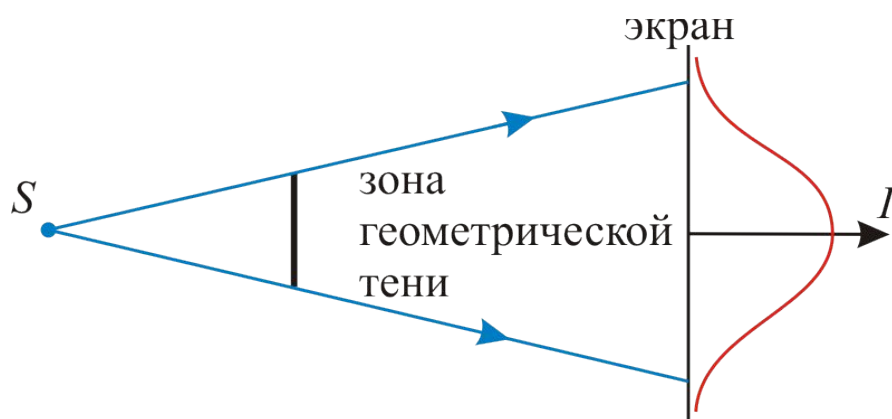


ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

6.1 Принцип Гюйгенса – Френеля. Зоны Френеля

Дифракция

- **Дифракция** – это совокупность явлений, которые сопровождаются распространением света в среде с резкими неоднородностями и не подчиняются законам геометрической оптики.



- Пусть на пути от точечного источника света S к экрану находится небольшой непрозрачный предмет (например, диск).
- На экране в центре области геометрической тени, вопреки законам геометрической оптики, наблюдается максимум освещенности (светлое пятно).
- Т.о. свет, огибая препятствие, проникает в область геометрической тени.

Необходимое условие наблюдения дифракции света

- Для наблюдения дифракционных явлений необходимо, чтобы *длина световой волны λ была сравнима по величине с характерным размером b препятствий (неоднородностей среды).*

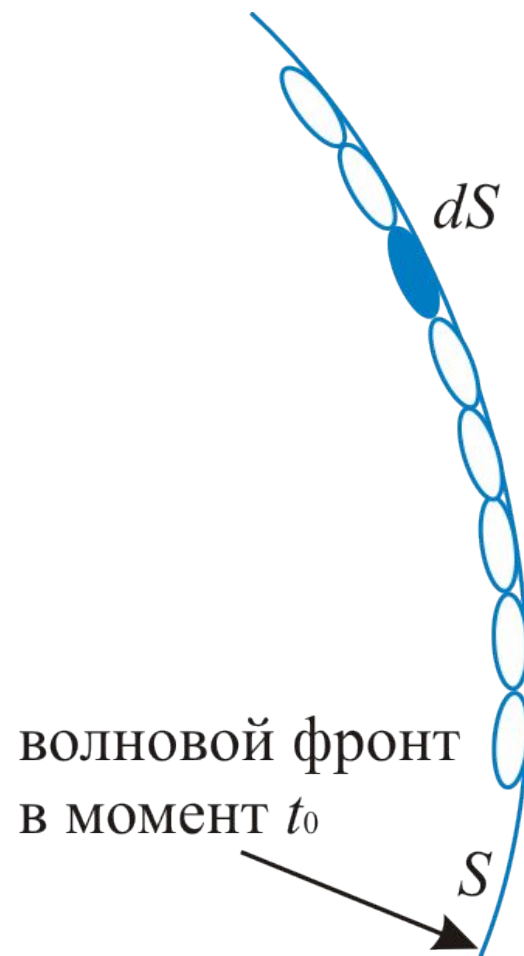
$$b \sim \lambda$$

Интерференция и дифракция

- *Физическая сущность* явлений интерференции и дифракции одинакова и заключается в пространственном перераспределении интенсивности света в результате наложения когерентных волн.
- При этом *интерференция* возникает при наложении волн от двух или нескольких дискретно расположенных в пространстве точечных источников света.
- *Дифракционные явления* – это результат наложения световых волн от бесконечного множества эффективных точечных источников, распределенных в пространстве непрерывно.

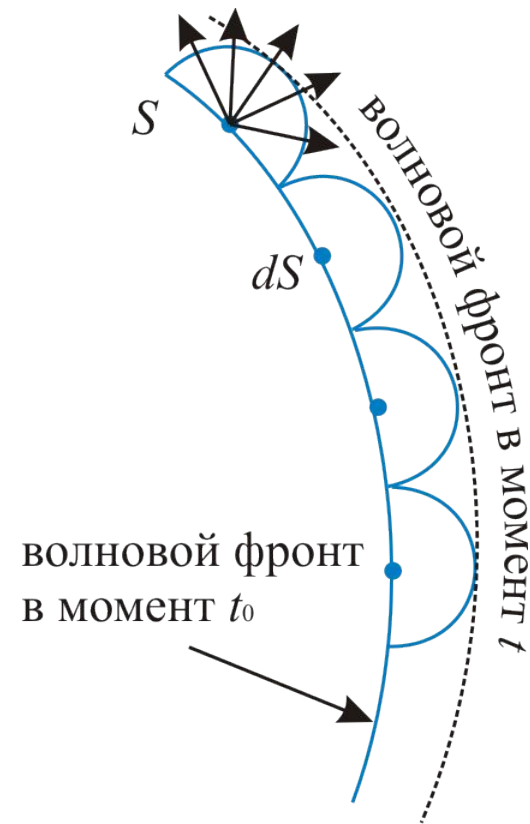
Принцип Гюйгенса – Френеля

- Рассмотрим одну из волновых поверхностей S световой волны, которая задает положение в пространстве волнового фронта в некоторый момент времени t_0 .
- Мысленно разделим всю поверхность на элементарные участки и рассмотрим один из них, площадь которого обозначим через dS .



Интерференция и дифракция

- **Принцип Гюйгенса – Френеля:** *каждый элементарный участок dS волновой поверхности распространяющейся в пространстве световой волны можно рассматривать в качестве точечного источника вторичной волны (в однородной и изотропной среде – сферической волны). В любой точке пространства, которую волна достигает позднее, колебание электромагнитного поля представляет собой суперпозицию колебаний, порожденных вторичными волнами всех элементов волновой поверхности S . В частности, в любой момент времени $t > t_0$ волновой фронт можно получить, построив огибающую волновых фронтов вторичных волн.*



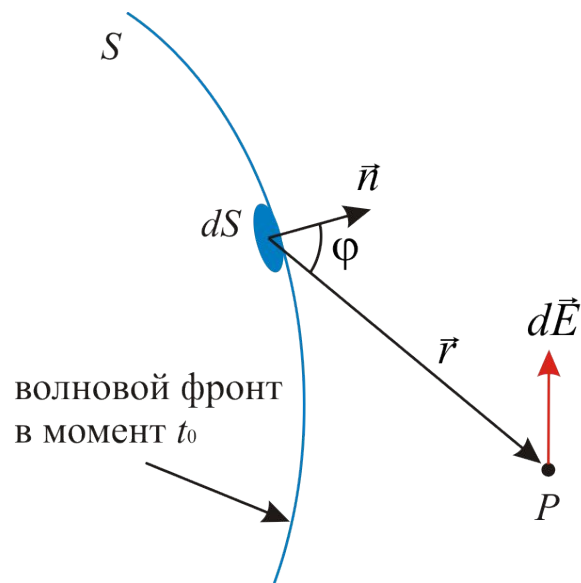
Принцип Гюйгенса – Френеля

- В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля, каждый участок dS волновой поверхности излучает вторичную волну, световой вектор $d\vec{E}$ которой в каждой точке P пространства, расположенной на расстоянии r от элемента dS , может быть представлен в виде:

$$dE = K \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

- Здесь $(\omega t + \alpha)$ фаза колебания в месте расположения участка dS ,

k – волновое число, числовой множитель A зависит от амплитуды световой волны в месте, где расположен элемент dS .



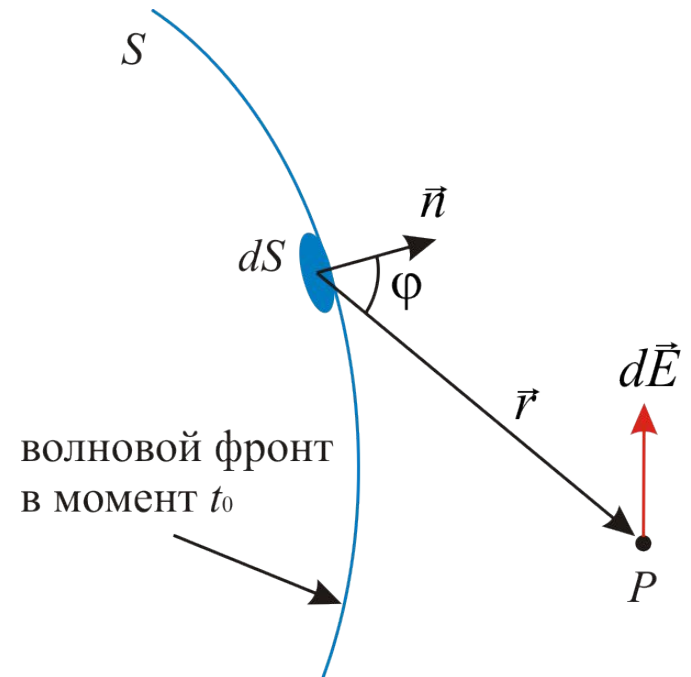
Принцип Гюйгенса – Френеля

$$dE = K \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

- Коэффициент K зависит от угла ϕ между нормалью \vec{n} к dS и направлением от dS в точку P : значению $\phi = 0$ соответствует $K = 1$, значению $\phi = \pi/2$ – значение $K = 0$.

- Световой вектор результирующего колебания в точке P :

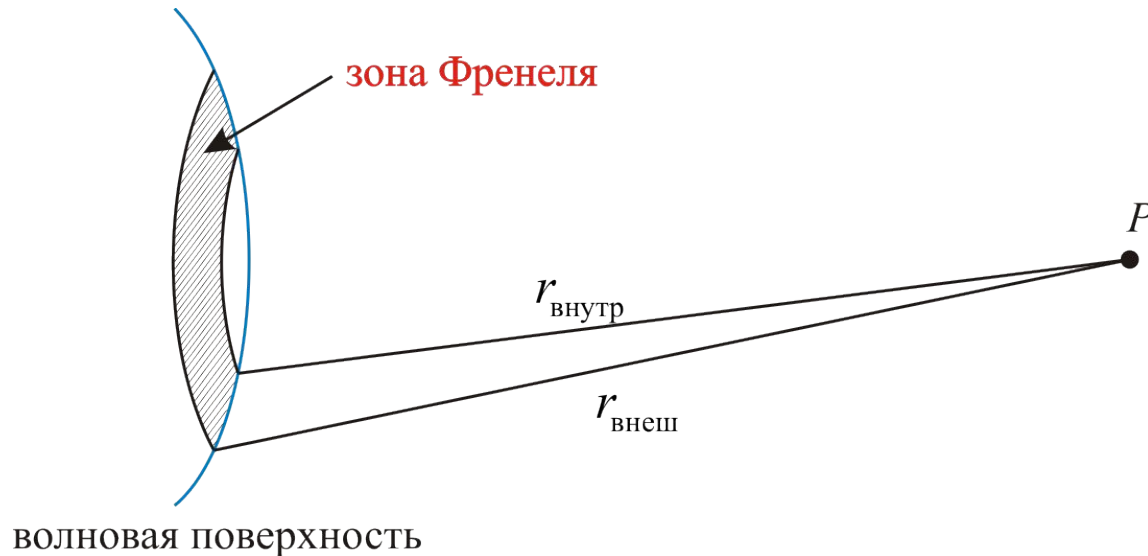
$$E = \int_S K \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$



Этот интеграл называется **интегралом Френеля**

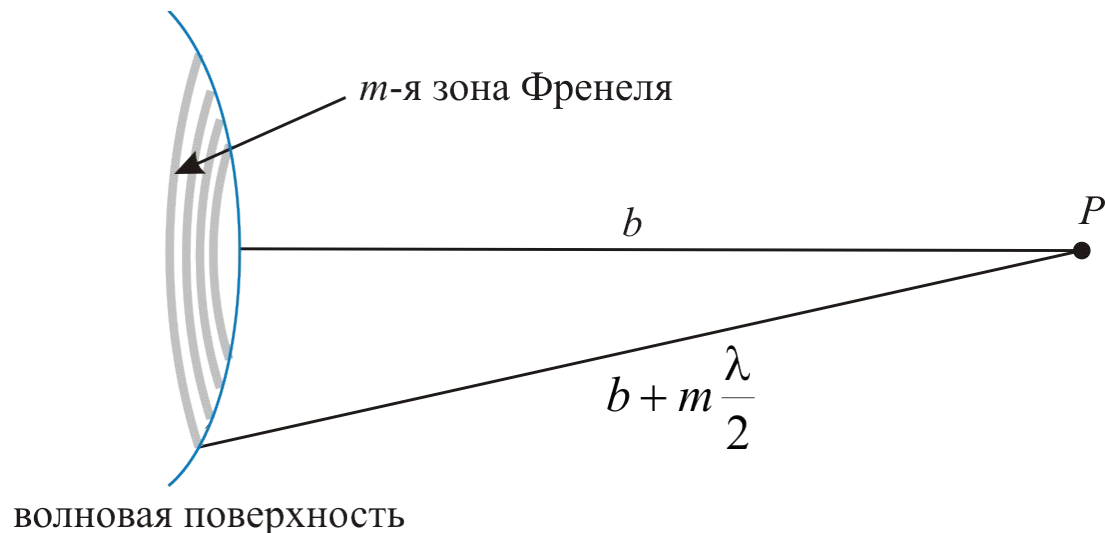
Зоны Френеля

- Пусть S – некоторая волновая поверхность сферической или плоской световой волны, P – точка наблюдения. Обозначим: λ – длина световой волны.
- **Зоной Френеля** называется участок волновой поверхности, разность расстояний от краев которого до точки наблюдения равна половине длины волны: $r_{\text{внеш}} - r_{\text{внутр}} = \lambda/2$.



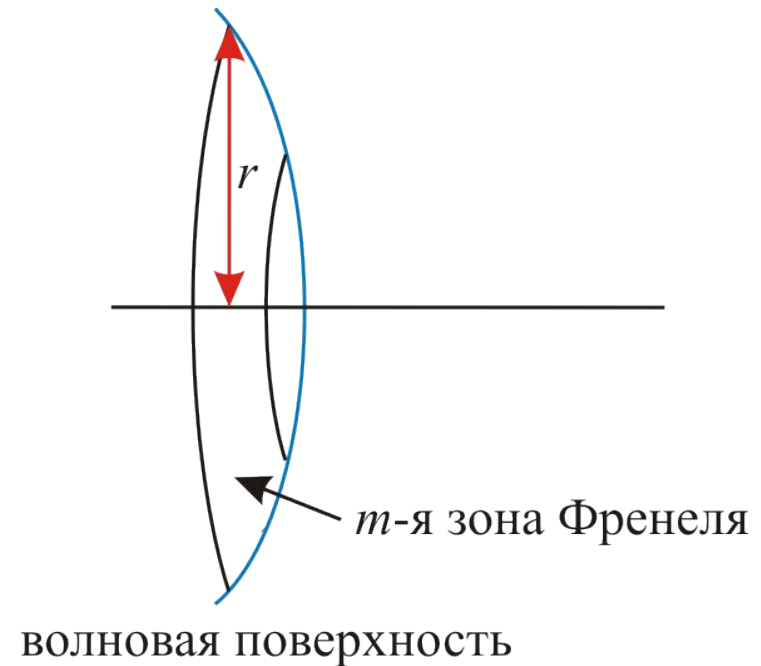
Зоны Френеля

- Зоны сферической и плоской волновых поверхностей имеют формулы колец.
- Параметр b , указанный на рисунке, – это кратчайшее расстояние от волновой поверхности S до точки наблюдения P .
- Как следует из определения зоны Френеля, их форма и размеры определяются взаимным расположением волновой поверхности и точки наблюдения.



Радиус зоны Френеля

- Зоны Френеля нумеруются в порядке возрастания радиуса соответствующего кольца.
- Радиусом зоны Френеля называется расстояние от прямой, перпендикулярной к волновой поверхности и проходящей через точку наблюдения P , до внешнего края зоны, т.е. это внешний радиус кольца на волновой поверхности.



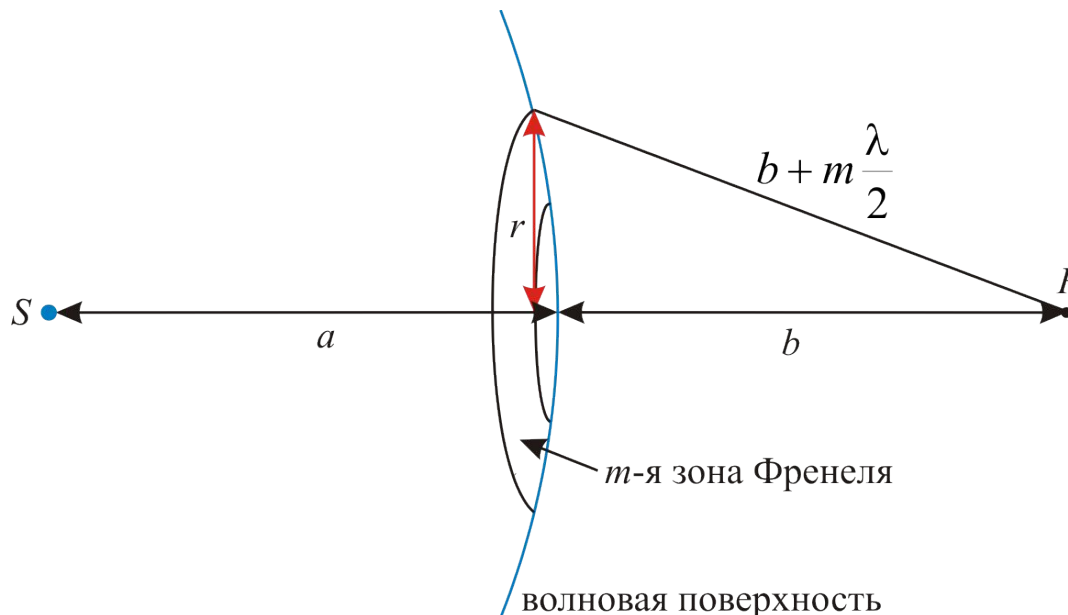
Вычислим радиус m -й зоны Френеля на плоской волновой поверхности.

Радиус зоны Френеля

- Можно показать, что для сферической световой волны радиус r_m m -й зоны Френеля:

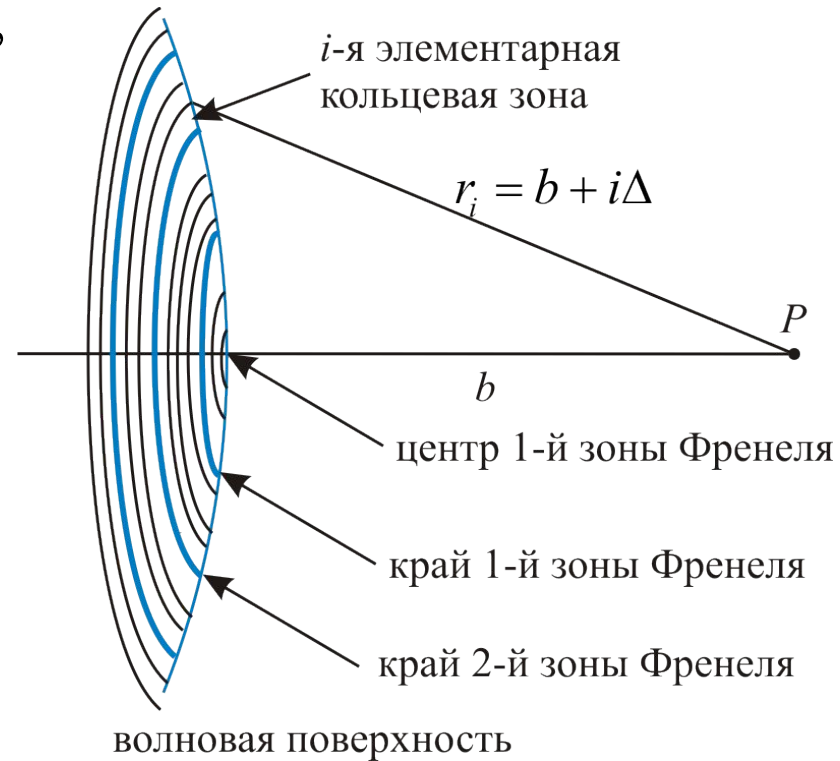
$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

- Здесь a – расстояние от источника сферической волны до волновой поверхности S , b – расстояние от волновой поверхности S до точки наблюдения P



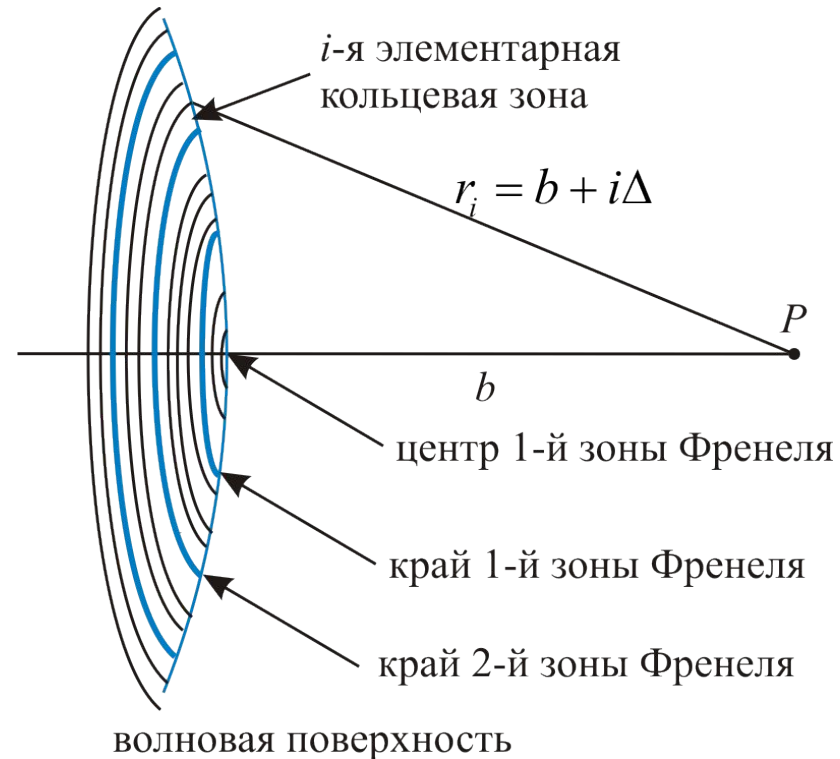
Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Пусть сферическая световая волна, распространяясь в пространстве, достигает точки наблюдения P . Рассмотрим одну из волновых поверхностей S и рассчитаем амплитуду E светового вектора в точке P как векторную сумму амплитуд вторичных волн ΔE_i , испускаемых поверхностью S .
- Для этого разобьем поверхность S на очень узкие кольцевые зоны, подобные зонам Френеля, но гораздо уже их.



Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Пронумеруем элементарные зоны в порядке возрастания их радиуса. Поскольку зоны узкие, то расстояния от любых точек одной зоны до точки P одинаковы.
- Обозначим r_i – расстояние от внешнего края i -й зоны до точки P .
- Выберем ширину каждой элементарной зоны так, чтобы разность расстояний $\Delta = r_{i+1} - r_i$ от двух соседних элементарных зон до точки P было одинаковым и намного меньшим длины волны λ .

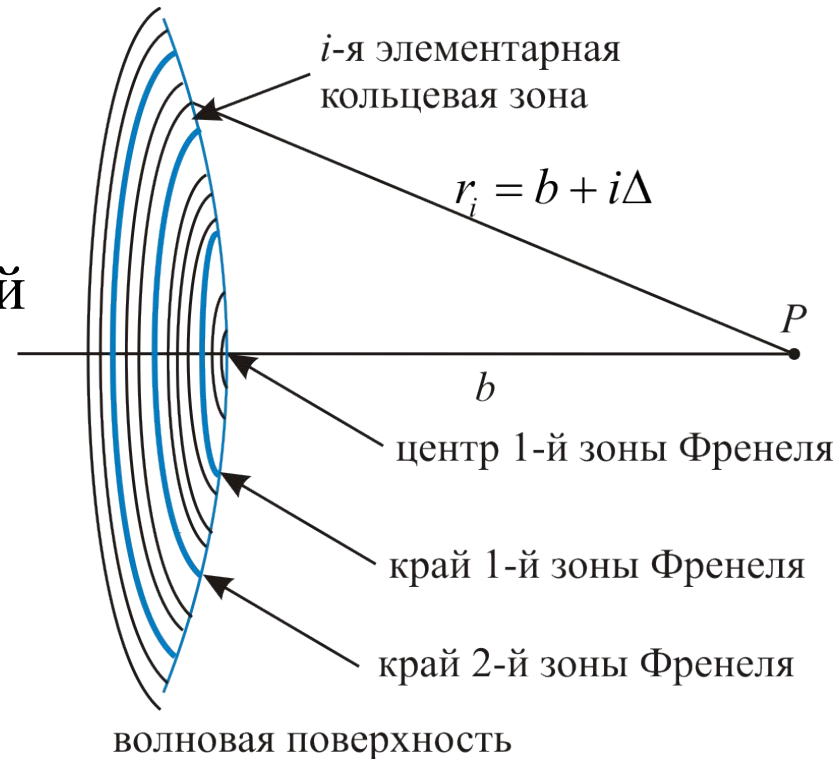


Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Если кратчайшее расстояние от волновой поверхности до точки P равно b , то $r_i = b + i\Delta$.
- Тогда световой вектор волны, пришедшей в точку P от участка i -й элементарной зоны:

$$\begin{aligned}\Delta E_i &= \Delta E_{mi} \cos[\omega t - k(b + i\Delta)] = \\ &= \Delta E_{mi} \cos[\omega t - kb - ik\Delta] = \\ &= \Delta E_{mi} \cos(\omega t - kb - i\delta)\end{aligned}$$

- Здесь δ - разность фаз двух вторичных волн, пришедших в точку P от двух соседних зон.

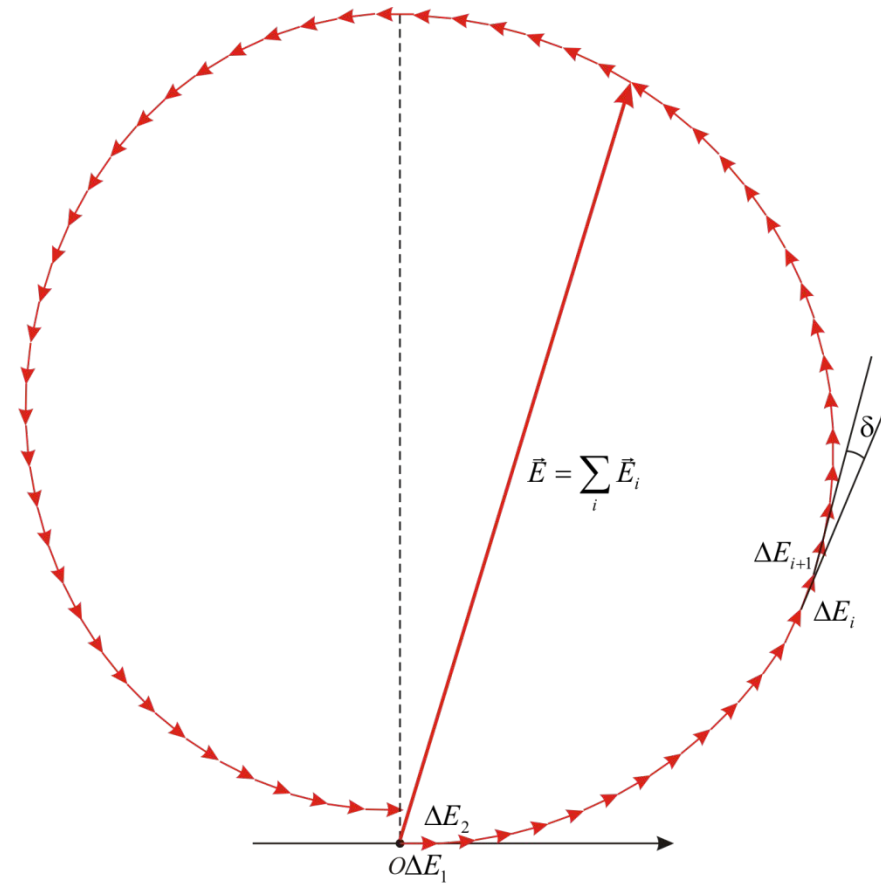


Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Тогда результирующий световой вектор E в точке P :

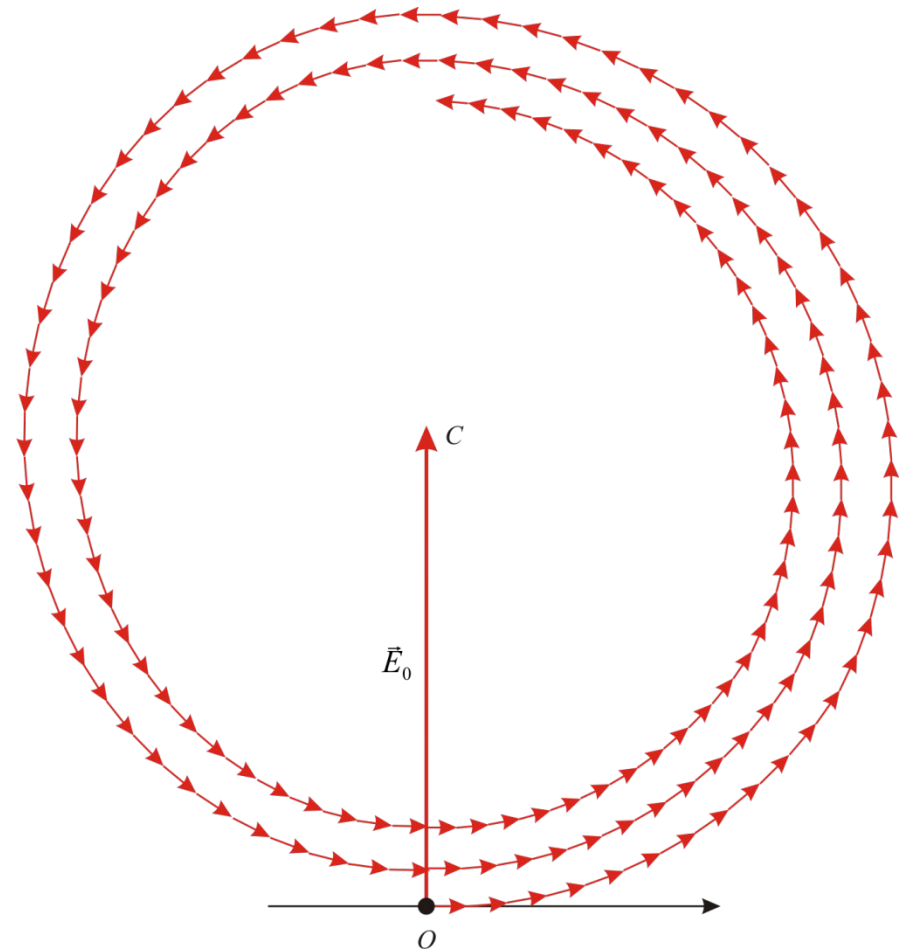
$$E = \sum \Delta E_i$$

- Сложим световые векторы методом векторной диаграммы с учетом того, что амплитуда каждого светового вектора ΔE_{im} с увеличением i уменьшается. В результате, при устремлении ширины каждой элементарной зоны к нулю, получаем **спираль Френеля**



Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, результирующий световой вектор \mathbf{E} в точке P – это сумма световых векторов $\Delta\mathbf{E}_i$ всех вторичных волн, пришедших в точку P от каждой из элементарных зон. Поэтому амплитуда \mathbf{E}_m результирующего светового вектора представляет собой вектор с началом в точке O и концом, расположенным в центре спирали.



Метод графического сложения амплитуд светового вектора

■ Построим на векторной диаграмме световые векторы, соответствующие колебаниям от:

- центра 1-й зоны Френеля;
- края 1-й зоны Френеля
- края 2-й зоны Френеля

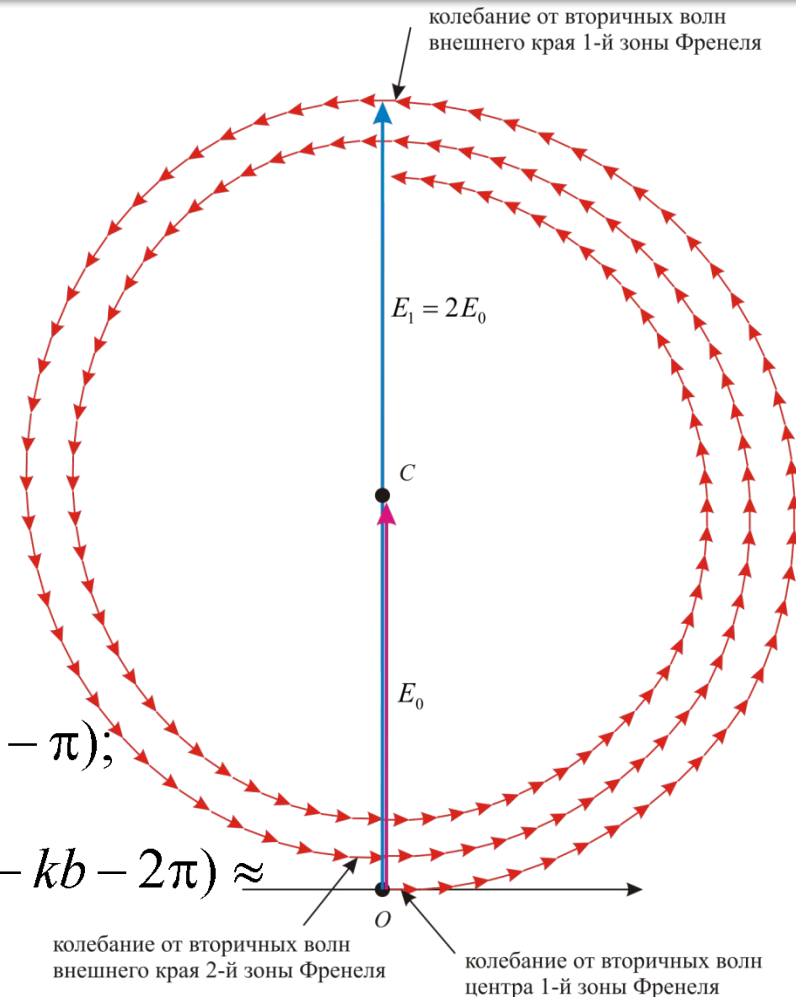
$$\Delta E_1 = \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb + \delta) \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb)$$

$$\Delta E_{13\Phi} \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - k\Delta) \approx$$

$$\approx \Delta E_{1m} \cos\left(\omega t - kb - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - \pi);$$

$$\Delta E_{23\Phi} \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - 2k\Delta) \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - 2\pi) \approx$$

$$\approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb)$$

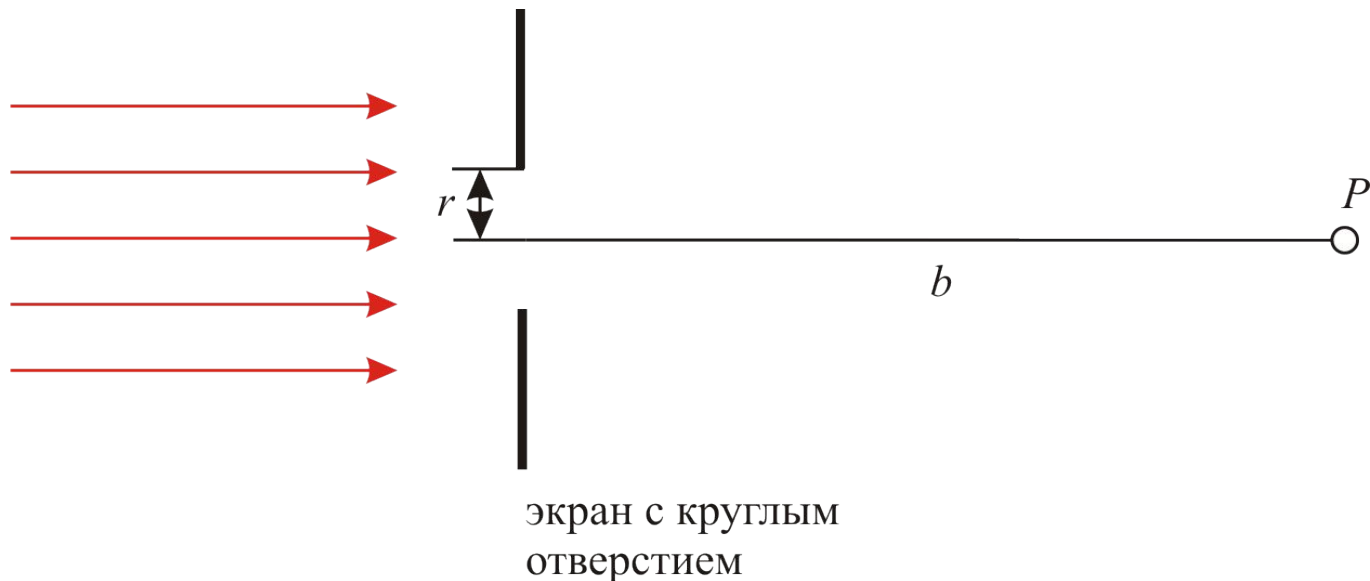


ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

6.2 Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Пусть плоская световая волна падает на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 . Обозначим: b – расстояние от центра отверстия до точки наблюдения P , расположенной на прямой, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через центр отверстия; λ – длина световой волны

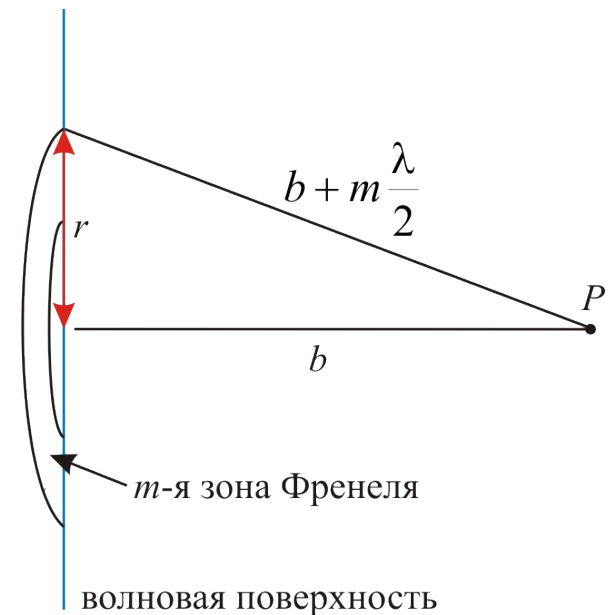


Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Определим интенсивность света в точке наблюдения P . С этой целью найдем число зон Френеля, которые благодаря отверстию остаются открытыми на волновой поверхности падающей волны, если наблюдать за ней из точки P . Приравняем радиус отверстия r_0 к радиусу r_m m -й зоны Френеля:

$$r_0 = r_m = \sqrt{b m \lambda} \Rightarrow m = \frac{r_0^2}{b \lambda}$$

Здесь m – число открытых отверстием зон Френеля, (может быть целым или нецелым числом)

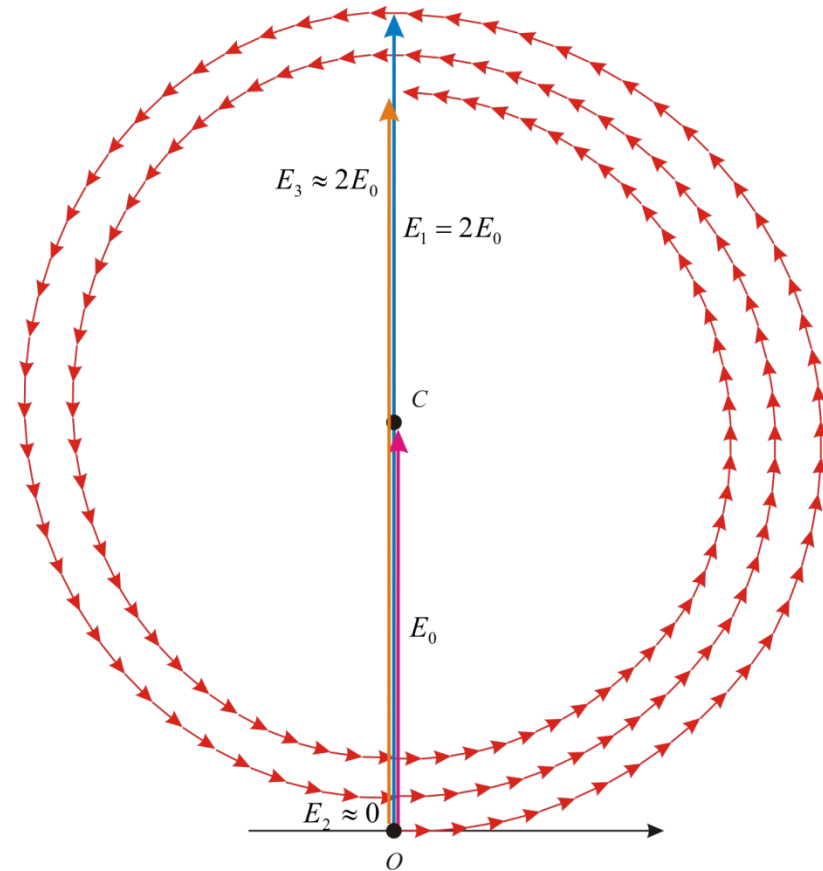


Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Значение m (число открытых отверстием зон Френеля) зависит от параметра b , т.е. от места расположения точки наблюдения относительно экрана с отверстием. Если радиус отверстия r_0 остается неизменным, то при изменении положения точки наблюдения P число открытых зон меняется.

Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Интенсивность света в точке P приближенно можно определить с помощью *метода векторной диаграммы колебаний светового вектора*.
- Пусть $m = 1$ (отверстие открывает только первую зону Френеля). Тогда (см. рисунок) амплитуда светового вектора $E = 2E_0$. Таким образом, $I \sim E_0^2 = 4I_0$.
- Если $m = 2$ (отверстие открывает первую и вторую зоны Френеля), то, как видно из рисунка, $E \approx 0$ и $I \approx 0$.



Амплитудная зонная пластинка

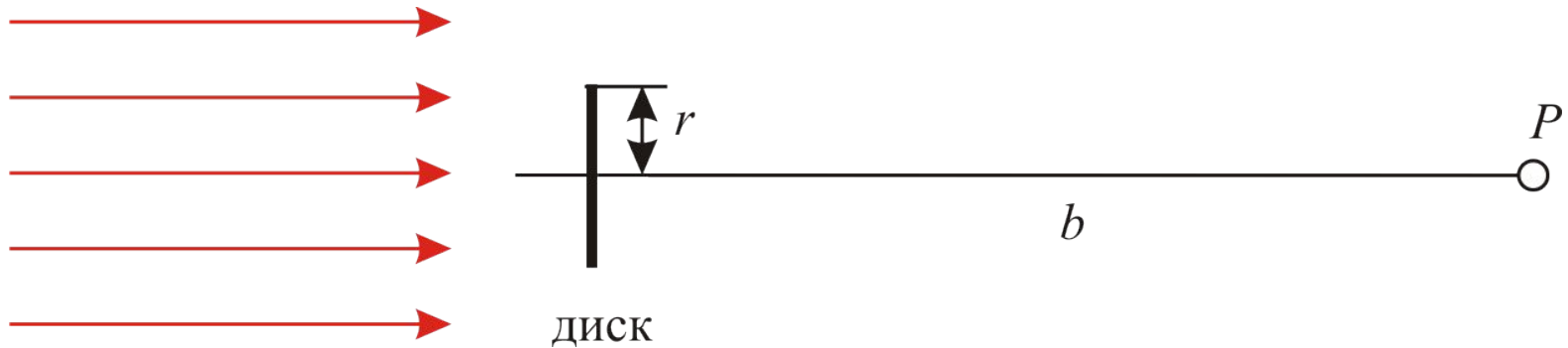
- Таким образом, для небольших значений m справедливо следующее утверждение: *интенсивность в точке наблюдения зависит от того, четное или нечетное число зон Френеля открыто отверстием: если число нечетное, то в точке наблюдения образуется светлое пятно, если четное – темное.*
- Значительно большее усиление света в точке P можно осуществить, если изготовить стеклянную пластинку, на поверхность которой нанесено непрозрачное покрытие в виде колец, закрывающих только четные (или только нечетные) зоны Френеля. Такая пластинка называется **амплитудной зонной пластинкой**.

Фазовая зонная пластинка

- Еще большего эффекта усиления света можно достичь, не перекрывая четные/нечетные зоны Френеля, а изменяя фазу колебаний на π .
- Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным и нечетным зонам, отличается ровно на такую величину, что соответствующая этой величине длина пути составляет $\lambda/2$.
- Таким образом, если абсолютный показатель преломления стекла равен n , то толщина стекла в области четных и нечетных зон Френеля должна отличаться на величину h , удовлетворяющую условию $nh = \lambda/2$. Тогда вторичные волны будут приходить в точку P не в противофазе, а в фазе.
- Такая пластинка называется **фазовой зонной пластинкой**.

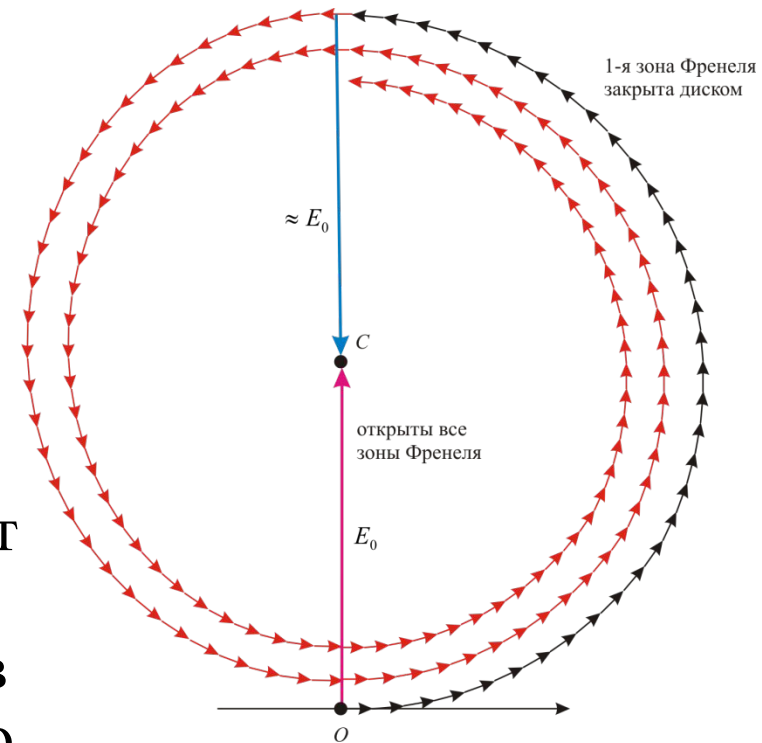
Дифракция Френеля на круглом диске

- Если на пути световой волны поместить непрозрачный диск, то в любой точке наблюдения P на прямой, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, т.е. в области геометрической тени, интенсивность света будет отлична от нуля.



Дифракция Френеля на круглом диске

- Пусть, например, радиус диска равен радиусу первой зоны Френеля. Тогда на векторной диаграмме колебаний вектора \mathbf{E} в точке P отсутствует участок, соответствующий первой зоне Френеля. Тогда, как видно из рисунка, $E = E_0$ и $I = I_0$.
- Во всех случаях, когда диск закрывает m зон Френеля, на векторной диаграмме отсутствуют m полувитков спирали. И если m не слишком велико, то $E = E_0$ и $I = I_0$. Т.е. интенсивность света в точке P почти не отличается от интенсивности падающей волны.

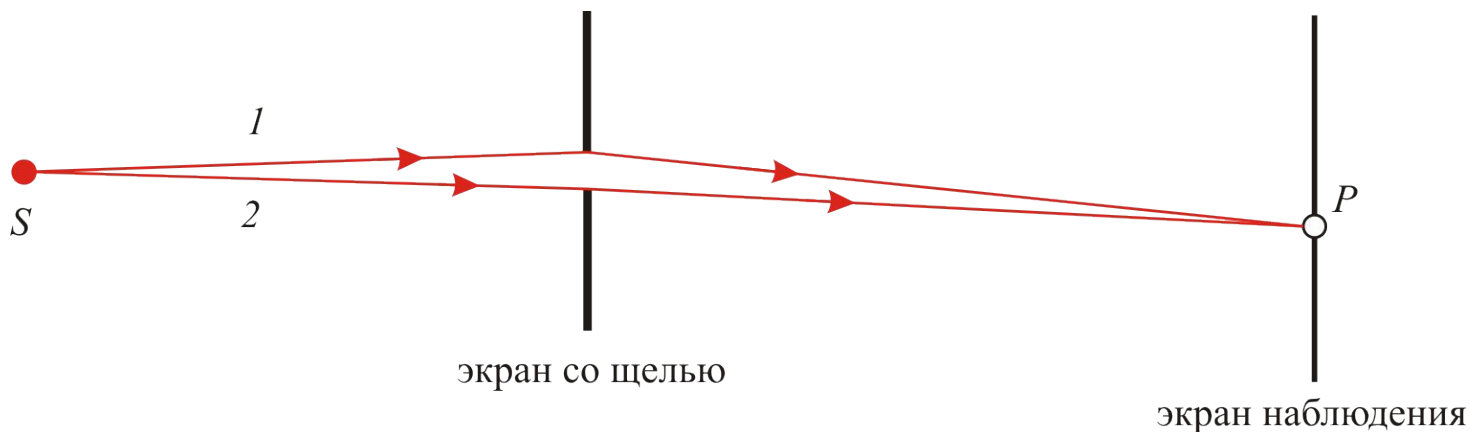


ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

6.3 Дифракция Фраунгофера на прямоугольной щели

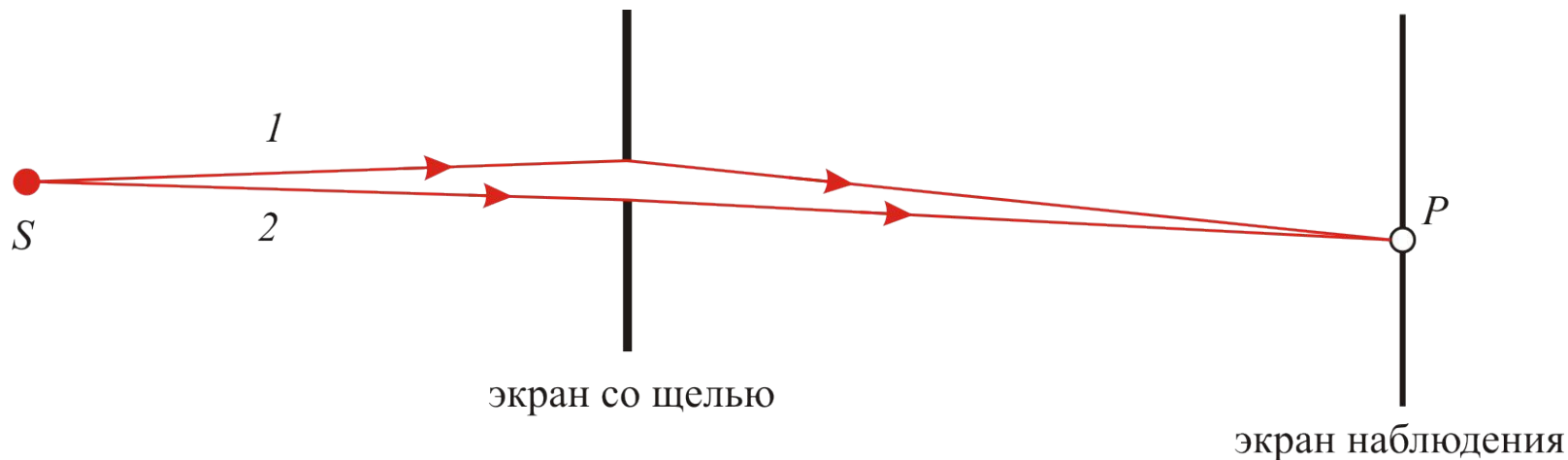
Дифракция Фраунгофера

- Пусть на большом удалении друг от друга располагаются источник монохроматического света, непрозрачный экран с длинной узкой щелью, и экран наблюдения.
- Если лучи, идущие от источника к препятствию (краям щели) и от препятствия к произвольной точке на экране наблюдения, образуют пучки почти параллельных лучей, то возникающая на экране дифракционная картина называется **дифракцией Фраунгофера** (или **дифракция в параллельных лучах**).



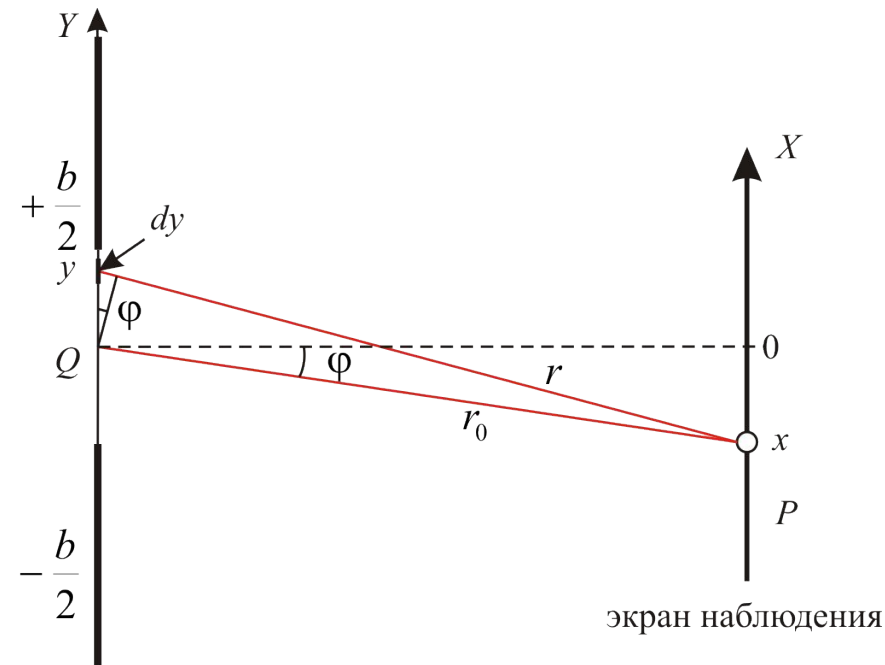
Дифракция Фраунгофера

- Будем полагать, что вследствие удаленности точечного источника лучи 1 и 2 , идущие к щели, можно считать параллельными, а падающую на препятствие световую волну – плоской. Волновая поверхность падающей волны параллельна плоскости щели и экрану наблюдения.
- Обозначим: b – ширина щели. Определим распределение интенсивности света вдоль экрана наблюдения – дифракцию от щели.



Дифракция Фраунгофера от щели

- Положение точки наблюдения P на экране задается углом ϕ между нормалью к плоскости щели и направлением QP от середины щели к точке P ; за положительное направление отсчета угла ϕ примем поворот отрезка QP по часовой стрелке.
- Направим ось Y перпендикулярно щели, начало оси совместим с серединой щели – точкой Q . Координаты краев щели: $-b/2$ и $+b/2$.

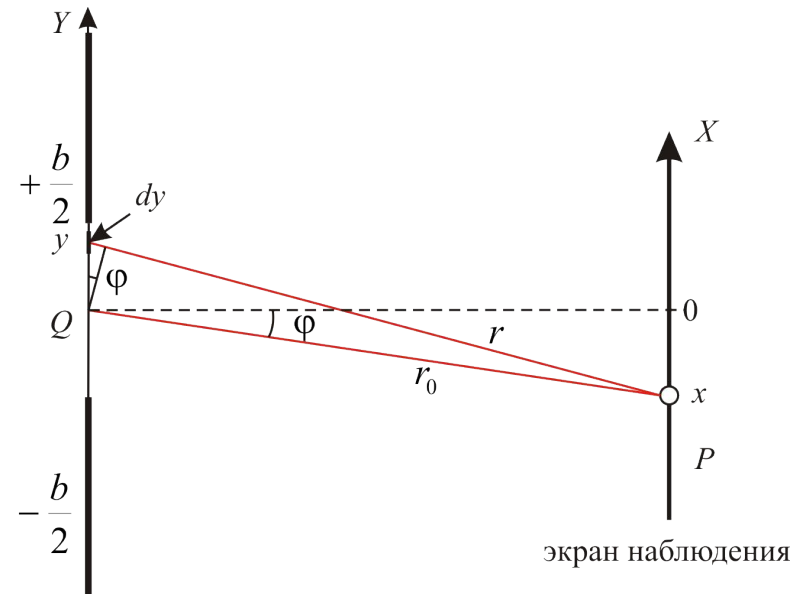


экран со щелью

Дифракция Фраунгофера от щели

- Мысленно разделим поверхность щели на элементарные полосы толщиной dy , края которых параллельны краям щели.
- Обозначим: r_0 – длина отрезка QP , тогда в силу параллельности всех лучей, всех лучей,
- Все вторичные волны от одной элементарной полосы приходят в точку P в одинаковой фазе, т.е.:

$$\begin{aligned} dE &= A dy \cos(\omega t - kr) = \\ &= A dy \cos(\omega t - kr_0 - k y \sin \varphi) \end{aligned}$$



экран со щелью

Здесь $A dy$ – амплитуда колебания, пропорциональная площади участка излучения (ширине dy элементарной полосы).

Дифракция Фраунгофера от щели

- Результирующее колебание светового вектора E в точке наблюдения P представляет собой сумму колебаний, порожденных всеми элементарными полосами, на которые мысленно разбита щель:

$$E = \int dE = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} A dy \cos(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) = -\frac{A}{k \sin \varphi} \sin(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} =$$
$$= -\frac{A}{k \sin \varphi} \left[\sin\left(\omega t - kr_0 - \frac{kb \sin \varphi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - kr_0 + \frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \right] = Ab \frac{\sin \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\frac{kb \sin \varphi}{2}} \cos(\omega t - kr_0)$$

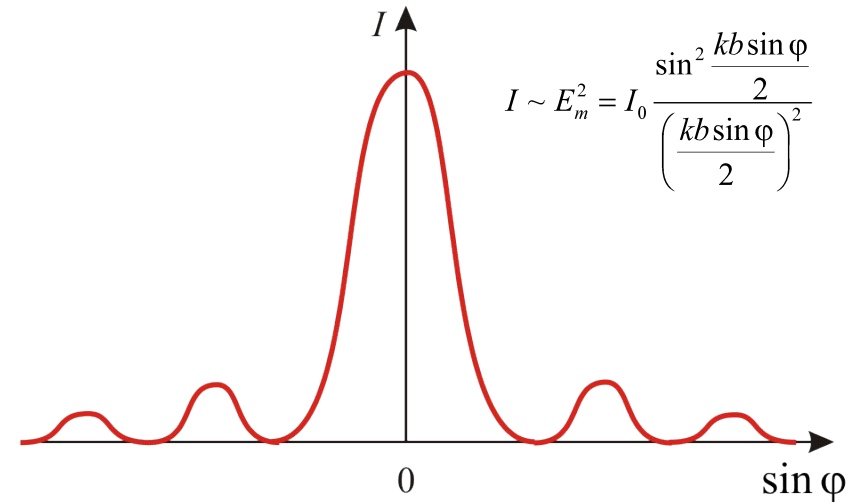
- Интенсивность волны:

$$I \sim E_m^2 = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)^2}$$

Здесь I_0 – интенсивность света в точке наблюдения, расположенной напротив середины щели ($\varphi = 0$)

Дифракция Фраунгофера на щели

- Формула $I(\phi)$ является основной при описании дифракции Фраунгофера. С ее помощью можно определить направления на минимум/максимум интенсивности света на экране и вычислить интенсивность в любой его точке.
- Если x – координата точки экрана, l расстояние от щели до экрана, то заменой $\sin\phi = x/l$ можно получить зависимость $I(x)$.



Из графика видно, что основная часть энергии световой волны, прошедшей через щель, сосредоточена в области центрального дифракционного максимума.

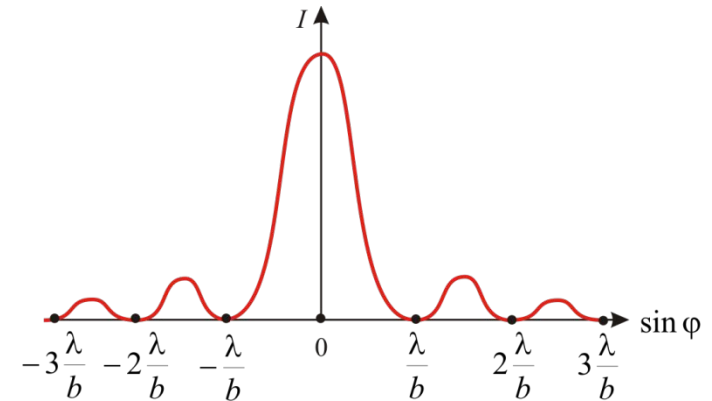
Дифракция Фраунгофера на щели

- Направления на минимумы интенсивности света в дифракционной картине определяются из равенства нулю числителя дроби $I(\phi)$:

$$\sin \frac{kb \sin \phi}{2} = 0,$$

$$\frac{kb \sin \phi}{2} = \frac{2\pi \sin \phi}{2\lambda} = \frac{\pi \sin \phi}{\lambda} = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$b \sin \phi = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$I \sim E_m^2 = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \phi}{2}}{\left(\frac{kb \sin \phi}{2}\right)^2}$$

$$b \sin \phi = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

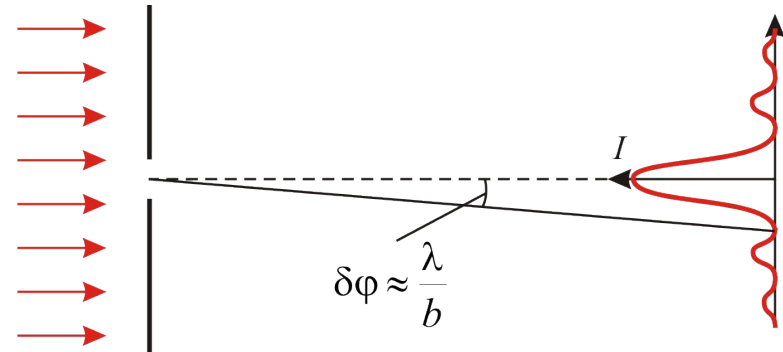
Дифракция Фраунгофера на щели

- Направления на первые ($m = \pm 1$) минимумы дифракции:

$$b \sin \varphi_1 = \pm \lambda, \quad \sin \varphi_1 = \pm \frac{\lambda}{b}$$

- Угол φ_1 называется **угловой полушириной дифракционного максимума**. Для малых углов угловая полуширина дифракционного максимума

$$\delta\varphi \approx \sin \varphi = \frac{\lambda}{b}$$



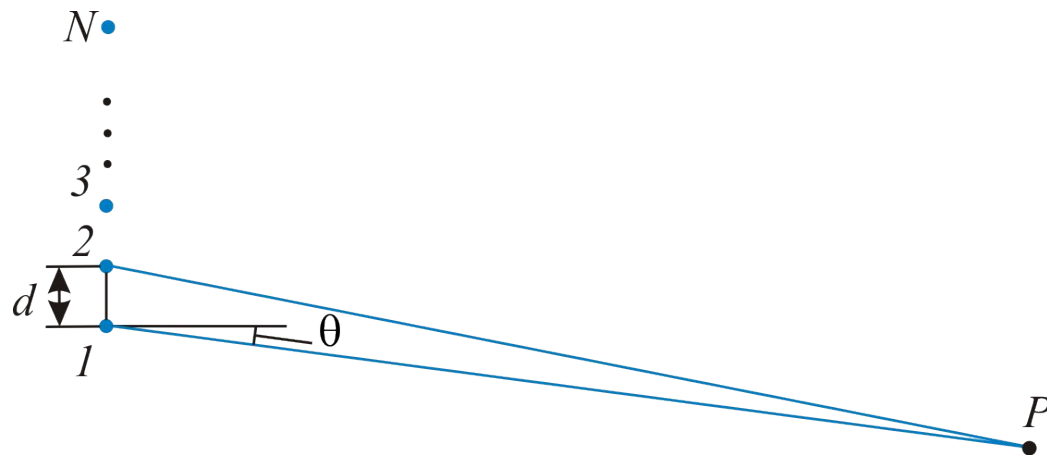
Всякий пучок лучей с характерным поперечным размером b (например, ширина щели, диаметр диафрагмы) характеризуется **дифракционным уширением**, равным по порядку величины угловой полуширине $\delta\varphi$ центрального дифракционного максимума.

ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

6.4 Многолучевая интерференция

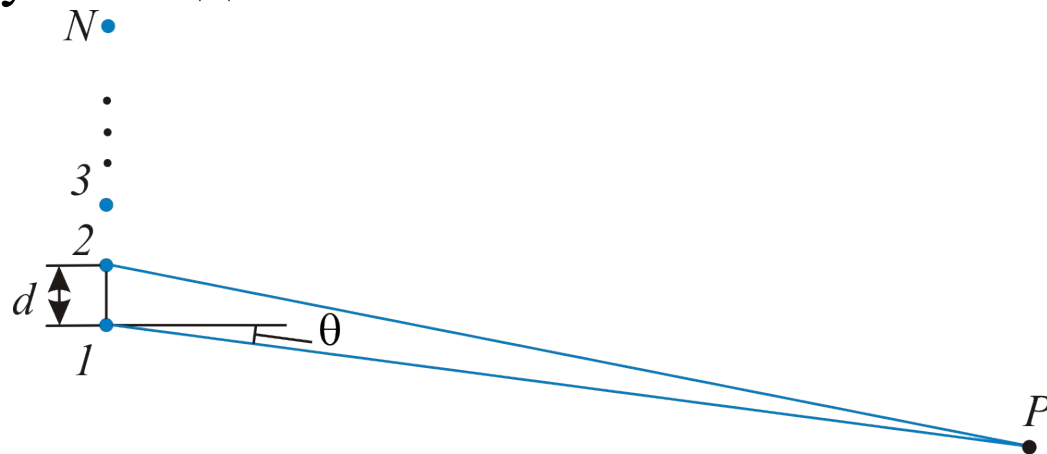
Многолучевая интерференция

- Рассмотрим интерференцию волн, излучаемых несколькими точечными когерентными источниками света – **многолучевую интерференцию**.
- Пусть в однородной изотропной среде с $\varepsilon = \mu = 1$ имеется N расположенных вдоль одной прямой когерентных источников света, колебания которых происходят в одинаковой фазе ωt , где ω – циклическая частота. Расстояние между соседними источниками равно d . Определим интенсивность излучения в точке наблюдения P .



Многолучевая интерференция

- Поскольку точка P находится на большом удалении от источников, то лучи, идущие от источников в точку P можно считать параллельными друг другу. Будем также предполагать, что амплитуды волн от всех источников одинаковы.
- Обозначим θ – угол между нормалью к линии, вдоль которой расположены источники и направлением на точку P .
- Расстояние от i -го источника до точки P равно:
 $r_i = r_1 + (i - 1)d\sin\theta$, где $d\sin\theta$ – оптическая разность хода лучей, идущих от двух соседних источников.



Многолучевая интерференция

- Каждый источник с порядковым номером i порождает в точке P колебание светового вектора E_i :

$$E_1 = E_m \cos(\omega t - kr_1),$$

$$E_2 = E_m \cos(\omega t - kr_2) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - kd \sin \theta),$$

$$E_3 = E_m \cos(\omega t - kr_3) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - 2kd \sin \theta),$$

.....

$$E_i = E_m \cos(\omega t - kr_i) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - (i - 1)kd \sin \theta),$$

.....

$$E_N = E_m \cos(\omega t - kr_N) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - (N - 1)kd \sin \theta),$$

Здесь E_m – амплитуда колебания, возбужденного в точке P волной от одного источника и одинаковая для всех источников.

Многолучевая интерференция

- Результирующее колебание E светового вектора в точке P равно сумме всех колебаний:

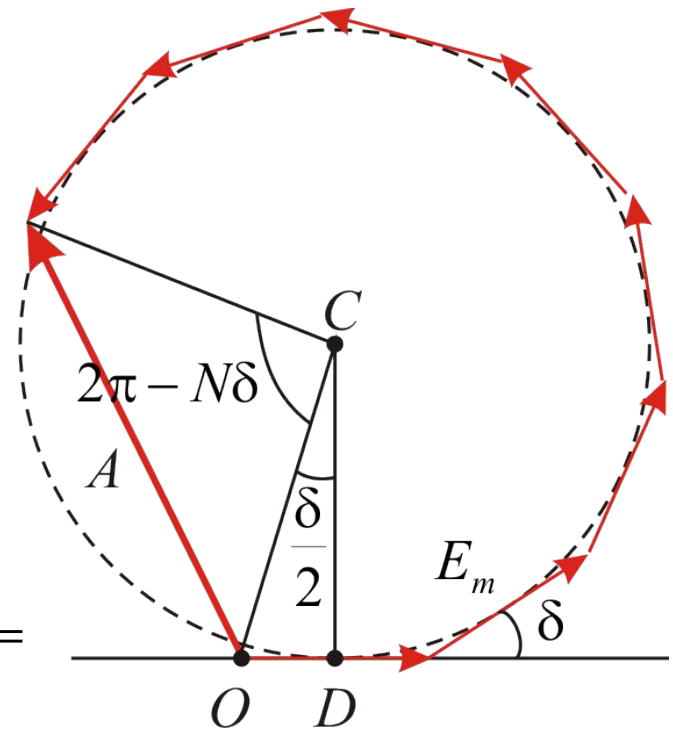
$$E = \sum_{i=1}^N E_i$$

- Для вычисления E воспользуемся методом векторной диаграммы.
- Все складываемые колебания имеют одинаковую амплитуду E_m , разность фаз между колебания от двух соседних источников равна $\delta = kdsin\theta$, поэтому вектор каждого колебания имеет длину E_m и повернут на угол δ против часовой стрелки по отношению к вектору предыдущего колебания.
- Векторная диаграмма представлена на следующем слайде.

Многолучевая интерференция

- Векторная диаграмма представляет собой часть правильного N -угольника, со стороной E_m . Результирующее колебание изображается на диаграмме вектором E . Из простых геометрических соображений ясно, что его длина:

$$E = OB = 2OC \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = 2 \frac{OD}{\sin \frac{\delta}{2}} \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} =$$
$$= 2 \frac{E_m}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = E_m \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$$



Зависимость интенсивности света от угла дифракции

- Тогда интенсивность I света в точке P , пропорциональная квадрату амплитуды E_m светового вектора, равна

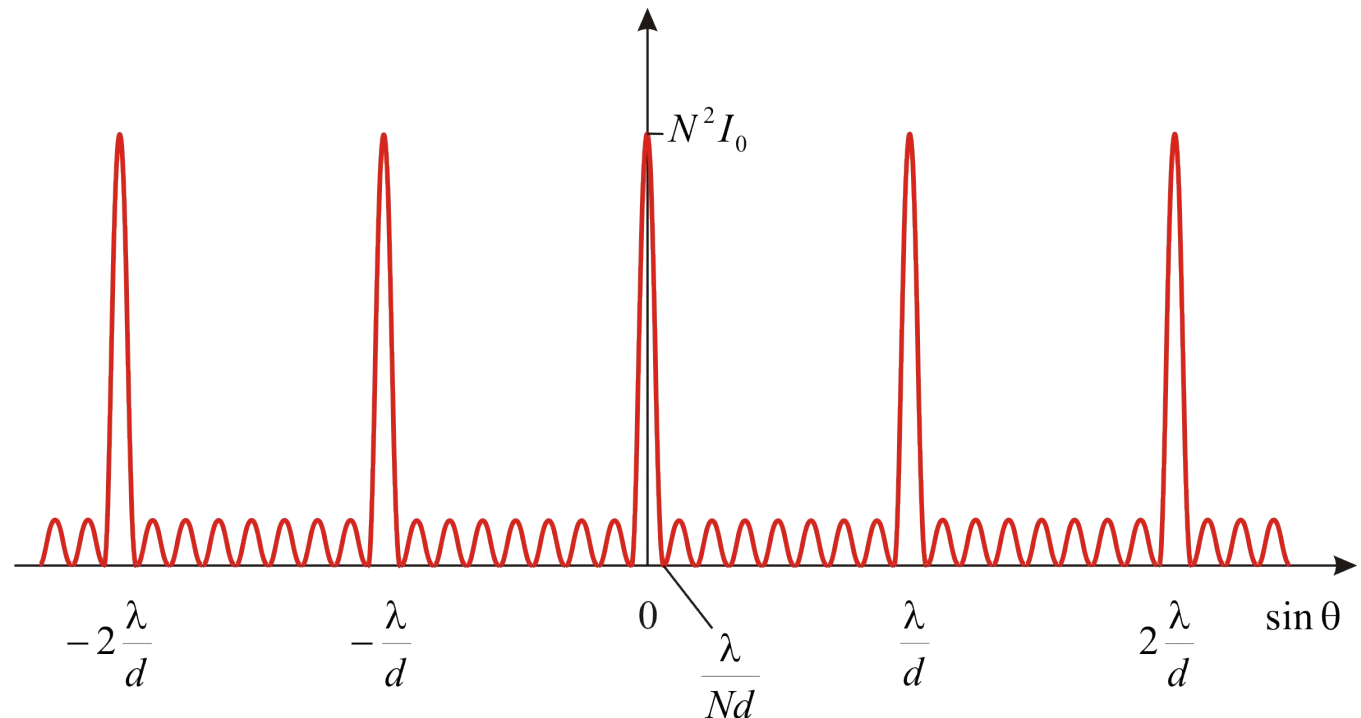
$$I \sim E^2 = I_0^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$

- Здесь I_0 – интенсивность световой волны, пришедшей в точку P от каждого из N источников, пропорциональная квадрату амплитуды E_m .
- Таким образом, интенсивность света в точке наблюдения P зависит от угла θ , определяющего направление наблюдения.

Зависимость интенсивности света от угла дифракции

- На рисунке представлен график зависимости $I(\theta)$, на котором имеются резко выраженные максимумы — так называемые главные интерференционные максимумы интенсивности

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$

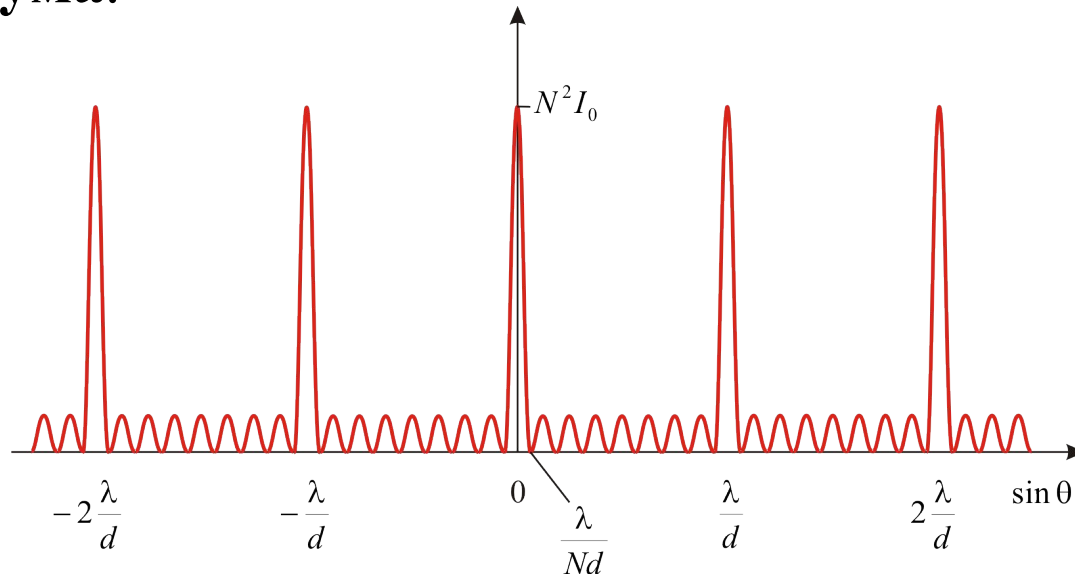


Главные максимумы

- Найдем положения главных максимумов на экране: приравняем к нулю знаменатель выражения $I(\theta)$:

$$\sin \frac{kd \sin \theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{kd \sin \theta}{2} = m\pi, \Leftrightarrow \frac{2\pi d \sin \theta}{2\lambda}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Число m называется **порядком главного интерференционного максимума**.



$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$

Главные максимумы

- Таким образом, углы, определяющие направления на главные максимумы интенсивности в интерференционной картине от N когерентных источников света, должны удовлетворять условию:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Интенсивность главного максимума

- Теперь найдем значение интенсивности света в центральном ($m = 0$) главном максимуме, для которого $\theta = 0$ и тогда значение разности фаз складываемых колебаний $\delta = kdsin\theta = 0$.
- Тогда, согласно выражению для $I(\theta)$:

$$I_{\max} = I_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \approx I_0 \frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = N^2 I_0$$

- Т.о. интенсивность света в главном максимуме в N^2 раз превышает интенсивность света I_0 от отдельного взятого источника.

Интенсивность главного максимума

- Оценим угловую ширину $\delta\theta$ центрального максимума, т.е. угловое расстояние между направлениями на центральный максимум ($\theta = 0$) и направлением на первый (ближайший к центральному максимуму) минимум интенсивности: $\delta\theta = \theta_{1\min}$:

$$\sin \frac{Nkd \sin \theta_{1\min}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{Nkd \sin \theta_{1\min}}{2} = \frac{2\pi Nd \sin \theta_{1\min}}{2\lambda} = \pi,$$

$$\sin \theta_{1\min} = \frac{\lambda}{Nd}.$$

- При малых углах θ : $\sin \theta_{1\min} \approx \theta_{1\min}$, поэтому угловая ширина центрального (и ближайших к нему) главного максимума:

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}.$$

ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

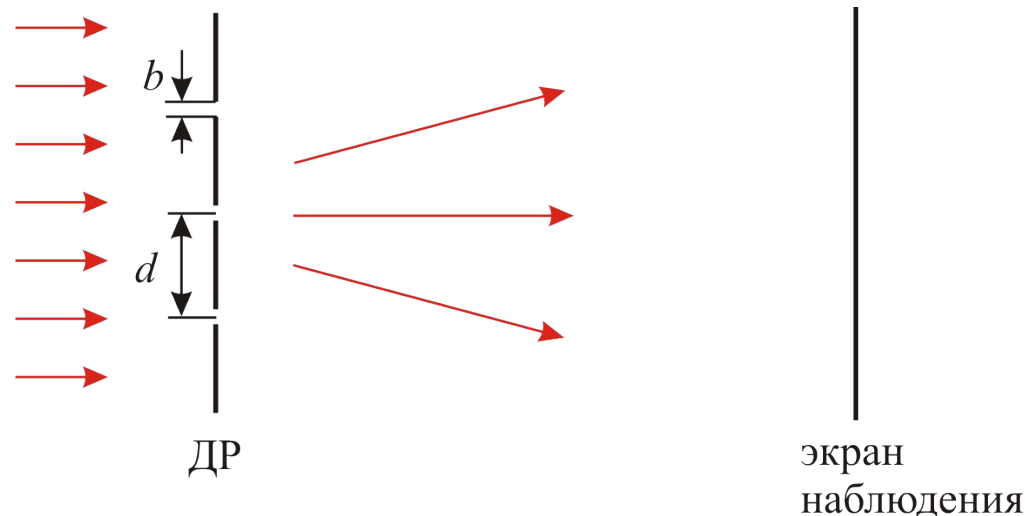
6.5 Дифракционная решетка

Дифракционная решетка

- **Дифракционная решетка** представляет собой совокупность большого количества одинаковых, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга длинный щелей в непрозрачном экране.
- **Периодом (постоянной) решетки d** называется расстояние между серединами соседних щелей.
- Дифракция света, прошедшего через решетку, – это дифракция Фраунгофера.

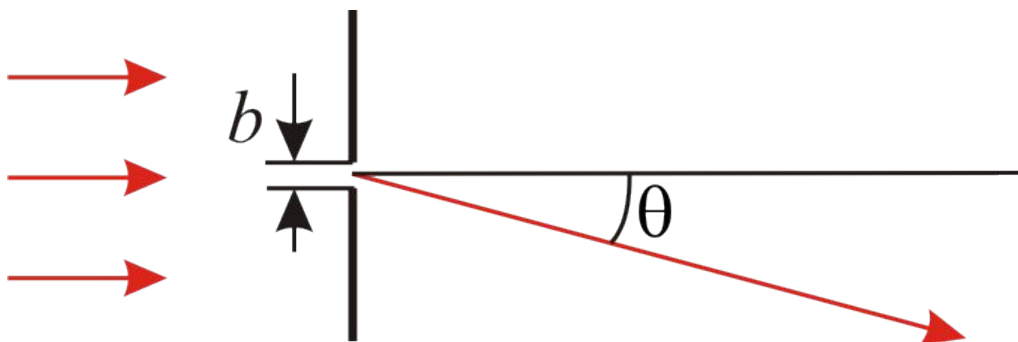
Дифракционная решетка

- Пусть плоская световая волна падает на ДР по нормали к ее поверхности. За решеткой на большом расстоянии располагается экран для наблюдения дифракционной картины.
- Если расстояние между решеткой и экраном недостаточно велико для наблюдения дифракции Фраунгофера, между решеткой и экраном помещают собирающую линзу, которая сводит на экране лучи, пересекающиеся в отсутствие линзы на бесконечности.



Дифракционная решетка

- Пусть период решетки равен d , ширина каждой щели b , число щелей N . Определим угловое распределение интенсивности света на экране после прохождения решетки.
- Рассмотрим сначала одну отдельную щель ширины b . Обозначим $I_1(\theta)$ – интенсивность света, испускаемого поверхностью щели в направлении θ .
- Ранее была получена формула для $I_1(\theta)$:

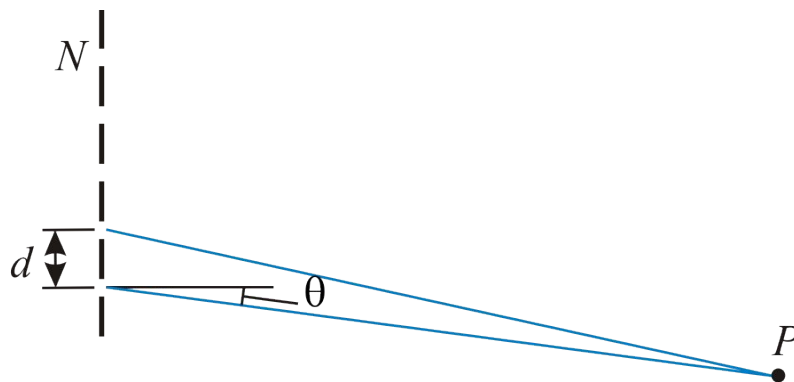


$$I_1(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\left(\frac{kb \sin \varphi}{2} \right)^2}$$

Распределение интенсивности света на экране

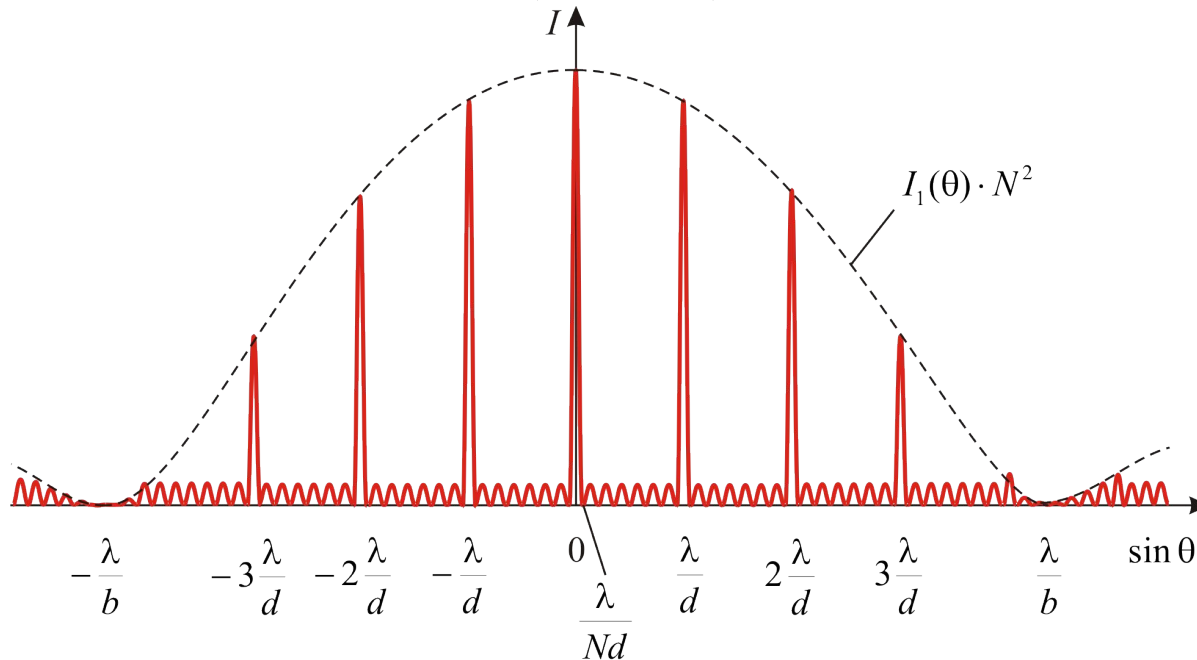
- Пусть теперь свет падает на решетку, состоящую из N щелей – N когерентных источников света, расположенных на расстоянии d друг от друга.
- Тогда интенсивность $I(\theta)$ результирующей световой волны, возникающей в результате наложения волн от N источников:

$$I = I_1(\theta) \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \theta}{2}}{\left(\frac{kb \sin \theta}{2} \right)^2} \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$



Распределение интенсивности света на экране

- Таким образом, дифракционная картина, возникающая при прохождении света через ДР, представляет собой наложение двух дифракционных картин: дифракции Фраунгофера от щели и интерференционной картины, возникающей при наложении волн от N когерентных источников (щелей).



Свойства дифракционной решетки

- Перечислим основные особенности дифракционной картины от ДР.

- 1) Углы θ , определяющие направления на главные интерференционные максимумы, удовлетворяют условию, аналогичному рассмотренному в предыдущем параграфе:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 2) Угловая полуширина главного максимума при небольших m :

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}.$$

- 3) Интенсивность света I_{\max} в главном максимуме ДР в N^2 раз превышает интенсивность I_1 света, испускаемого одной отдельно расположенной щелью: $I_{\max} = N^2 I_1$.

Свойства дифракционной решетки

- 4) Предельный (наибольший возможный) порядок главного максимума $m_{\text{пред}}$ в дифракционной картине зависит от геометрических размеров решетки

- Из условия главных максимумов найдем:

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow m_{\text{пред}} = \left\{ \frac{d}{\lambda} \right\}$$

- Таким образом, $m_{\text{пред}}$ равен целому числу длин волн λ , укладываемых на расстоянии d . Период решетки равен наибольшей возможной оптической разности хода интерферирующих лучей, идущих от двух соседних щелей. При этом лучи распространяются вдоль поверхности ДР ($\theta = \pi/2$).

ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

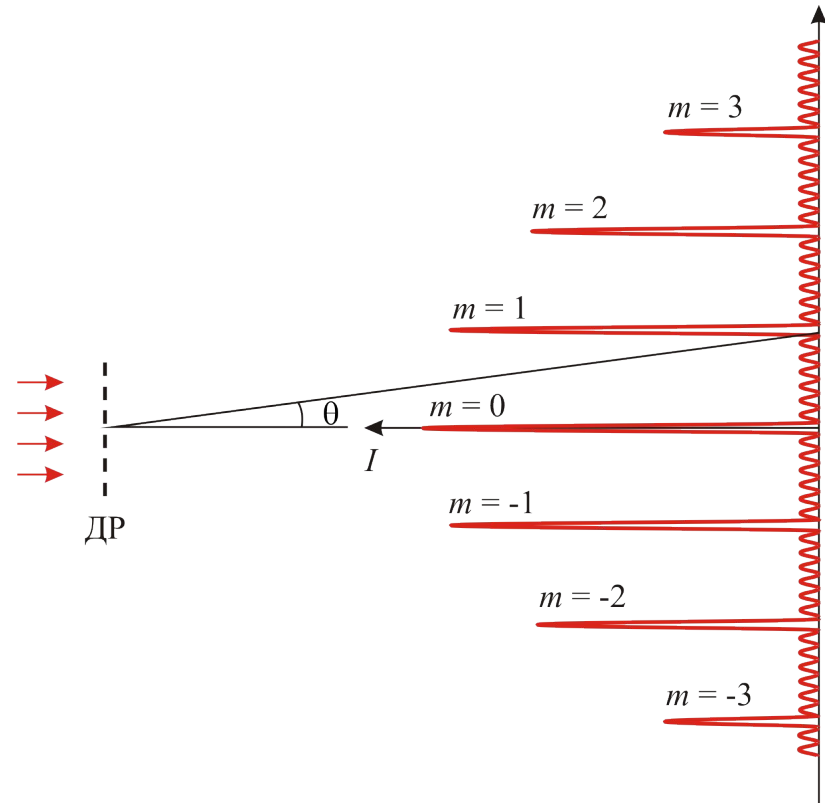
6.6 Дифракционная решетка как спектральный прибор

Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- При нормальном падении света с длиной волны λ на ДР положение в пространстве главных максимумов интенсивности в дифракционной картине определяется условием:

$$d \sin \theta = m\lambda$$

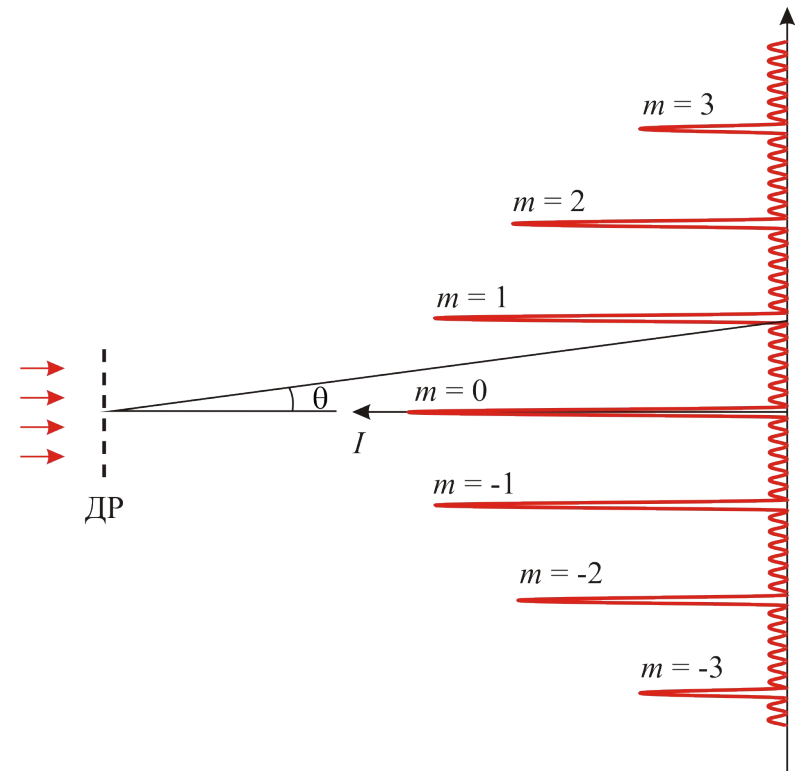
- Здесь d – период решетки, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - порядок главного максимума, θ – угол между нормалью к поверхности ДР и направлением на главный максимум.



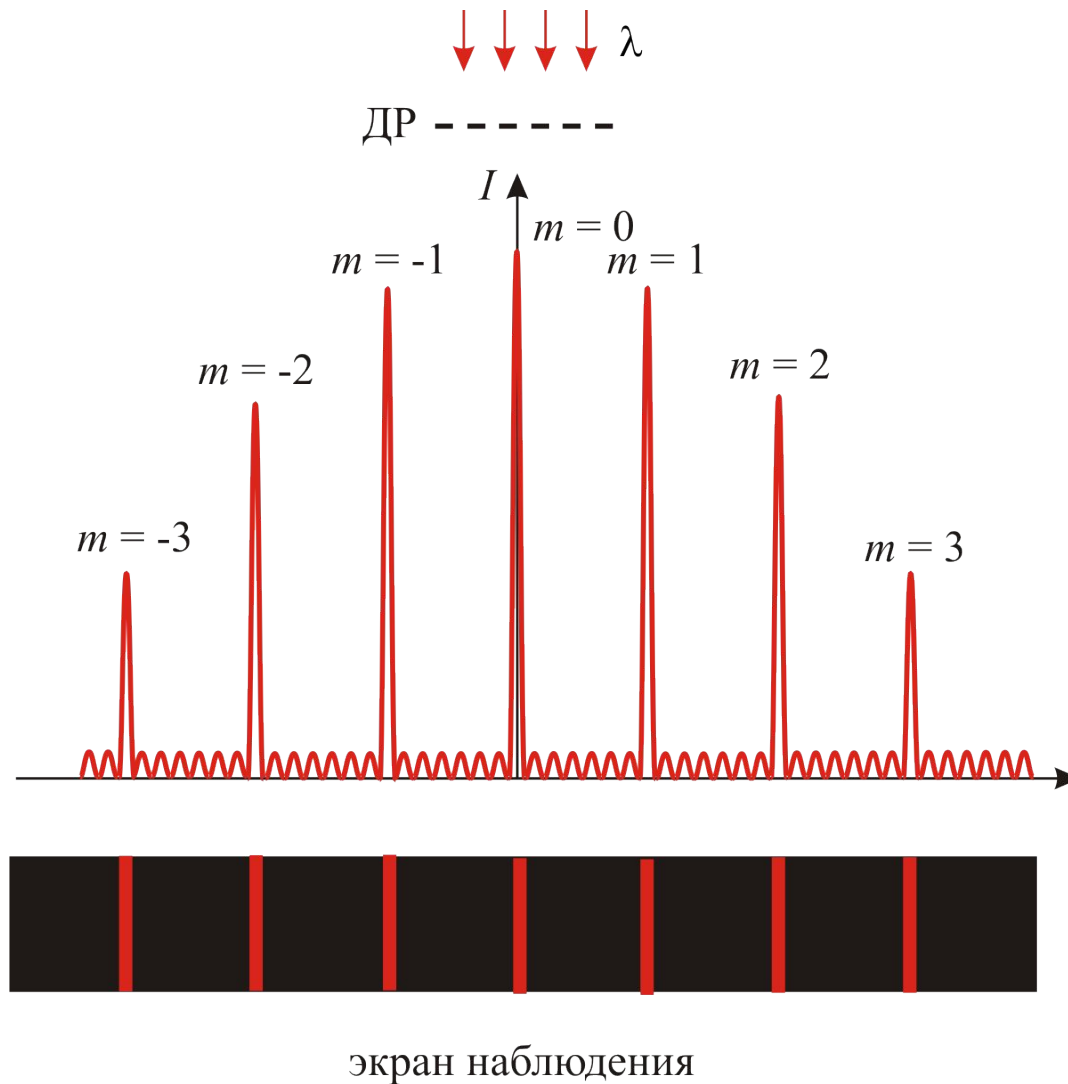
Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- Направления на главный максимум (угол θ) и положения максимума на экране *зависят от длины волны λ* : чем больше λ , тем больше угол θ и тем дальше от центра дифракционной картины располагается соответствующий максимум интенсивности.
- От длины волны λ не зависит положение только одного главного максимума – центрального (при $m = 0$, $\theta = 0$ для любых λ)

$$d \sin \theta = m\lambda$$

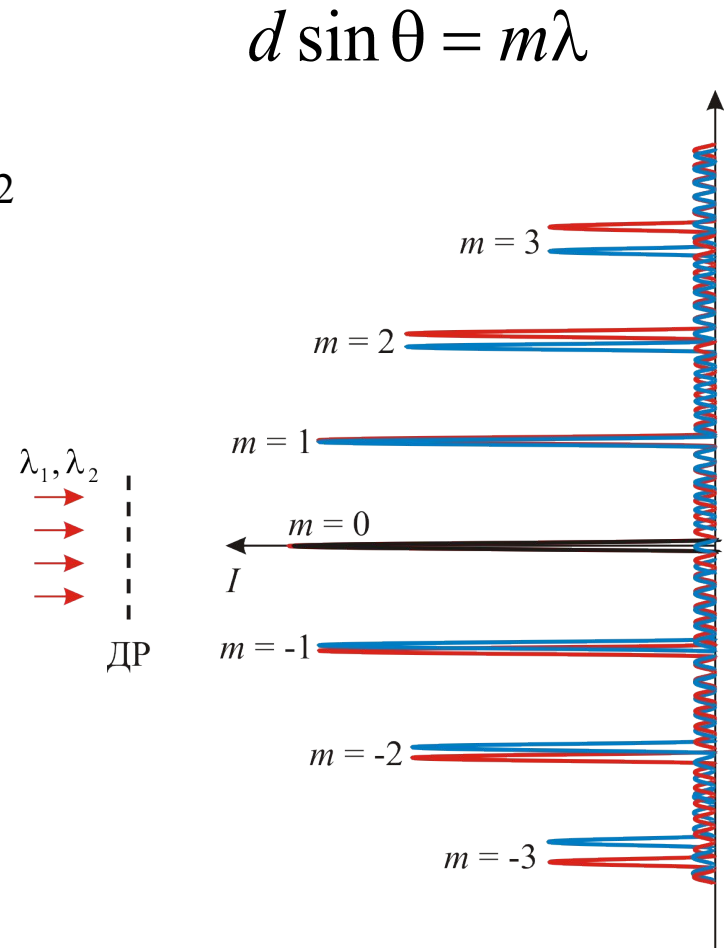


Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

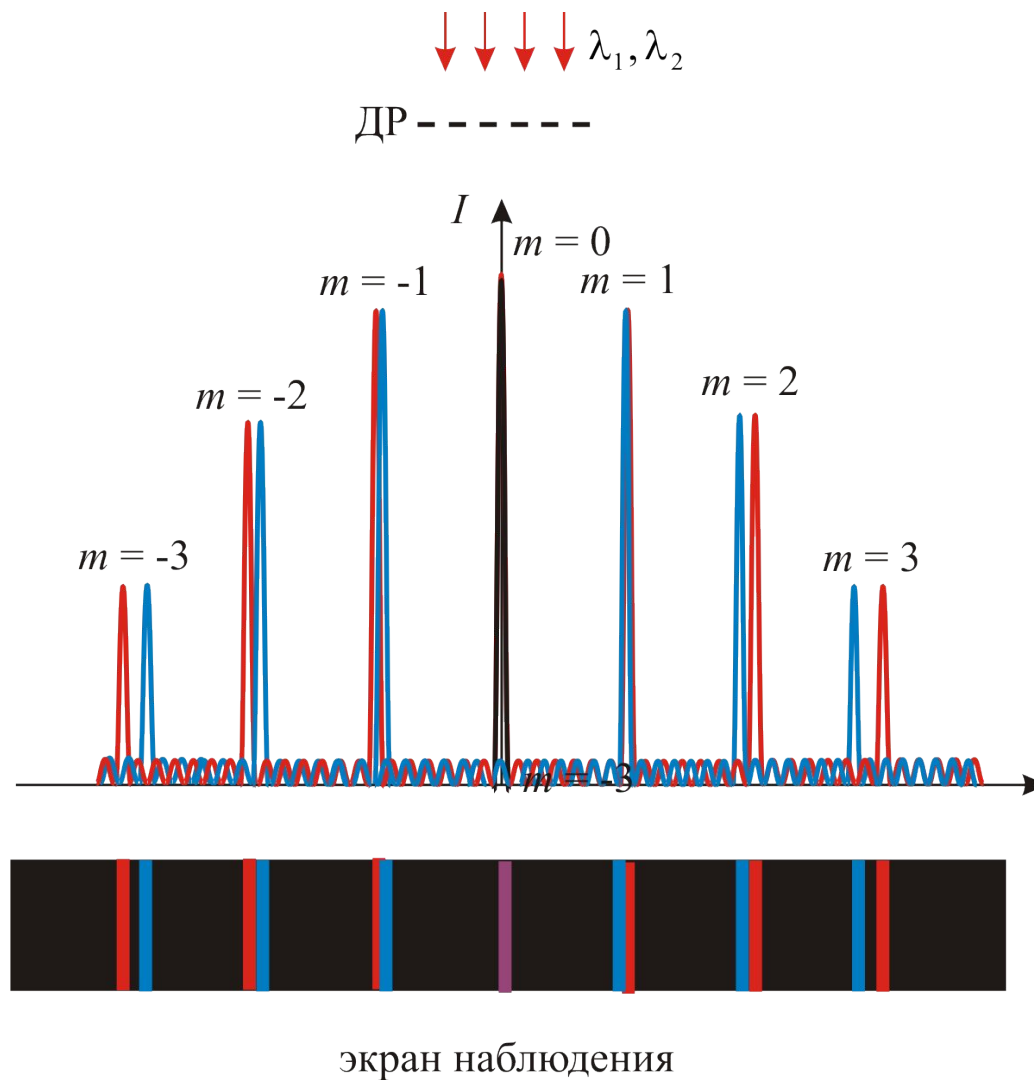


Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- Пусть в свете, падающем на ДР, присутствует излучение с двумя длинами волн λ_1 и λ_2 , причем, пусть $\lambda_2 > \lambda_1$. Дифракционная картина будет выглядеть, как показано на рисунке.
- Поскольку углы θ , определяющие направления от ДР на главные максимумы одного и того же порядка m излучения с разными длинами волн λ_1 и λ_2 , различны, то и положения указанных максимумов на экране наблюдения не совпадают. Все имеющиеся максимумы, кроме центрального, раздваиваются.

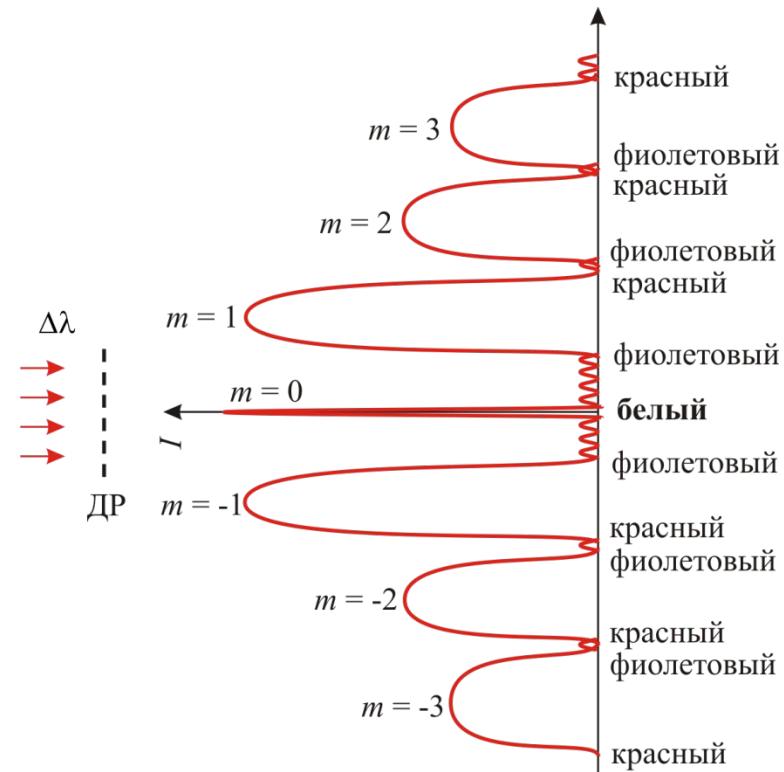


Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

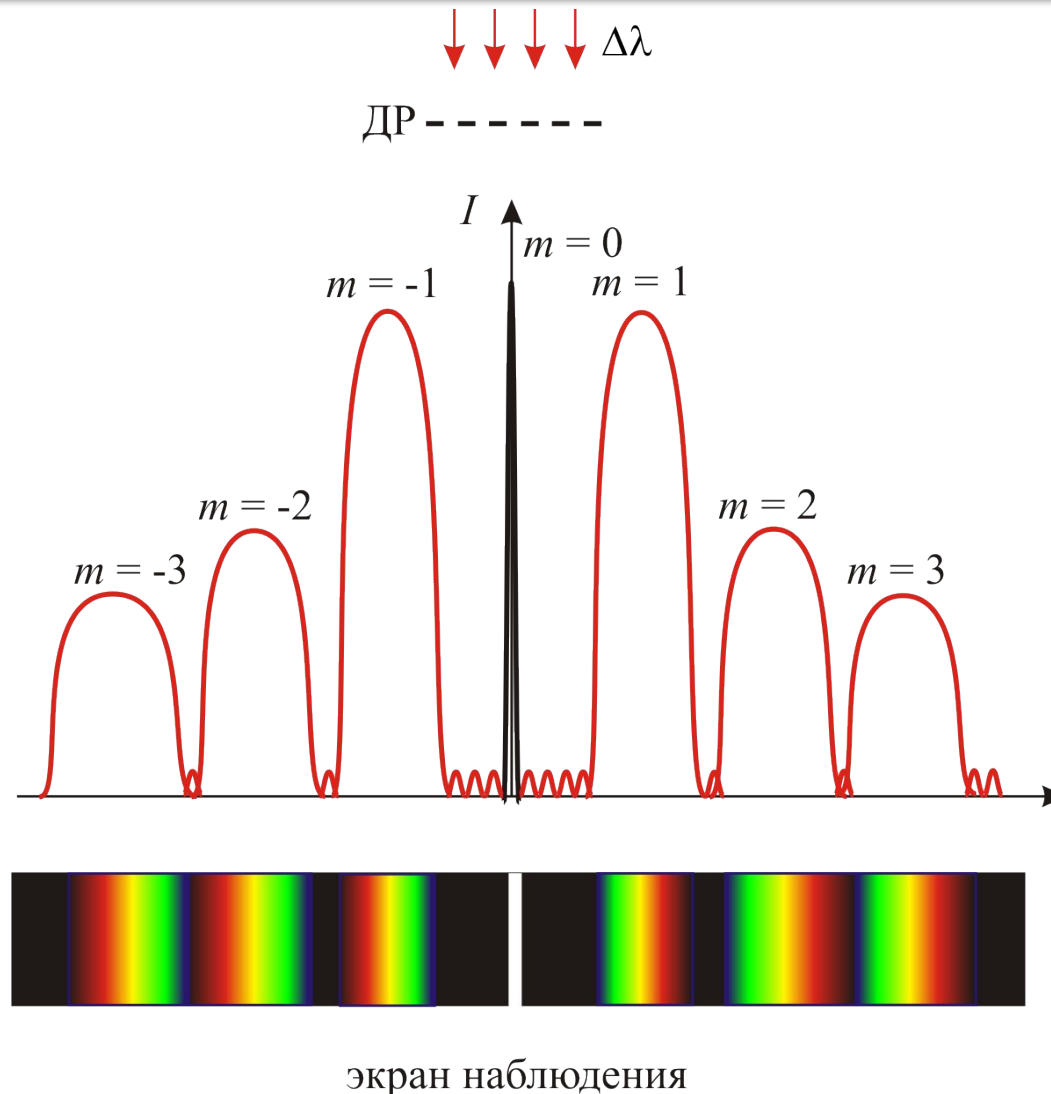


Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- Если пропускать через ДР белый свет, то каждый максимум m -го порядка в дифракционной картине будет представлять собой совокупность смещенных один относительно другого вдоль экрана наблюдения дифракционных максимумов этого же порядка, каждый из которых соответствует определенной длине волны излучения.
- Совокупность всех максимумов m -го порядка, соответствующих разным длинам волн, образует окрашенную в разные цвета – от фиолетового до красного – полосу, причем ее фиолетовый край располагается ближе к центру дифракционной картины, чем красный.



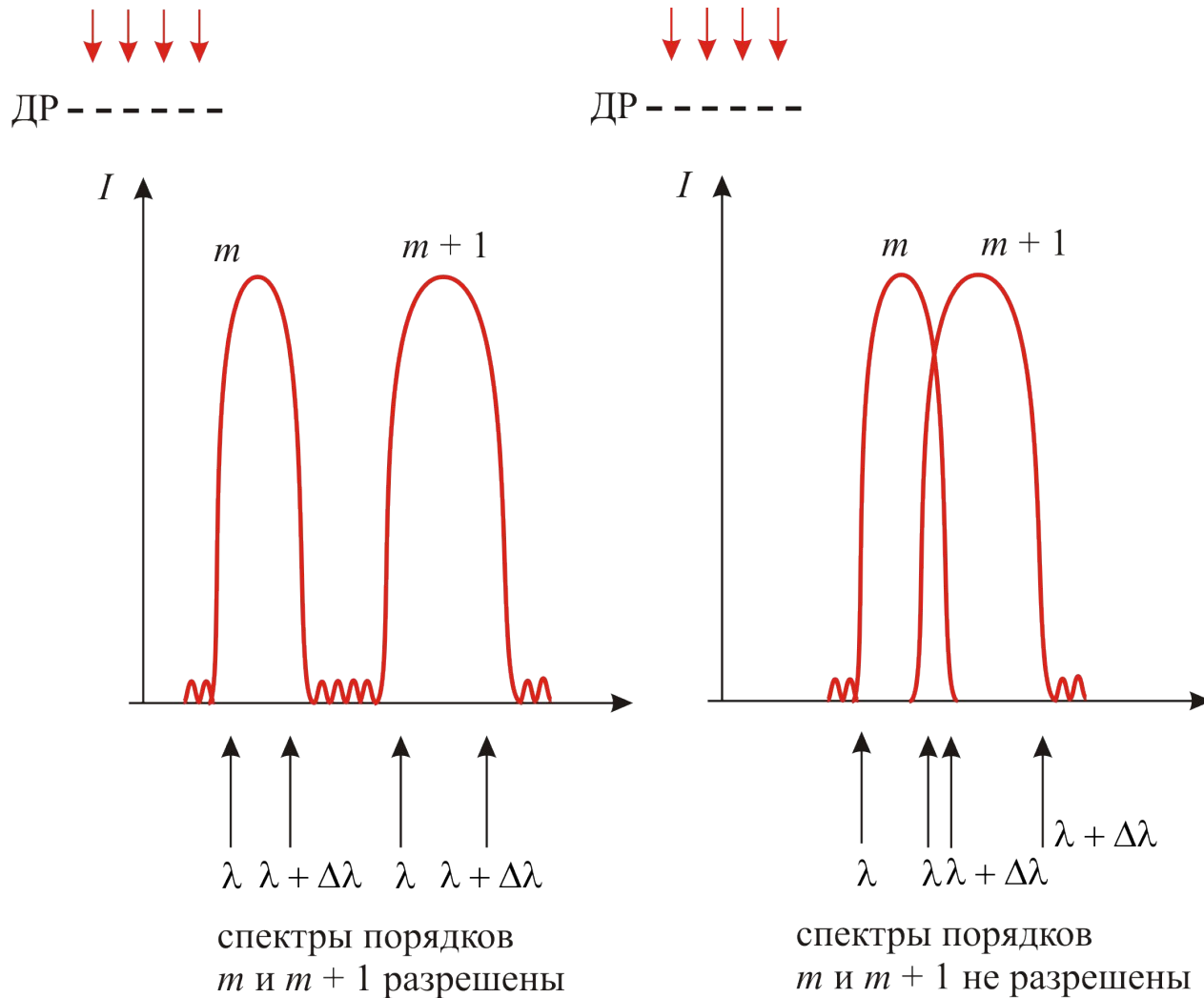
Зависимость положений главных максимумов от длины волны света



Дисперсионная область дифракционной решетки

- Дисперсионной областью $\Delta\lambda$ спектрального прибора называется наибольший интервал длин волн света, который с помощью данного прибора может быть разложен в спектр.
- Ограничение ширины спектрального интервала $\Delta\lambda$ при использовании ДР в качестве спектрального прибора обусловлено следующим обстоятельством. Если интервал $\Delta\lambda$ слишком велик, то в дифракционной картине максимум m -го порядка излучения с наибольшей имеющейся длиной волны перекрывается с максимумом $(m + 1)$ -го порядка с наименьшей длиной волны. В этих условиях наблюдение спектра становится невозможным (говорят, что спектры m -го и $(m + 1)$ -го порядков *не разрешаются*).

Перекрывание спектров соседних порядков



Дисперсионная область дифракционной решетки

- Обозначим: λ и $\lambda + \Delta\lambda$ – соответственно наименьшая и наибольшая длины волн в падающем на ДР свете. Тогда ширина спектрального интервала равна $\Delta\lambda$.
- Запишем условия главных максимумов, определяющие углы $\theta_{\lambda+\Delta\lambda}$ и θ_λ , определяющие направления на максимумы m -го порядка для излучения с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ и $(m + 1)$ -го порядка для излучения с длиной волны λ :

$$d \sin \theta_{\lambda+\Delta\lambda} = m(\lambda + \Delta\lambda);$$

$$d \sin \theta_\lambda = (m + 1)\lambda$$

- Если рассматриваемые максимумы перекрываются, то $\theta_{\lambda+\Delta\lambda} = \theta_\lambda$ и тогда $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$, откуда находим значение $\Delta\lambda$, при котором начинается перекрывание максимумов интенсивности соседних порядков в дифракционной картине: $\Delta\lambda = \lambda/m$

Дисперсионная область дифракционной решетки

- Выражение $\Delta\lambda = \lambda/t$ определяет дисперсионную область дифракционной решетки. Она зависит от порядка t главного максимума, который используется для получения спектра: с ростом t дисперсионная область уменьшается, т.е. перекрывание спектров соседних порядков наступает раньше – при меньшей ширине спектрального интервала $\Delta\lambda$ пропускаемого через ДР света.
- Зная ширину спектрального интервала $\Delta\lambda$ падающего на решетку света, можно оценить порядок главного максимума t , наиболее удобный для наблюдения спектра.

Ограничение порядка спектра дисперсионной областью ДР

- Пусть например, белый свет содержит волны в диапазоне от 400 до 760 нм, т.е. $\Delta\lambda = 360$ нм. Тогда порядок главного максимума, который начинает перекрываться с соседним $(m + 1)$ -м максимумом равен:

$$m \sim \frac{\langle \lambda \rangle}{\Delta\lambda} \approx \frac{600}{360} \sim 2$$

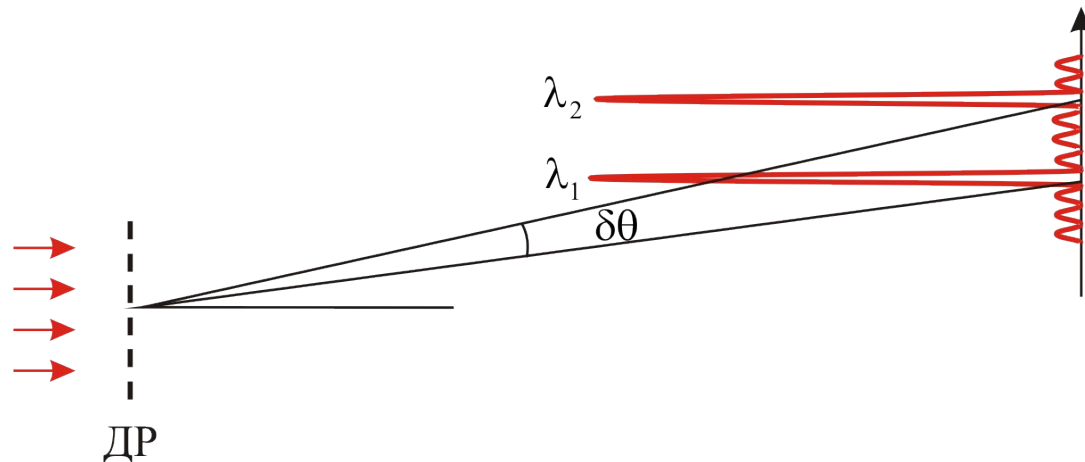
- Следовательно, разложение белого света в спектр с помощью дифракционной решетки возможно лишь в первом или, в крайнем случае, втором порядке главного максимума.

Спектральная линия

- В зависимости от природы источника света **спектр электромагнитного излучения** – набор характеризующих излучение частот или длин волн – может быть непрерывным или дискретным.
- Дискретный спектр, наблюдаемый с помощью дифракционной решетки, представляется в виде системы окрашенных (каждый в определенный цвет) главных максимумов интенсивности в дифракционной картине.
- **Спектральной линией** называется излучение с определенной длиной волны, а также соответствующая этому излучению дифракционный максимум интенсивности света в виде окрашенной в определенный цвет полосы на экране наблюдения.

Спектральная линия

- На рисунке показаны две спектральные линии с длинами волн λ_1 и λ_2 , которые представляют собой главные дифракционные максимумы некоторого порядка m .
- **Угловым расстоянием** между двумя спектральными линиями называется угол $\delta\theta$ между направлениями на главные дифракционные максимумы интенсивности, соответствующие этим спектральным линиям (см. рисунок).



Угловая дисперсия дифракционной решетки

- Обозначим через $d\theta$ угловое расстояние между двумя спектральными линиями с близкими друг другу длинами волн λ_1 и λ_2 , а через $d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ — разность длин волн этих линий.
- **Угловой дисперсией D** называется величина, равна угловому расстоянию между двумя спектральными линиями, длины волн которых отличаются на единицу:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

- Вычислим угловую дисперсию решетки.

Угловая дисперсия дифракционной решетки

- Продифференцируем обе части равенства, определяющего направления на главные максимумы интенсивности света:
 $d \sin \theta = m \lambda$:

$$d \cos \theta d\theta = m d\lambda \Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

- При разложении света в спектр с помощью ДР, как правило, используются максимумы не слишком высокого порядка, что соответствует малым углам θ . Тогда $\cos \theta \approx 1$, так что угловая дисперсия решетки приблизительно равна:

$$D \approx \frac{m}{d}$$

Разрешающая способность спектрального прибора

- Разрешающей силой (способностью) спектрального прибора, в частности, дифракционной решетки, называется величина

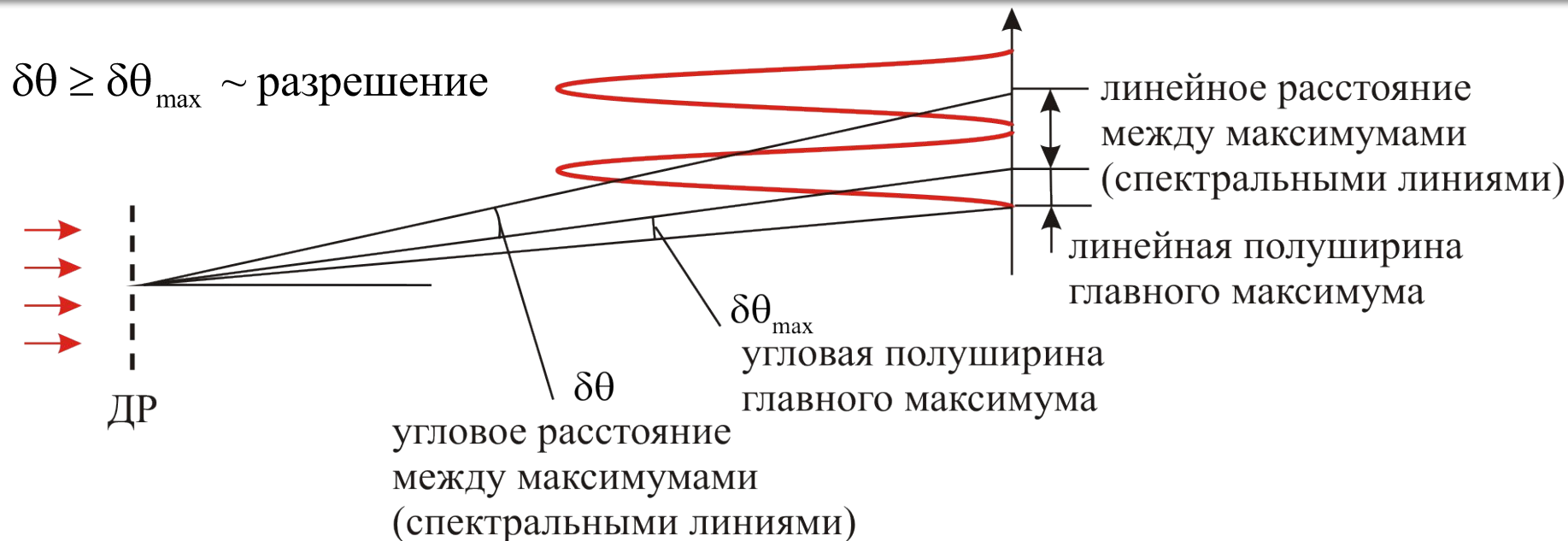
$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$$

Здесь $\delta\lambda_{\min}$ – наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно (т.е. разрешаются); λ – длина волны одной из линий или средняя из них.

Критерий Рэля

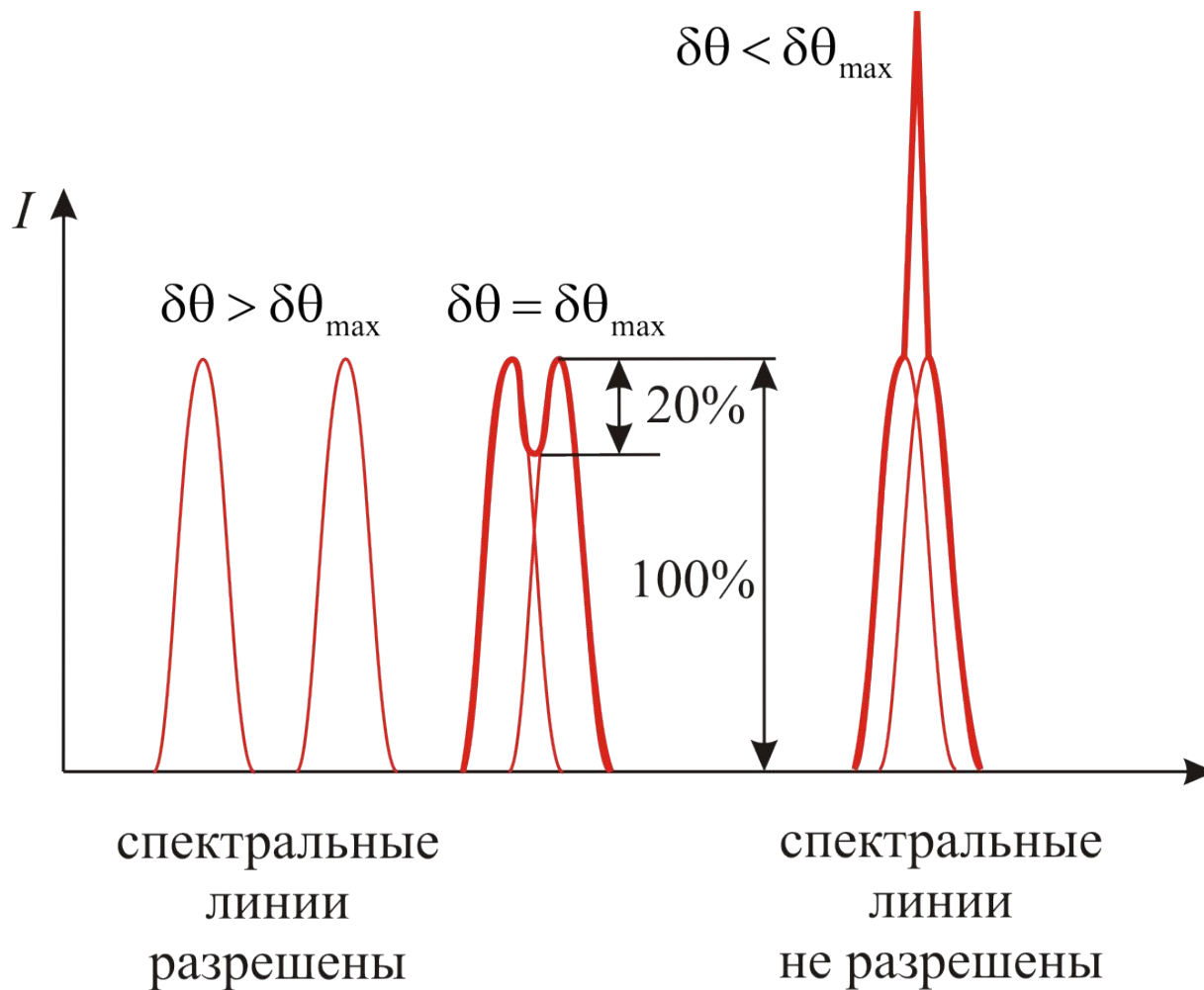
- **Критерий разрешения Рэля.** *Две спектральные линии воспринимаются отдельно (разрешаются), если расстояние между соответствующими этим линиям максимумами интенсивности света в дифракционной картине равно полуширине каждого максимума.*
- **Развернутая формулировка критерия спектрального разрешения Рэля:** *две спектральные линии с близкими длинами волн λ_1 и λ_2 считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны.*

Критерий Рэля



- На рисунке (см. следующий слайд) показана зависимость интенсивности света от угла θ , определяющего направление наблюдения, или от линейной координаты точки наблюдения на экране.

Критерий Рэлея



Средний рисунок иллюстрирует критерий Рэлея: если $\delta\theta = \delta\theta_{\max}$, то между двумя максимумами интенсивности имеется минимум, относительная глубина которого приблизительно составляет 20%.

Разрешающая способность дифракционной решетки

- Вычислим разрешающую силу R дифракционной решетки. Угловое расстояние $\delta\theta$ между двумя спектральными линиями, длины волн которых отличаются на $\delta\lambda$, равно

$$\delta\theta = D\delta\lambda \approx \frac{m}{d}\delta\lambda$$

- С другой стороны, угловая полуширина главного максимума в дифракционной картине:

$$\delta\theta_{\text{гл. max}} = \frac{\lambda}{Nd}$$

- Две линии разрешены, если, согласно критерию Рэлея, $\delta\theta \geq \delta\theta_{\text{max}}$, т.е.

$$\frac{m}{d}\delta\lambda \geq \frac{\lambda}{Nd} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} \leq mN \qquad \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\text{min}}} = R = mN$$