Лекция № 9

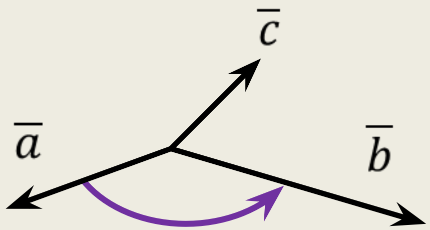
ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Правая и левая тройка векторов

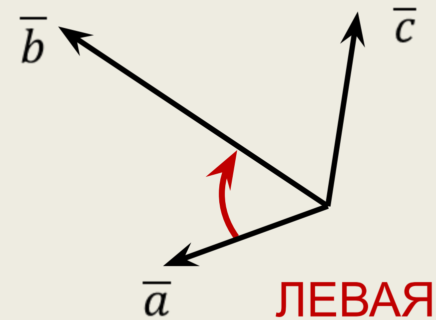
Три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, взятые в указанном порядке, образуют

ПРАВУЮ ТРОЙКУ, если с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого

вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден ПРОТИВ ЧАСОВОЙ стрелки:



ПРАВАЯ
ТРОЙКА



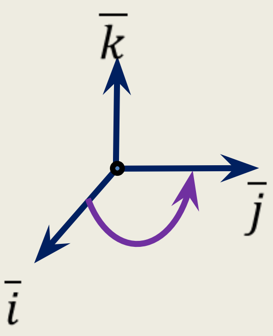
ЛЕВАЯ
ТРОЙКА

Если же с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко

второму вектору $\overline{b}$ виден ПО ЧАСОВОЙ стрелке, то тройка векторов считается ЛЕВОЙ.

ВОПРОС:

БАЗИСНЫЕ ОРТЫ $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ являются ЛЕВОЙ или ПРАВОЙ тройкой?



ОТВЕТ: ПРАВАЯ
тройка.

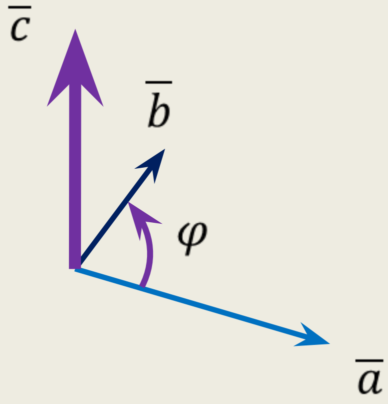
ВЕКТОРНОЕ произведение векторов

ВЕКТОРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется **ВЕКТОР** $\overline{c}$, который :

1. ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;
2. имеет длину (модуль), равную числу $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\overline{a},\overline{b}})$ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
3. векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют ПРАВУЮ тройку.

Обозначение векторного произведения :

$$\boxed{\overline{c} = [\,\overline{a}, \overline{b}\,] = \overline{a} \times \overline{b}}$$

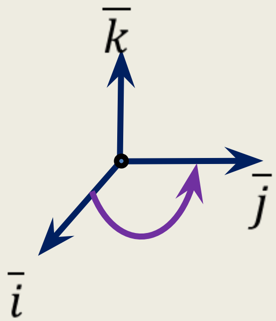


Можно убедиться, что между базисными ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ верны соотношения :

$$[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}; \qquad [\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}; \qquad [\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j};$$

Проверим, например, первое равенство $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$:

1. $\bar{k}$ ортогонален векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$: $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;
2. $|\bar{k}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$
3. векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют ПРАВУЮ тройку.



ЗАДАНИЕ: Второе и третье равенство проверить дома.

Свойства векторного произведения

1. Постоянное число можно вносить и выносить за скобки векторного произведения :

$$\left[\lambda\cdot\overline{a},\overline{b}\,\right]=\left[\,\overline{a},\lambda\cdot\overline{b}\,\right]=\lambda\cdot\left[\,\overline{a},\overline{b}\,\right]$$

2. При векторном умножении суммы векторов на вектор можно раскрыть скобки :

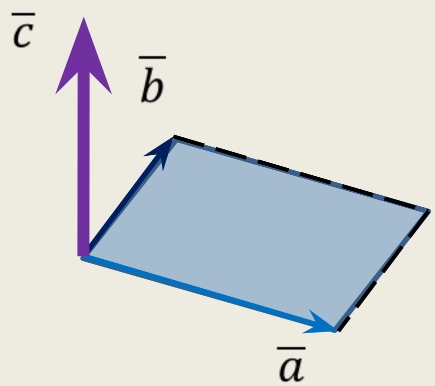
$$\left[\,\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\,\right]=\left[\,\overline{a},\overline{c}\,\right]+\left[\,\overline{b},\overline{c}\,\right];$$

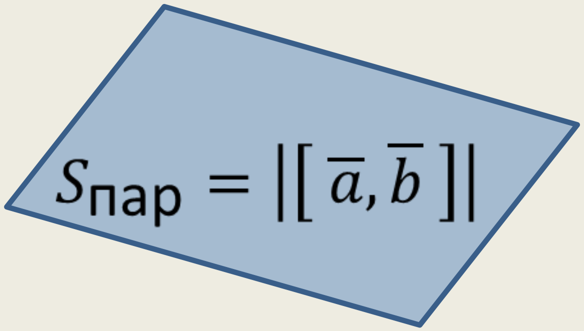
3. При перестановке множителей векторное произведение **МЕНЯЕТ ЗНАК** на противоположный :

$$\left[\,\overline{a},\overline{b}\,\right]=-\left[\,\overline{b},\overline{a}\,\right]$$

Геометрический смысл векторного произведения

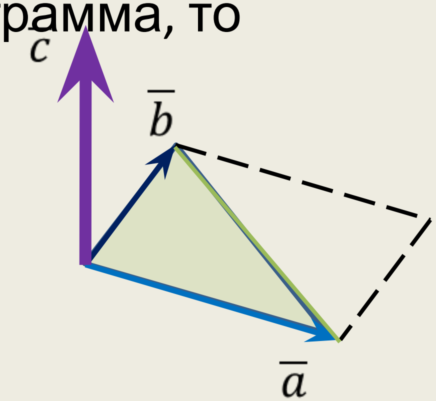
Длина (МОДУЛЬ) $|\,\overline{c}\,|$ векторного произведения $\overline{c} = [\,\overline{a}, \overline{b}\,]$ численно равна ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах:

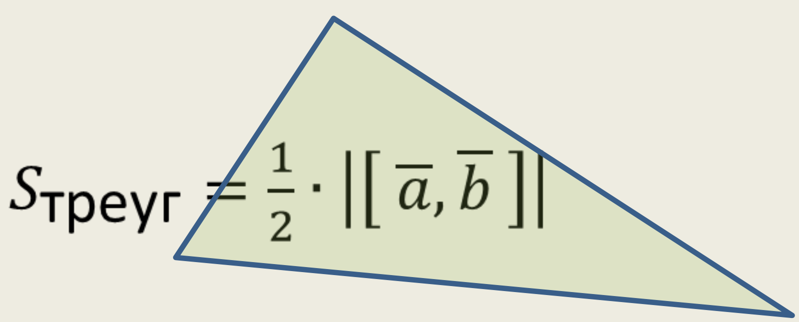




$$S_{\text{пар}} = |[\,\overline{a}, \overline{b}\,]|$$

Так как площадь треугольника равна ПОЛОВИНЕ площади параллелограмма, то





$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot |[\,\overline{a}, \overline{b}\,]|$$

Критерий коллинеарности

Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ КОЛЛИНЕАРНЫ тогда и только тогда, когда

их ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ равно НУЛЕВОМУ вектору:

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\,\overline{a}, \overline{b}\,\right] = \overline{0}$$

$\Rightarrow$ Действительно, если $\overline{a} \parallel \overline{b}$,то угол между ними равен 0 или $\pi = 180°$.
Так как $\sin 0 = 0$ и $\sin \pi = 0$, то длина векторного произведения
$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = 0,$ что соответствует НУЛЕВОМУ вектору.

$\Leftarrow$ Если же $\overline{c} = \left[\,\overline{a}, \overline{b}\,\right] = \overline{0}$, то $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi = 0$, и так как вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые, то $|\overline{a}| \neq 0$, $\left|\overline{b}\right| \neq 0$; значит $\sin\varphi = 0$, то есть $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi = 180°$, и $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

ВОПРОС: Чему равен ВЕКТОРНЫЙ КВАДРАТ вектора $\left[\,\overline{a}, \overline{a}\,\right]$?

ОТВЕТ: ВЕКТОРНЫЙ КВАДРАТ любого вектора $\left[\,\overline{a}, \overline{a}\,\right] = \overline{0}$, так как любой вектор КОЛЛИНЕАРЕН самому себе.

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора : $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Вектор $\overline{c} = [\,\overline{a}, \overline{b}\,]$ имеет координаты:

$$\overline{c} = \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y; a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z; a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right)$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать символ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ третьего порядка:

$$\boxed{\overline{c} = [\,\overline{a}, \overline{b}\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

В первой строке символического определителя стоят базисные орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Во второй строке - координаты первого вектора $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

В третьей строке - координаты второго вектора $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Используя разложение определителя по элементам ПЕРВОЙ строки, получим:

$$[\,\overline{a}, \overline{b}\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

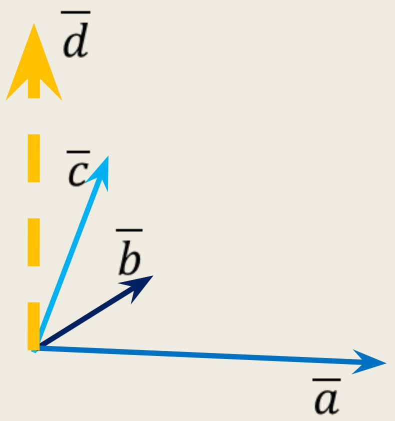
$$= \overline{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + \overline{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix};$$

СМЕШАННОЕ (ВЕКТОРНО -СКАЛЯРНОЕ)произведение векторов

Составим произведение ТРЕХ векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ таким образом: первые ДВА умножаются

ВЕКТОРНО :$[\,\overline{a}, \overline{b}\,] = \overline{d}$, а их результат умножается на ТРЕТИЙ вектор скалярно: $(\,\overline{d}\,, \overline{c}\,)$:

$$([\,\overline{a}, \overline{b}\,], \overline{c}\,) = (\,\overline{a}\,, [\,\overline{b}, \overline{c}\,]\,)$$



Смешанное произведение НЕ МЕНЯЕТСЯ
при перемене мест знаков
векторного и скалярного умножения :

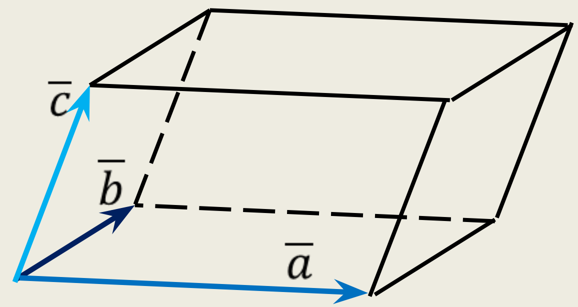
$$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = ([\,\overline{a}, \overline{b}\,], \overline{c}\,)}$$

ВОПРОС: Смешанное произведение является ВЕКТОРОМ ИЛИ ЧИСЛОМ ?

Смешанное произведение является ЧИСЛОМ.

Геометрический смысл СМЕШАННОГО произведения

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \pm V$$



Если построить ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, то

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ этих векторов $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равно

ОБЪЕМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА V, взятому со знаком « ПЛЮС»,

если эти векторы образуют ПРАВУЮ тройку.

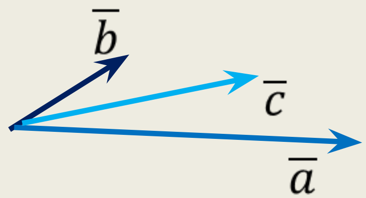
Если тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ ЛЕВАЯ, то

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ этих векторов $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равно

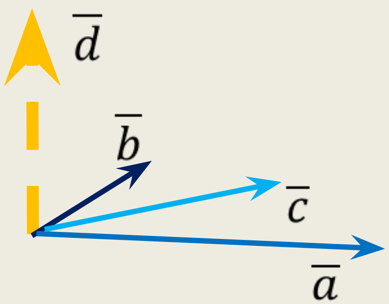
ОБЪЕМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, взятому со знаком «МИНУС»: $-V$.

Критерий КОМПЛАНАРНОСТИ трех векторов

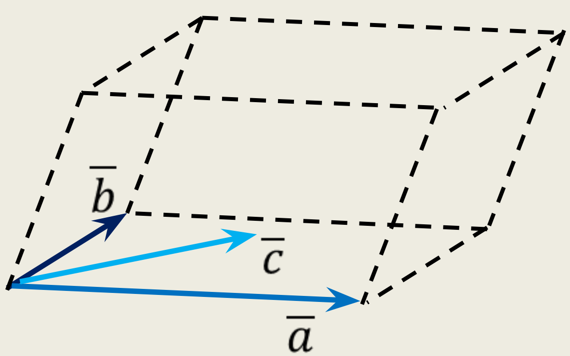
ТРИ ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ КОМПЛАНАРНЫ тогда и только тогда, когда их СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО НУЛЮ :



$\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ КОМПЛАНАРНЫ $\Leftrightarrow$ $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$



$\Rightarrow$ Пусть дано, что $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ КОМПЛАНАРНЫ, то есть параллельны одной плоскости. Тогда вектор $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}]$будет ортогонален этой плоскости и составит с третьим вектором $\bar{c}$ прямой угол . Скалярное призведение таких векторов равно нулю $(\bar{d}, \bar{c}) = 0$, то есть $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$.



$\Leftarrow$ Теперь пусть $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0$; если они НЕ компланарны, то можно построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \pm V$, то получим $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \neq 0$, что противоречит условию. Значит, предположение о том, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ НЕ компланарны, ОШИБОЧНО , и $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ КОМПЛАНАРНЫ.

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы три вектора : $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$;

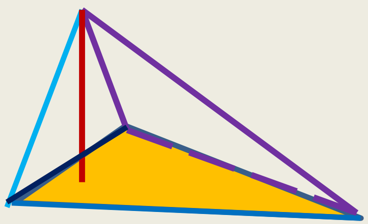
Если найти их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений, то получим формулу:

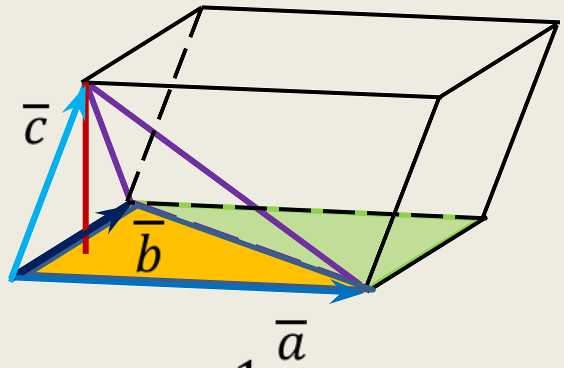
$$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

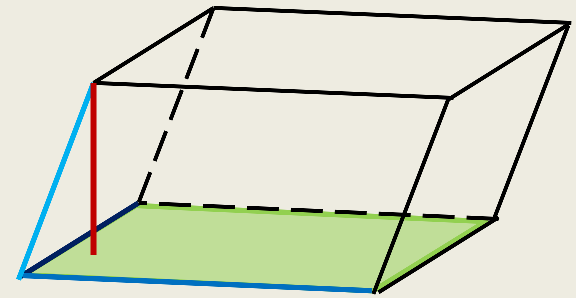
Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из КООРДИНАТ умножаемых векторов.

Приложения смешанного произведения

Вычисление объема треугольной пирамиды (тетраэдра)







$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S;$$

$$V = S \cdot h$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot h = \frac{1}{6} S \cdot h = \frac{1}{6} V; \qquad V = \left| \overline{a}\, \overline{b}\, \overline{c} \right|$$

$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overline{a}\, \overline{b}\, \overline{c} \right|}$$

ВОПРОС: Зачем нужен знак модуля у смешанного произведения?

ОТВЕТ: Смешанное произведение левой тройки векторов - число отрицательное, а объем тела (пирамиды) не может быть меньше нуля, поэтому требуется знак модуля.