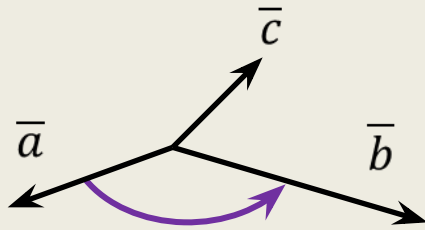


Лекция № 9

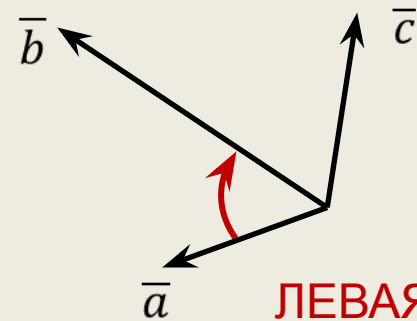
ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Правая и левая тройка векторов

Три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , взятые в указанном порядке, образуют **ПРАВУЮ ТРОЙКУ**, если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден **ПРОТИВ ЧАСОВОЙ** стрелки:



**ПРАВАЯ
ТРОЙКА**



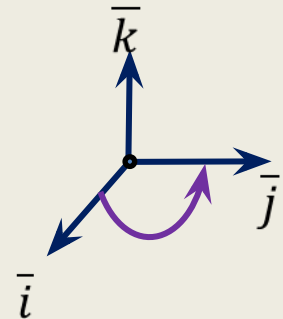
**ЛЕВАЯ
ТРОЙКА**

Если же с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден **ПО ЧАСОВОЙ** стрелке, то тройка векторов считается **ЛЕВОЙ**.

ВОПРОС :

БАЗИСНЫЕ ОРТЫ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ являются **ЛЕВОЙ** или **ПРАВОВОЙ** тройкой?

ОТВЕТ: ПРАВАЯ
тройка.



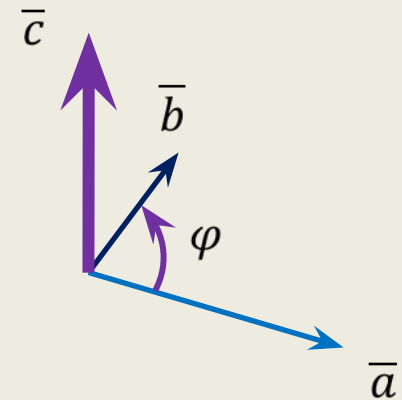
ВЕКТОРНОЕ произведение векторов

ВЕКТОРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется **ВЕКТОР** \vec{c} , который :

1. ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
2. имеет длину (модуль), равную числу $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ — угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
3. векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют **ПРАВУЮ** тройку.

Обозначение векторного произведения :

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

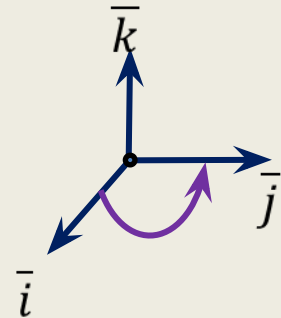


Можно убедиться, что между базисными ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ верны соотношения :

$$[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}; \quad [\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}; \quad [\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j};$$

Проверим, например, первое равенство $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$:

1. \bar{k} ортогонален векторам \bar{i} и \bar{j} : $\bar{k} \perp \bar{i}, \bar{k} \perp \bar{j}$;
2. $|\bar{k}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
3. векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют **ПРАВУЮ** тройку.



ЗАДАНИЕ: Второе и третье равенство проверить дома.

Свойства векторного произведения

1. Постоянное число можно вносить и выносить за скобки

векторного произведения :

$$[\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \cdot \bar{b}] = \lambda \cdot [\bar{a}, \bar{b}]$$

2. При векторном умножении суммы векторов на вектор можно раскрыть скобки :

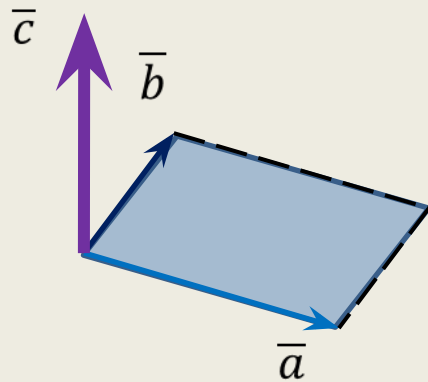
$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}];$$

3. При перестановке множителей векторное произведение **МЕНЯЕТ**
ЗНАК на противоположный :

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$$

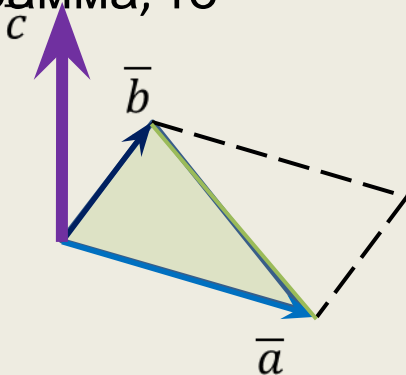
Геометрический смысл векторного произведения

Длина (МОДУЛЬ) $|\vec{c}|$ векторного произведения $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ численно равна ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} как на сторонах:



$$S_{\text{пар}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|$$

Так как площадь треугольника равна ПОЛОВИНЕ площади параллелограмма, то



$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{a}, \vec{b}]|$$

Критерий КОЛЛИНЕАРНОСТИ

Два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} КОЛЛИНЕАРНЫ тогда и только тогда, когда их ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ равно НУЛЕВОМУ вектору:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$$

⇒ Действительно, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то угол между ними равен 0 или $\pi = 180^\circ$. Так как $\sin 0 = 0$ и $\sin \pi = 0$, то длина векторного произведения $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 0$, что соответствует НУЛЕВОМУ вектору.

⇐ Если же $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, то $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 0$, и так как вектора \vec{a} и \vec{b} ненулевые, то $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$; значит $\sin \varphi = 0$, то есть $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi = 180^\circ$, и $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

ВОПРОС: Чему равен ВЕКТОРНЫЙ КВАДРАТ вектора $[\vec{a}, \vec{a}]$?

ОТВЕТ: ВЕКТОРНЫЙ КВАДРАТ любого вектора $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$, так как любой вектор КОЛЛИНЕАРЕН самому себе.

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора : $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Вектор $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$ имеет координаты:

$$\bar{c} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y; a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z; a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать символ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ третьего порядка:

$$\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

В первой строке символического определителя стоят базисные орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Во второй строке - координаты первого вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

В третьей строке - координаты второго вектора $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Используя разложение определителя
по элементам ПЕРВОЙ строки,
получим:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
$$= \bar{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + \bar{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix};$$

СМЕШАННОЕ (ВЕКТОРНО -СКАЛЯРНОЕ)произведение векторов

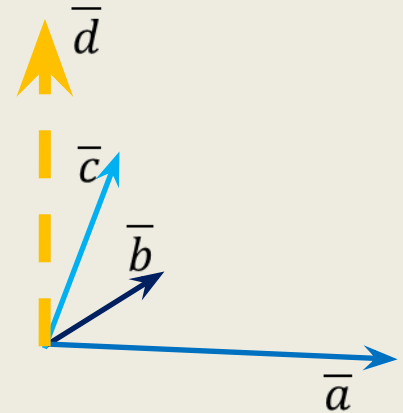
Составим произведение ТРЕХ векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} таким образом: первые ДВА умножаются

ВЕКТОРНО : $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{d}$, а их результат умножается на ТРЕТИЙ вектор скалярно: (\vec{d}, \vec{c}) :

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$$

Смешанное произведение НЕ
МЕНЯЕТСЯ
при перемене мест знаков
векторного и скалярного умножения :

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$$

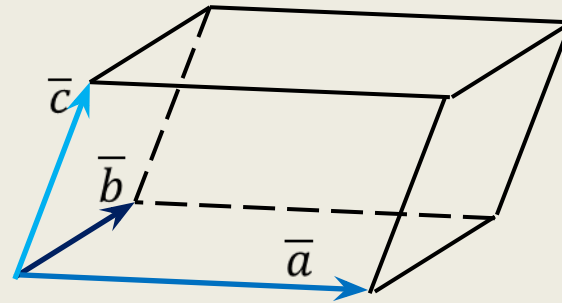


ВОПРОС: Смешанное произведение является ВЕКТОРОМ ИЛИ
ЧИСЛОМ ?

Смешанное произведение является
ЧИСЛОМ.

Геометрический смысл СМЕШАННОГО произведения

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \pm V$$

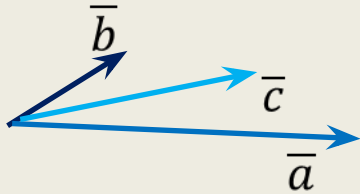


Если построить ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД на векторах \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} , то СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ этих векторов $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ равно ОБЪЕМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА V , взятому со знаком « ПЛЮС », если эти векторы образуют ПРАВУЮ тройку.

Если тройка векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} ЛЕВАЯ, то СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ этих векторов $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ равно ОБЪЕМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, взятому со знаком «МИНУС»: $-V$.

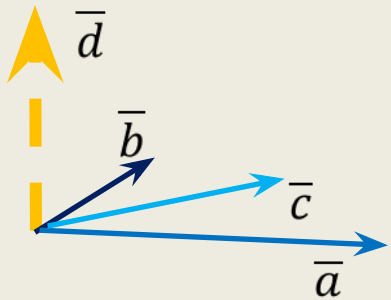
Критерий КОМПЛАНАРНОСТИ трех векторов

ТРИ ненулевых вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} КОМПЛАНАРНЫ тогда и только тогда, когда их СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО НУЛЮ :

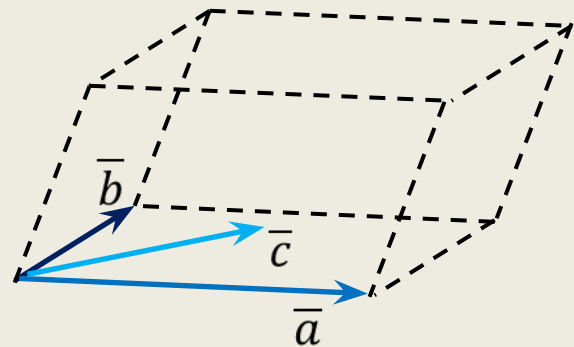


$$\vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \\ \text{КОМПЛАНАРНЫ} \Leftrightarrow \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$$

\Rightarrow Пусть дано, что \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} КОМПЛАНАРНЫ, то есть параллельны одной плоскости. Тогда вектор $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$ будет ортогонален этой плоскости и составит с третьим вектором \vec{c} прямой угол. Скалярное произведение таких векторов равно нулю $(\vec{d}, \vec{c}) = 0$, то есть $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.



\Leftarrow Теперь пусть $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$; если они НЕ компланарны, то можно построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V$, то получим $\vec{a} \vec{b} \vec{c} \neq 0$, что противоречит условию. Значит, предположение о том, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} НЕ компланарны, ОШИБОЧНО, и \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} КОМПЛАНАРНЫ.



Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы три вектора : $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$;

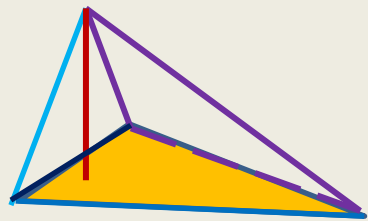
Если найти их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений, то получим формулу:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

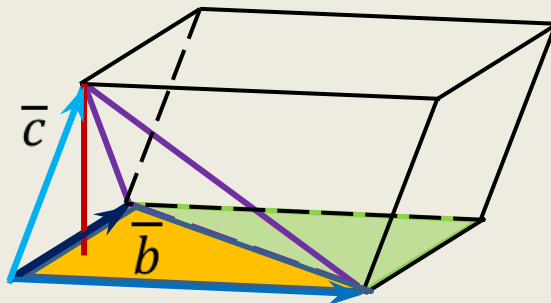
Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из КООРДИНАТ умножаемых векторов.

Приложения смешанного произведения

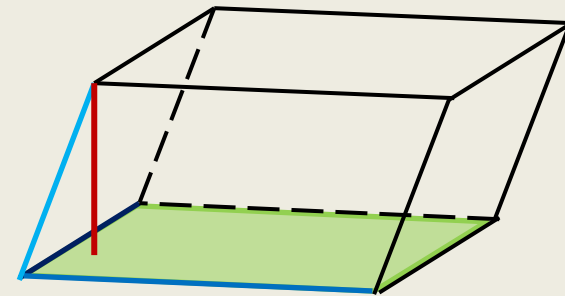
Вычисление объема треугольной пирамиды (тетраэдра)



$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h$$



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S;$$



$$V = S \cdot h$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot h = \frac{1}{6} S \cdot h = \frac{1}{6} V; \quad V = |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$

ВОПРОС: Зачем нужен знак модуля у смешанного произведения?

ОТВЕТ: Смешанное произведение левой тройки векторов - число отрицательное, а объем тела (пирамиды) не может быть меньше нуля, поэтому требуется знак модуля.