на орбитах ниже предела Роша, неустойчивы и разрушаются приливными силами.

Однако, гораздо более существенным для астрофизики и планетологии является «обратный» вывод: внутри сферы с радиусом, меньшим предела Роша, невозможна гравитационная конденсация вещества с образованием единого тела (спутника): кольца Сатурна расположены внутри предела Роша и состоят, судя по всему, из материи, сохранившейся с ранних стадий формирования Солнечной системы.

В приближении «жесткого» сферического спутника, то есть при условиях пренебрежения его приливной деформации и вращения, предел Роша a_R зависит от радиуса центрального тела R и отношения плотностей центрального тела ρ_M и спутника ρ_m:

$$a_R = R\left(2\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

В приближении «жидкого» несферического спутника, форма которого определяется приливными силами, предел Роша увеличивается почти в 2 раза:

$$a_R \approx 2.44R\left(\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}}$$