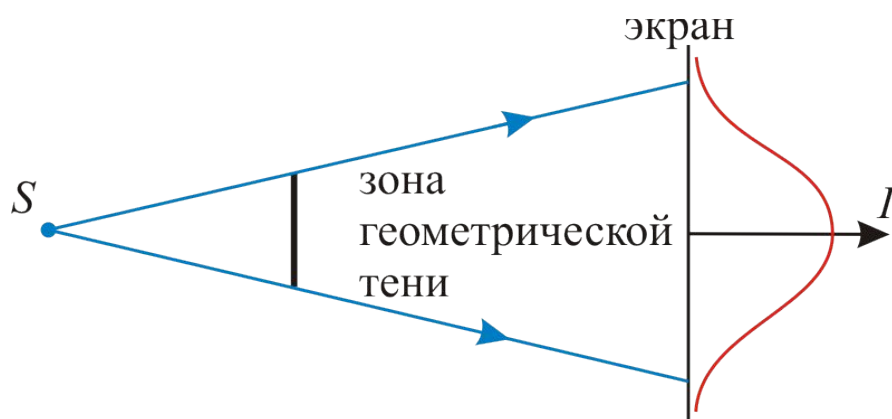


ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

# 6.1 Принцип Гюйгенса – Френеля. Зоны Френеля

# Дифракция

- **Дифракция** – это совокупность явлений, которые сопровождаются распространением света в среде с резкими неоднородностями и не подчиняются законам геометрической оптики.



- Пусть на пути от точечного источника света  $S$  к экрану находится небольшой непрозрачный предмет (например, диск).
- На экране в центре области геометрической тени, вопреки законам геометрической оптики, наблюдается максимум освещенности (светлое пятно).
- Т.о. свет, огибая препятствие, проникает в область геометрической тени.

# Необходимое условие наблюдения дифракции света

- Для наблюдения дифракционных явлений необходимо, чтобы *длина световой волны  $\lambda$  была сравнима по величине с характерным размером  $b$  препятствий (неоднородностей среды).*

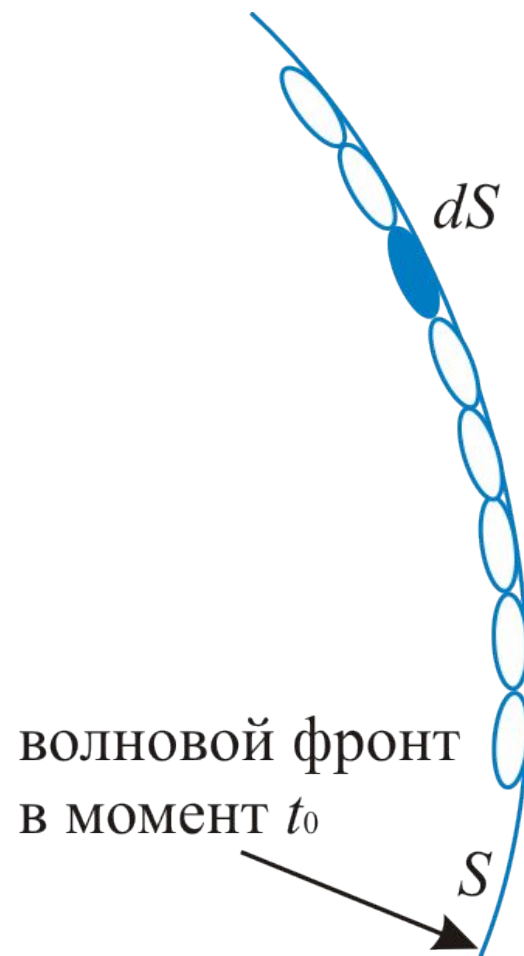
$$b \sim \lambda$$

# Интерференция и дифракция

- *Физическая сущность* явлений интерференции и дифракции одинакова и заключается в пространственном перераспределении интенсивности света в результате наложения когерентных волн.
- При этом *интерференция* возникает при наложении волн от двух или нескольких дискретно расположенных в пространстве точечных источников света.
- *Дифракционные явления* – это результат наложения световых волн от бесконечного множества эффективных точечных источников, распределенных в пространстве непрерывно.

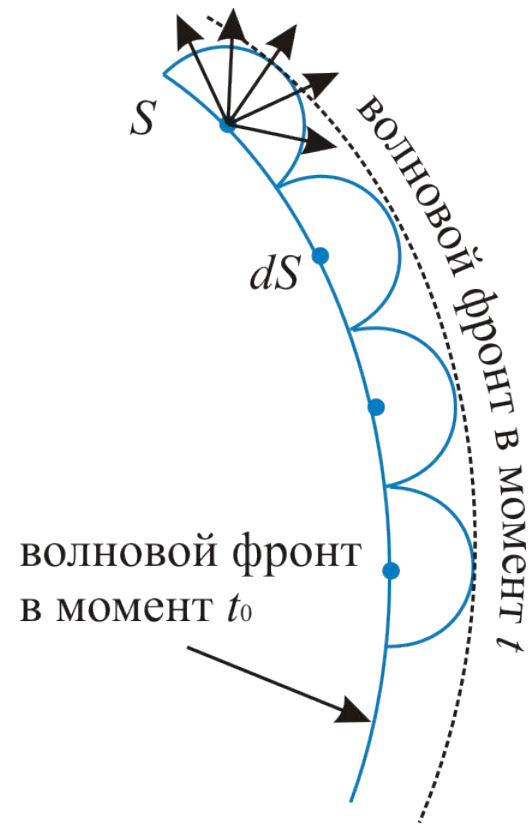
# Принцип Гюйгенса – Френеля

- Рассмотрим одну из волновых поверхностей  $S$  световой волны, которая задает положение в пространстве волнового фронта в некоторый момент времени  $t_0$ .
- Мысленно разделим всю поверхность на элементарные участки и рассмотрим один из них, площадь которого обозначим через  $dS$ .



# Интерференция и дифракция

- **Принцип Гюйгенса – Френеля:** *каждый элементарный участок  $dS$  волновой поверхности распространяющейся в пространстве световой волны можно рассматривать в качестве точечного источника вторичной волны (в однородной и изотропной среде – сферической волны). В любой точке пространства, которую волна достигает позднее, колебание электромагнитного поля представляет собой суперпозицию колебаний, порожденных вторичными волнами всех элементов волновой поверхности  $S$ . В частности, в любой момент времени  $t > t_0$  волновой фронт можно получить, построив огибающую волновых фронтов вторичных волн.*



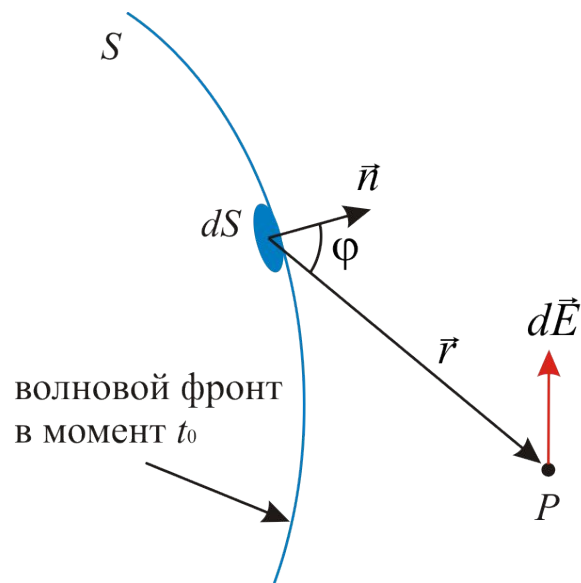
# Принцип Гюйгенса – Френеля

- В соответствии с принципом Гюйгенса – Френеля, каждый участок  $dS$  волновой поверхности излучает вторичную волну, световой вектор  $d\vec{E}$  которой в каждой точке  $P$  пространства, расположенной на расстоянии  $r$  от элемента  $dS$ , может быть представлен в виде:

$$dE = K \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

- Здесь  $(\omega t + \alpha)$  фаза колебания в месте расположения участка  $dS$ ,

$k$  – волновое число, числовой множитель  $A$  зависит от амплитуды световой волны в месте, где расположен элемент  $dS$ .



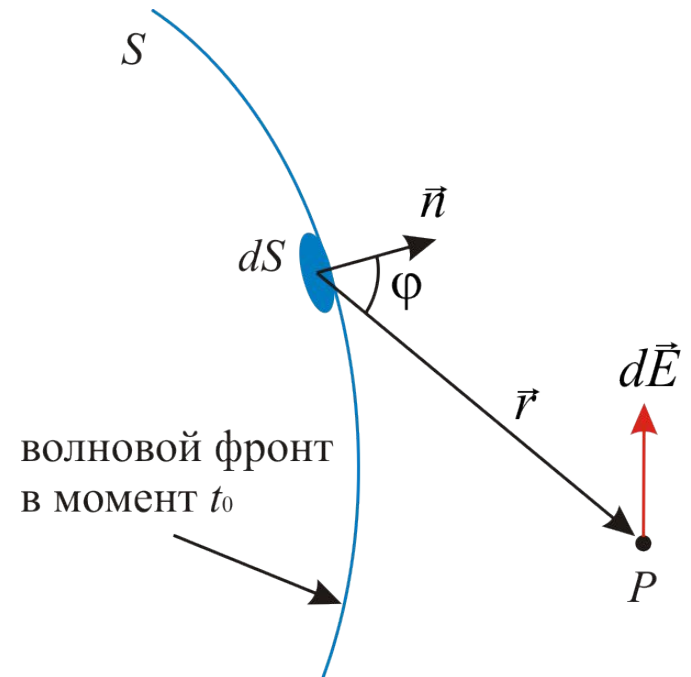
# Принцип Гюйгенса – Френеля

$$dE = K \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

- Коэффициент  $K$  зависит от угла  $\phi$  между нормалью  $\vec{n}$  к  $dS$  и направлением от  $dS$  в точку  $P$ : значению  $\phi = 0$  соответствует  $K = 1$ , значению  $\phi = \pi/2$  – значение  $K = 0$ .

- Световой вектор результирующего колебания в точке  $P$ :

$$E = \int_S K \frac{AdS}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

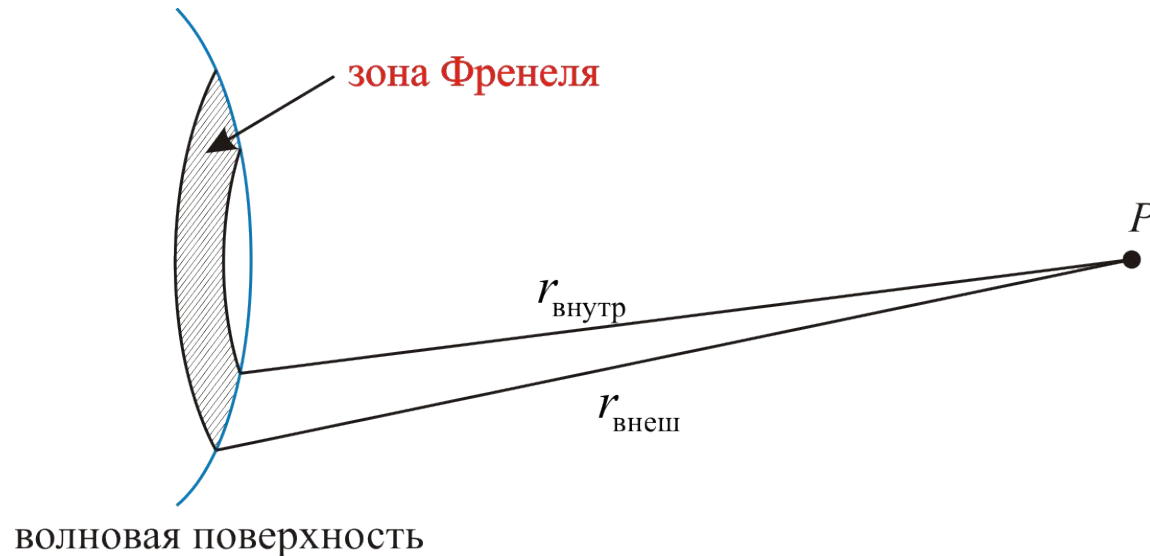


Этот интеграл называется **интегралом Френеля**



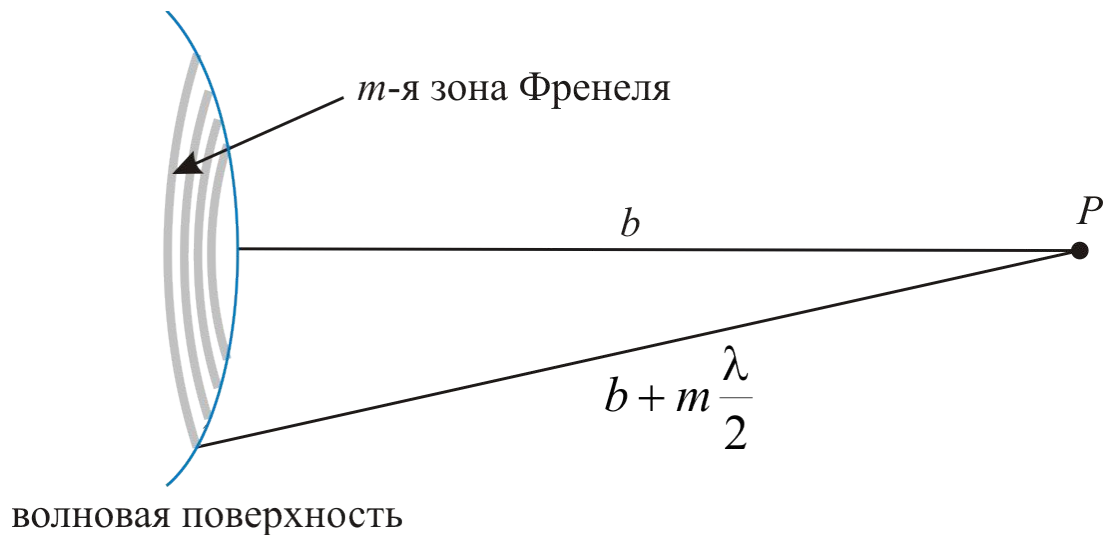
# Зоны Френеля

- Пусть  $S$  – некоторая волновая поверхность сферической или плоской световой волны,  $P$  – точка наблюдения. Обозначим:  $\lambda$  – длина световой волны.
- **Зоной Френеля** называется участок волновой поверхности, разность расстояний от краев которого до точки наблюдения равна половине длины волны:  $r_{\text{внеш}} - r_{\text{внутр}} = \lambda/2$ .



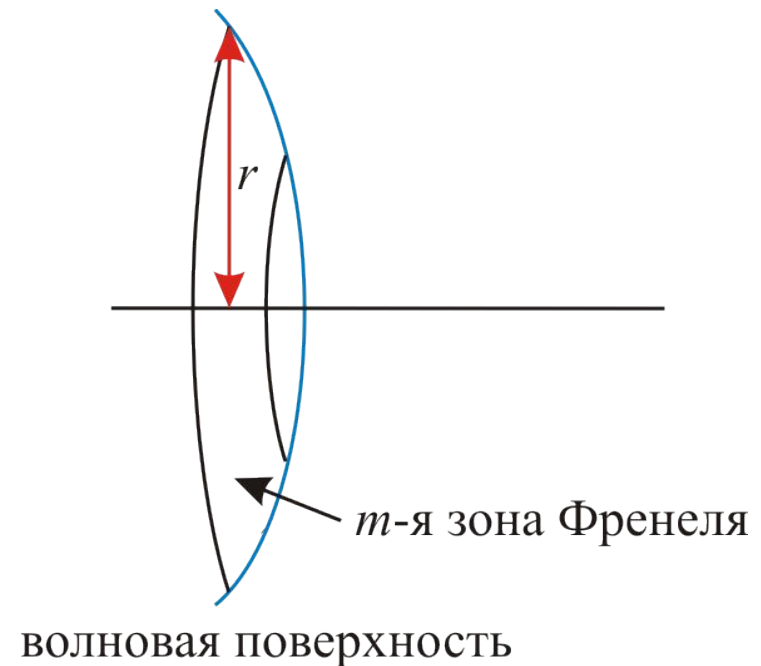
# Зоны Френеля

- Зоны сферической и плоской волновых поверхностей имеют формулы колец.
- Параметр  $b$ , указанный на рисунке, – это кратчайшее расстояние от волновой поверхности  $S$  до точки наблюдения  $P$ .
- Как следует из определения зоны Френеля, их форма и размеры определяются взаимным расположением волновой поверхности и точки наблюдения.



# Радиус зоны Френеля

- Зоны Френеля нумеруются в порядке возрастания радиуса соответствующего кольца.
- Радиусом зоны Френеля называется расстояние от прямой, перпендикулярной к волновой поверхности и проходящей через точку наблюдения  $P$ , до внешнего края зоны, т.е. это внешний радиус кольца на волновой поверхности.



Вычислим радиус  $m$ -й зоны Френеля на плоской волновой поверхности.

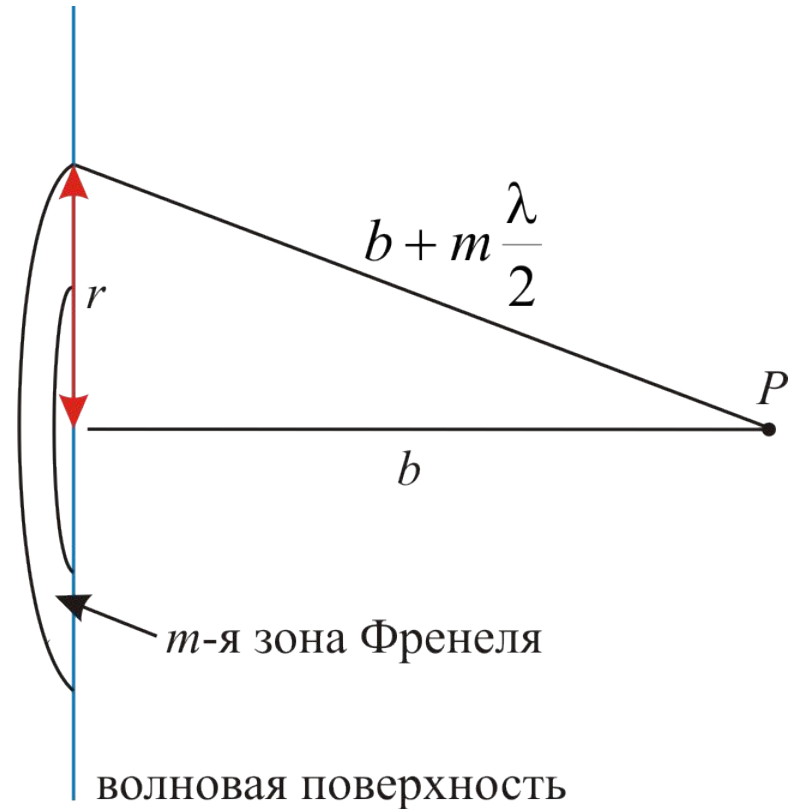
# Радиус зоны Френеля

- В соответствии с определением, расстояние  $r_{\text{внеш}}$  от внешнего края  $m$ -й зоны до точки наблюдения  $P$  равно:

$$r_{\text{внеш}} = b + m \frac{\lambda}{2}$$

- Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} r_m &= \sqrt{r_{\text{внеш}}^2 - b^2} = \sqrt{\left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} = \\ &= \sqrt{mb\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{mb\lambda} \end{aligned}$$



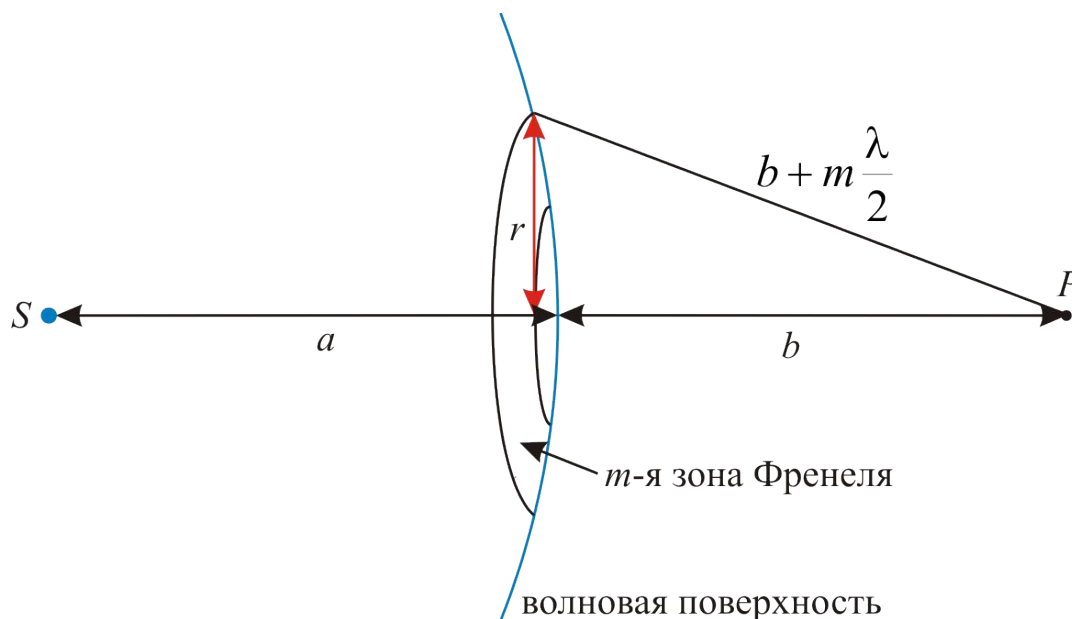
Здесь мы учли, что расстояние  $b$  намного больше длины световой волны  $\lambda$

# Радиус зоны Френеля

- Можно показать, что для сферической световой волны радиус  $r_m$   $m$ -й зоны Френеля:

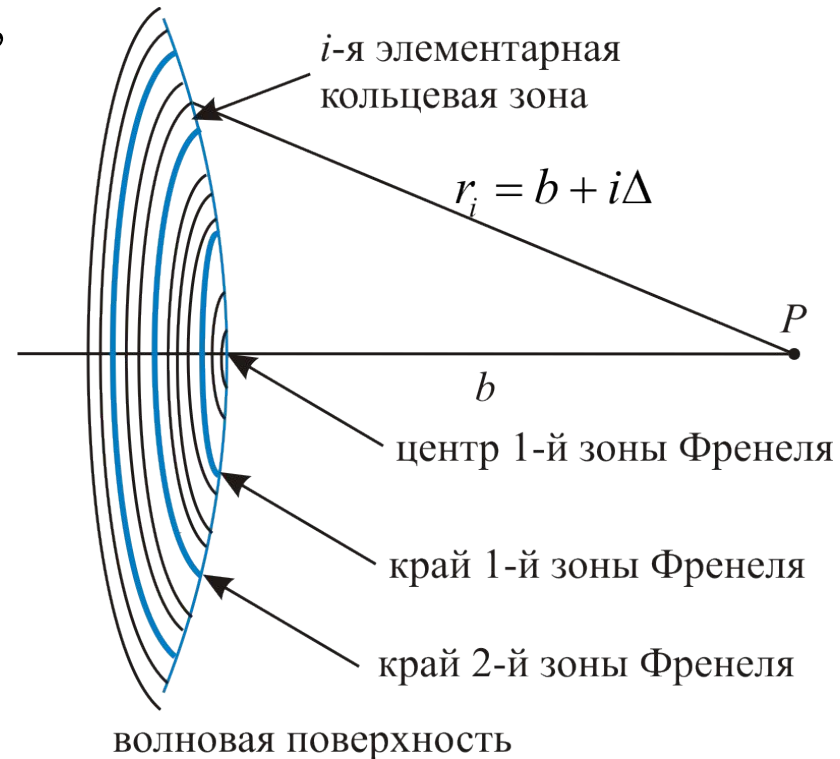
$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}$$

- Здесь  $a$  – расстояние от источника сферической волны до волновой поверхности  $S$ ,  $b$  – расстояние от волновой поверхности  $S$  до точки наблюдения  $P$



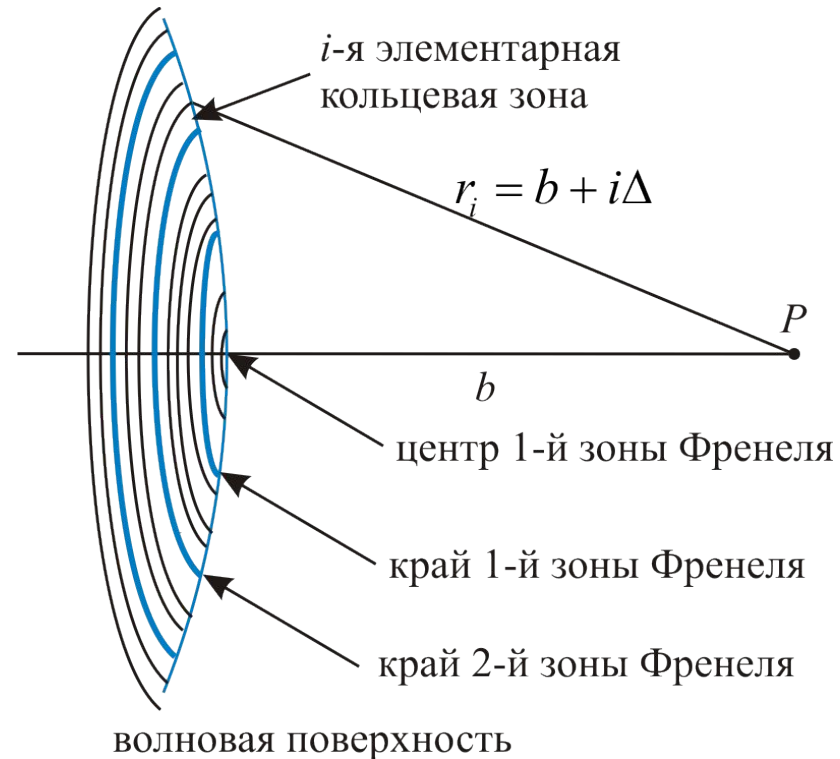
# Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Пусть сферическая световая волна, распространяясь в пространстве, достигает точки наблюдения  $P$ . Рассмотрим одну из волновых поверхностей  $S$  и рассчитаем амплитуду  $E$  светового вектора в точке  $P$  как векторную сумму амплитуд вторичных волн  $\Delta E_i$ , испускаемых поверхностью  $S$ .
- Для этого разобьем поверхность  $S$  на очень узкие кольцевые зоны, подобные зонам Френеля, но гораздо уже их.



# Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Пронумеруем элементарные зоны в порядке возрастания их радиуса. Поскольку зоны узкие, то расстояния от любых точек одной зоны до точки  $P$  одинаковы.
- Обозначим  $r_i$  – расстояние от внешнего края  $i$ -й зоны до точки  $P$ .
- Выберем ширину каждой элементарной зоны так, чтобы разность расстояний  $\Delta = r_{i+1} - r_i$  от двух соседних элементарных зон до точки  $P$  было одинаковым и намного меньшим длины волны  $\lambda$ .

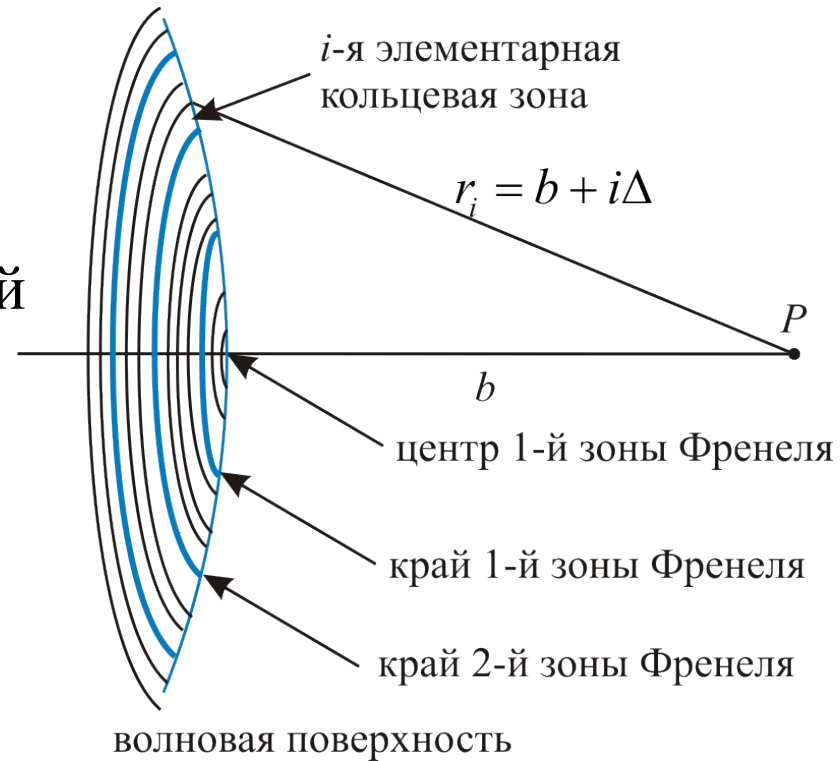


# Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Если кратчайшее расстояние от волновой поверхности до точки  $P$  равно  $b$ , то  $r_i = b + i\Delta$ .
- Тогда световой вектор волны, пришедшей в точку  $P$  от участка  $i$ -й элементарной зоны:

$$\begin{aligned}\Delta E_i &= \Delta E_{mi} \cos[\omega t - k(b + i\Delta)] = \\ &= \Delta E_{mi} \cos[\omega t - kb - ik\Delta] = \\ &= \Delta E_{mi} \cos(\omega t - kb - i\delta)\end{aligned}$$

- Здесь  $\delta$  - разность фаз двух вторичных волн, пришедших в точку  $P$  от двух соседних зон.



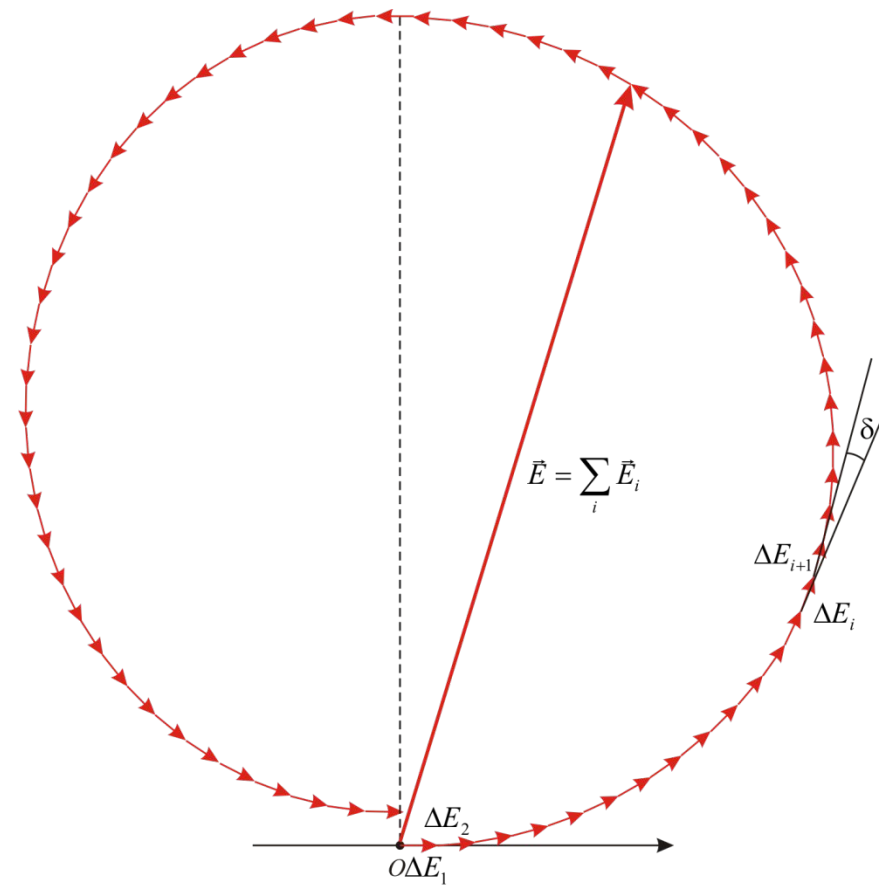


# Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Тогда результирующий световой вектор  $E$  в точке  $P$ :

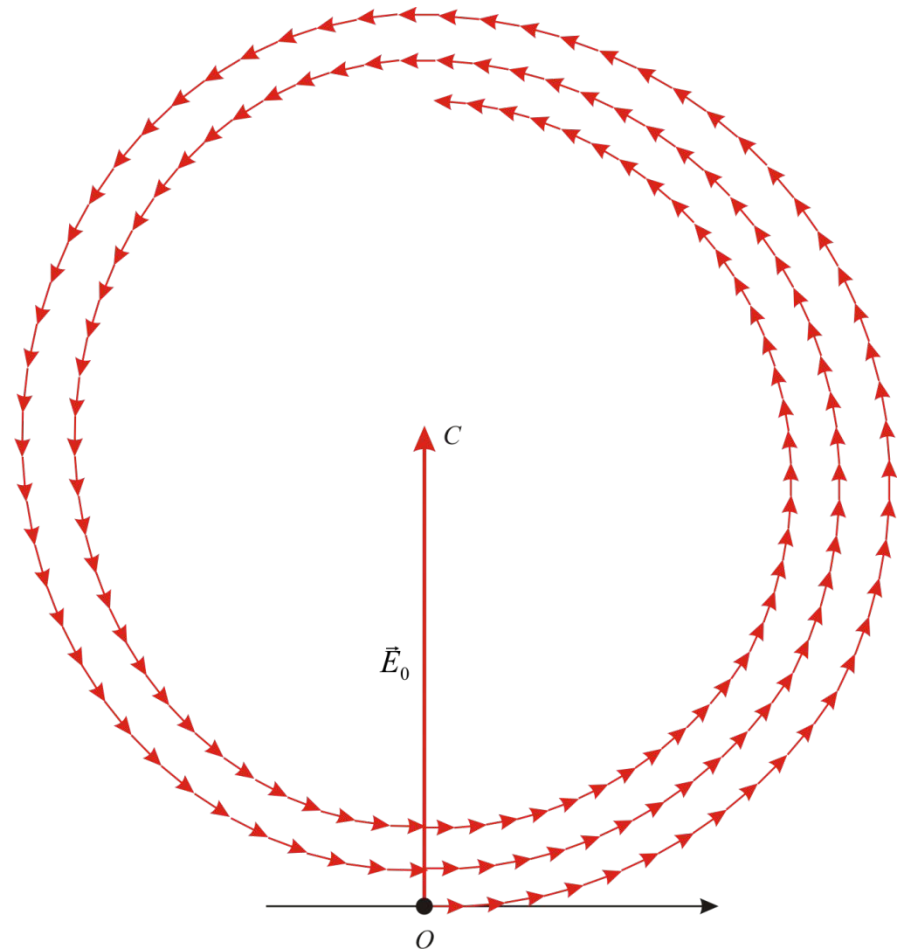
$$E = \sum \Delta E_i$$

- Сложим световые векторы методом векторной диаграммы с учетом того, что амплитуда каждого светового вектора  $\Delta E_{im}$  с увеличением  $i$  уменьшается. В результате, при устремлении ширины каждой элементарной зоны к нулю, получаем **спираль Френеля**



# Метод графического сложения амплитуд светового вектора

- Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, результирующий световой вектор  $\mathbf{E}$  в точке  $P$  – это сумма световых векторов  $\Delta\mathbf{E}_i$  всех вторичных волн, пришедших в точку  $P$  от каждой из элементарных зон. Поэтому амплитуда  $\mathbf{E}_m$  результирующего светового вектора представляет собой вектор с началом в точке  $O$  и концом, расположенным в центре спирали.



# Метод графического сложения амплитуд светового вектора

■ Построим на векторной диаграмме световые векторы, соответствующие колебаниям от:

- центра 1-й зоны Френеля;
- края 1-й зоны Френеля
- края 2-й зоны Френеля

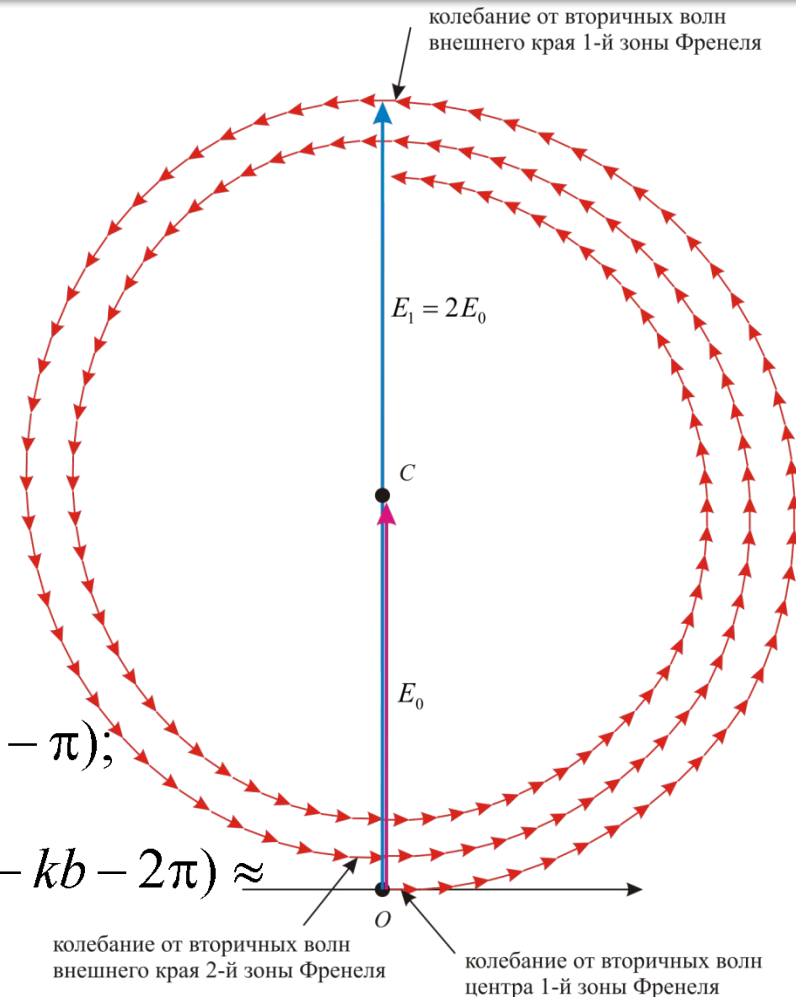
$$\Delta E_1 = \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb + \delta) \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb)$$

$$\Delta E_{13\Phi} \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - k\Delta) \approx$$

$$\approx \Delta E_{1m} \cos\left(\omega t - kb - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}\right) \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - \pi);$$

$$\Delta E_{23\Phi} \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - 2k\Delta) \approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb - 2\pi) \approx$$

$$\approx \Delta E_{1m} \cos(\omega t - kb)$$

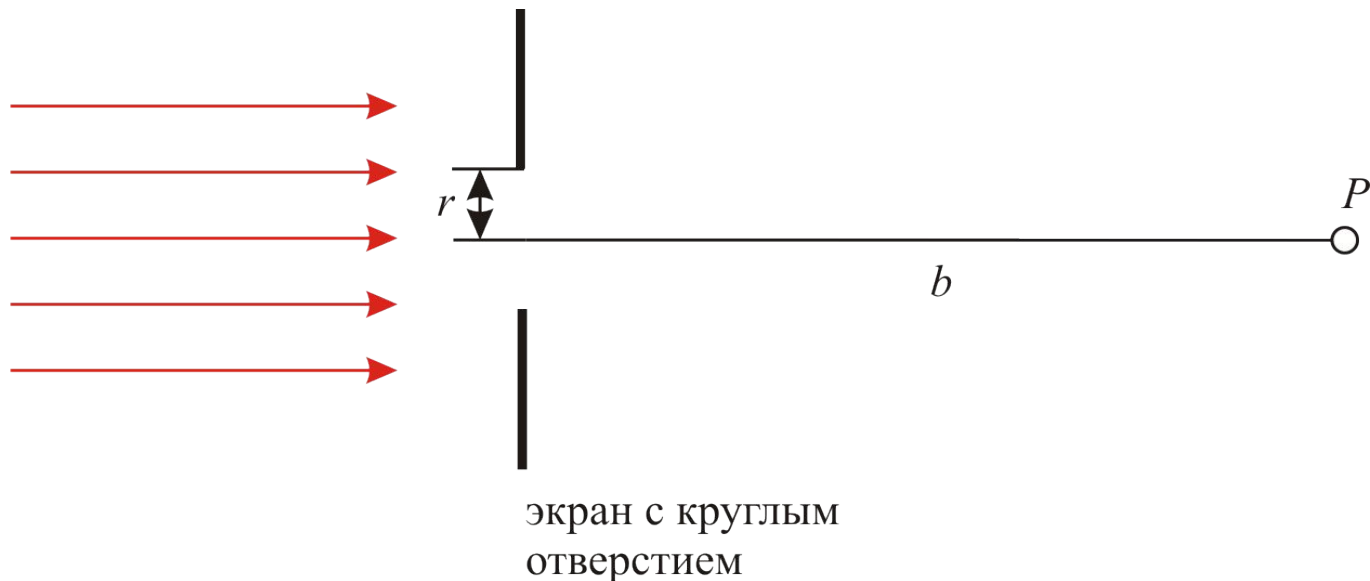


ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

## 6.2 Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

# Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Пусть плоская световая волна падает на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса  $r_0$ . Обозначим:  $b$  – расстояние от центра отверстия до точки наблюдения  $P$ , расположенной на прямой, перпендикулярной плоскости экрана и проходящей через центр отверстия;  $\lambda$  – длина световой волны

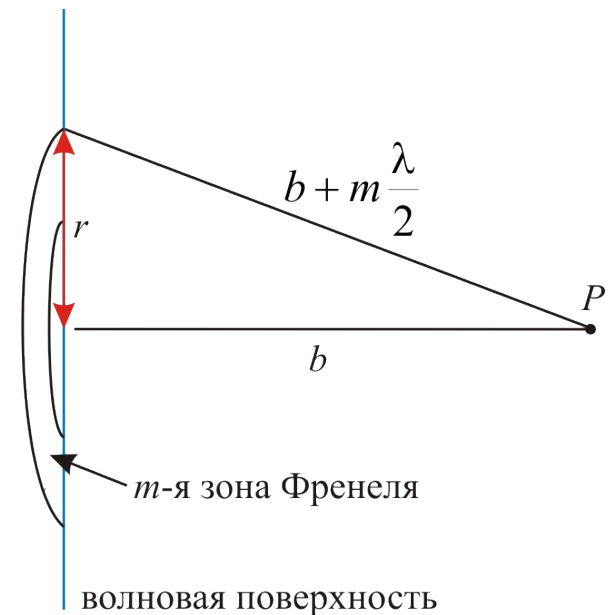


# Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Определим интенсивность света в точке наблюдения  $P$ . С этой целью найдем число зон Френеля, которые благодаря отверстию остаются открытыми на волновой поверхности падающей волны, если наблюдать за ней из точки  $P$ . Приравняем радиус отверстия  $r_0$  к радиусу  $r_m$   $m$ -й зоны Френеля:

$$r_0 = r_m = \sqrt{b m \lambda} \Rightarrow m = \frac{r_0^2}{b \lambda}$$

Здесь  $m$  – число открытых отверстием зон Френеля, (может быть целым или нецелым числом)

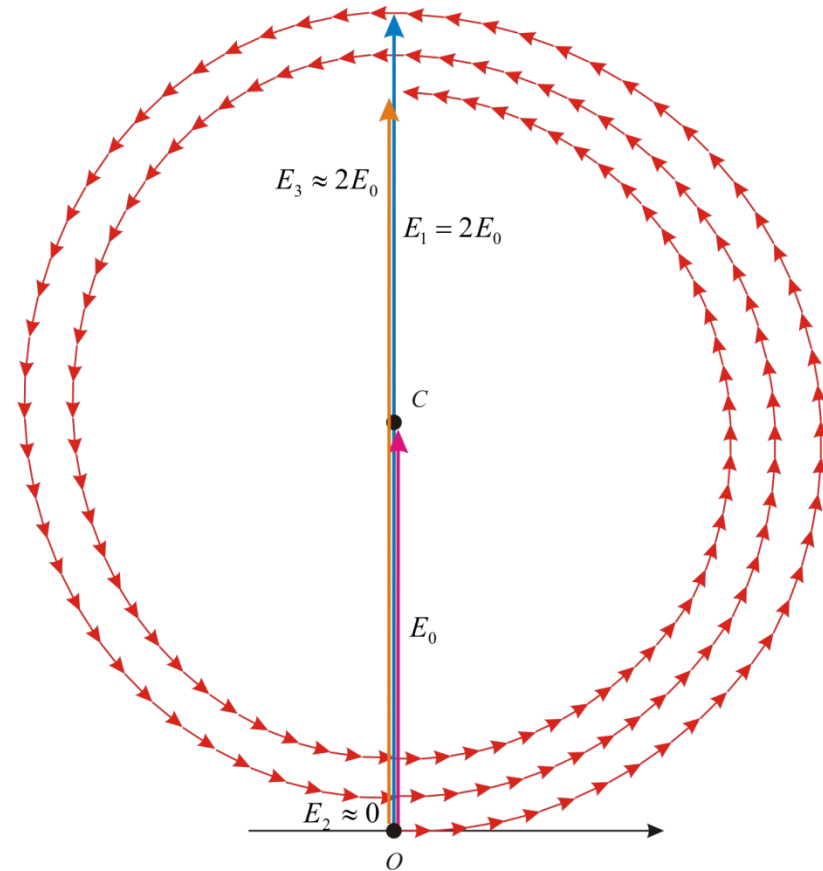


# Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Значение  $m$  (число открытых отверстием зон Френеля) зависит от параметра  $b$ , т.е. от места расположения точки наблюдения относительно экрана с отверстием. Если радиус отверстия  $r_0$  остается неизменным, то при изменении положения точки наблюдения  $P$  число открытых зон меняется.

# Дифракция Френеля на круглом отверстии

- Интенсивность света в точке  $P$  приближенно можно определить с помощью *метода векторной диаграммы колебаний светового вектора*.
- Пусть  $m = 1$  (отверстие открывает только первую зону Френеля). Тогда (см. рисунок) амплитуда светового вектора  $E = 2E_0$ . Таким образом,  $I \sim E_0^2 = 4I_0$ .
- Если  $m = 2$  (отверстие открывает первую и вторую зоны Френеля), то, как видно из рисунка,  $E \approx 0$  и  $I \approx 0$ .





# Амплитудная зонная пластинка

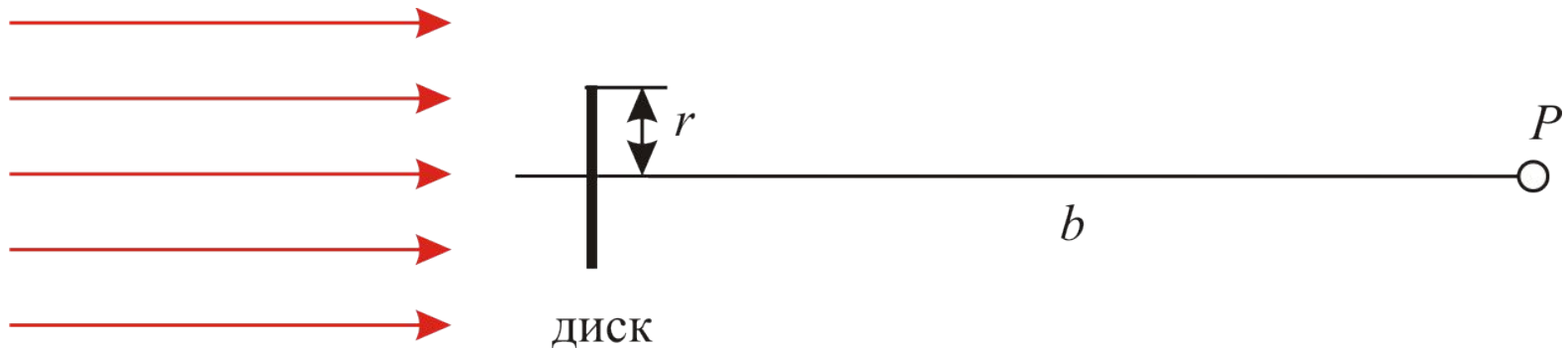
- Таким образом, для небольших значений  $m$  справедливо следующее утверждение: *интенсивность в точке наблюдения зависит от того, четное или нечетное число зон Френеля открыто отверстием: если число нечетное, то в точке наблюдения образуется светлое пятно, если четное – темное.*
- Значительно большее усиление света в точке  $P$  можно осуществить, если изготовить стеклянную пластинку, на поверхность которой нанесено непрозрачное покрытие в виде колец, закрывающих только четные (или только нечетные) зоны Френеля. Такая пластинка называется **амплитудной зонной пластинкой**.

# Фазовая зонная пластинка

- Еще большего эффекта усиления света можно достичь, не перекрывая четные/нечетные зоны Френеля, а изменяя фазу колебаний на  $\pi$ .
- Это можно осуществить с помощью прозрачной пластинки, толщина которой в местах, соответствующих четным и нечетным зонам, отличается ровно на такую величину, что соответствующая этой величине длина пути составляет  $\lambda/2$ .
- Таким образом, если абсолютный показатель преломления стекла равен  $n$ , то толщина стекла в области четных и нечетных зон Френеля должна отличаться на величину  $h$ , удовлетворяющую условию  $nh = \lambda/2$ . Тогда вторичные волны будут приходить в точку  $P$  не в противофазе, а в фазе.
- Такая пластинка называется **фазовой зонной пластинкой**.

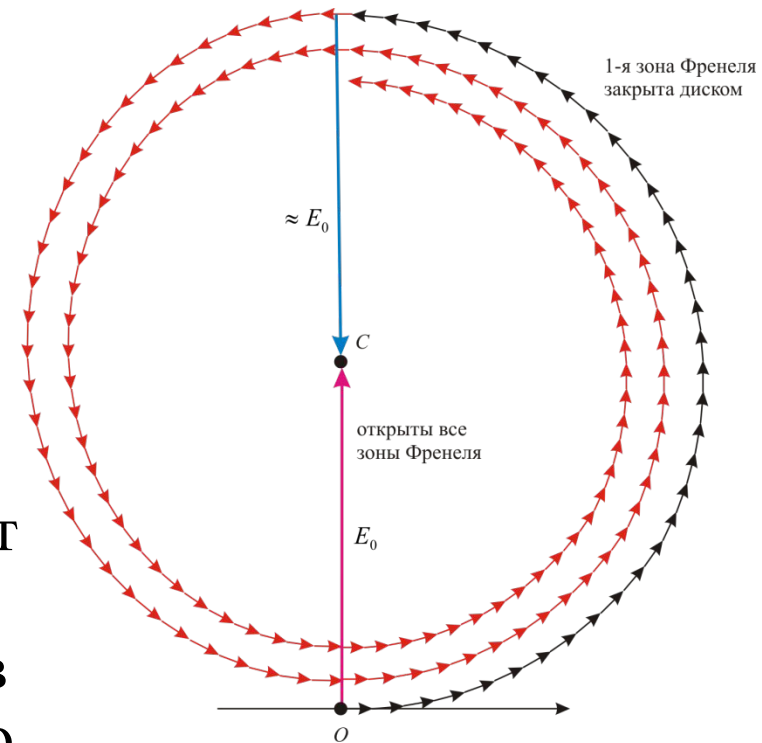
# Дифракция Френеля на круглом диске

- Если на пути световой волны поместить непрозрачный диск, то в любой точке наблюдения  $P$  на прямой, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, т.е. в области геометрической тени, интенсивность света будет отлична от нуля.



# Дифракция Френеля на круглом диске

- Пусть, например, радиус диска равен радиусу первой зоны Френеля. Тогда на векторной диаграмме колебаний вектора  $\mathbf{E}$  в точке  $P$  отсутствует участок, соответствующий первой зоне Френеля. Тогда, как видно из рисунка,  $E = E_0$  и  $I = I_0$ .
- Во всех случаях, когда диск закрывает  $m$  зон Френеля, на векторной диаграмме отсутствуют  $m$  полувитков спирали. И если  $m$  не слишком велико, то  $E = E_0$  и  $I = I_0$ . Т.е. интенсивность света в точке  $P$  почти не отличается от интенсивности падающей волны.

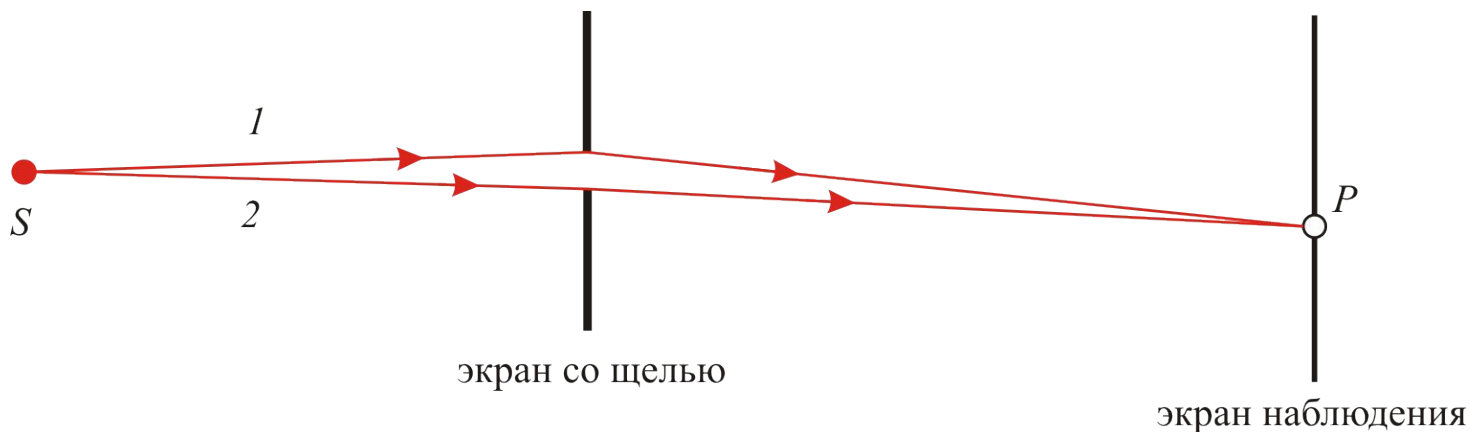


ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

# 6.3 Дифракция Фраунгофера на прямоугольной щели

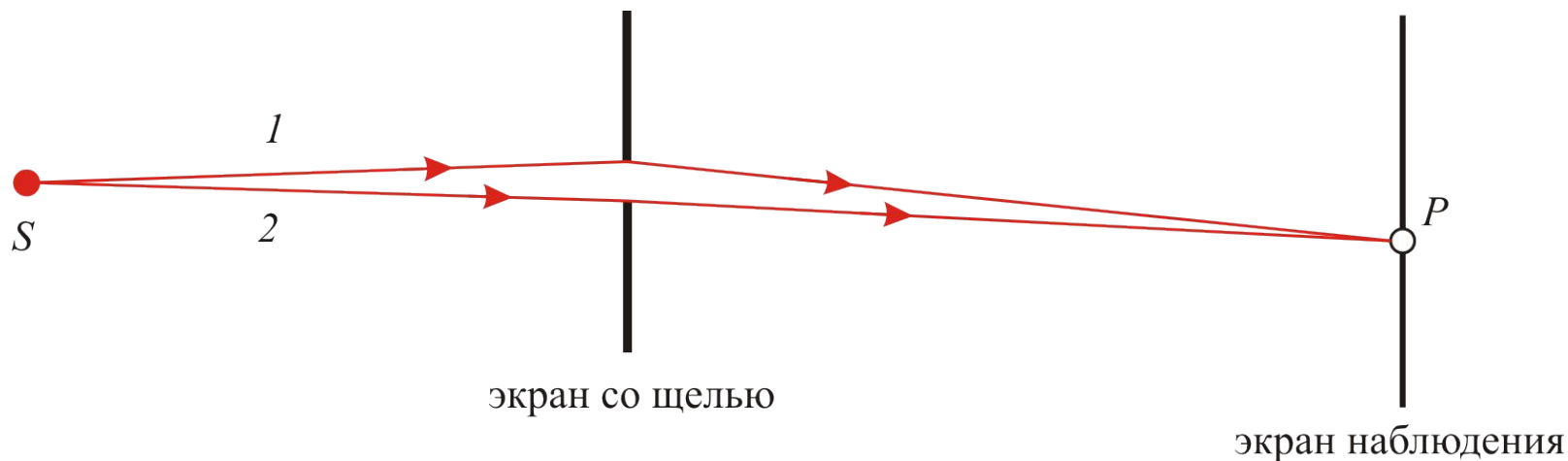
# Дифракция Фраунгофера

- Пусть на большом удалении друг от друга располагаются источник монохроматического света, непрозрачный экран с длинной узкой щелью, и экран наблюдения.
- Если лучи, идущие от источника к препятствию (краям щели) и от препятствия к произвольной точке на экране наблюдения, образуют пучки почти параллельных лучей, то возникающая на экране дифракционная картина называется **дифракцией Фраунгофера** (или **дифракция в параллельных лучах**).



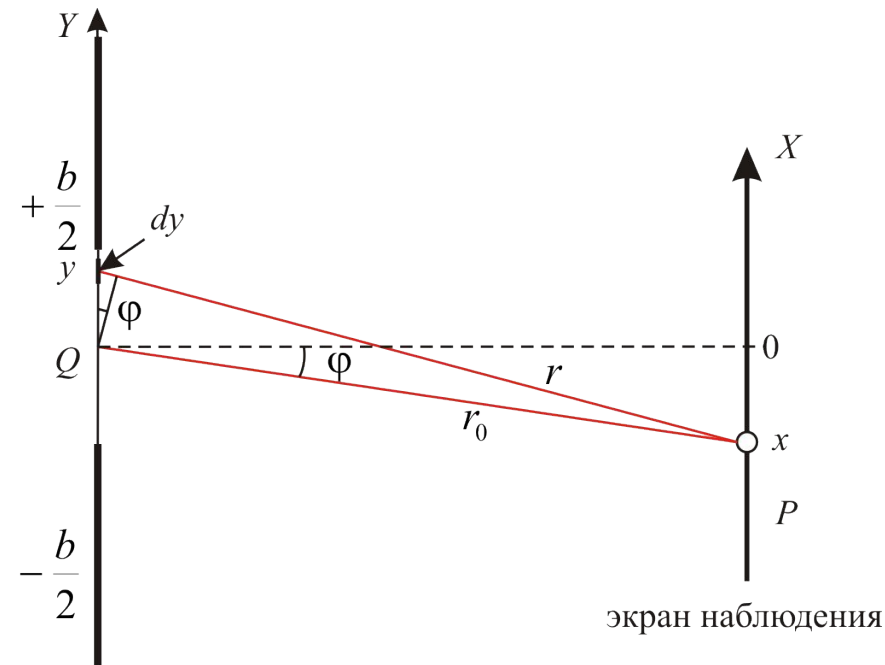
# Дифракция Фраунгофера

- Будем полагать, что вследствие удаленности точечного источника лучи  $1$  и  $2$ , идущие к щели, можно считать параллельными, а падающую на препятствие световую волну – плоской. Волновая поверхность падающей волны параллельна плоскости щели и экрану наблюдения.
- Обозначим:  $b$  – ширина щели. Определим распределение интенсивности света вдоль экрана наблюдения – дифракцию от щели.



# Дифракция Фраунгофера от щели

- Положение точки наблюдения  $P$  на экране задается углом  $\phi$  между нормалью к плоскости щели и направлением  $QP$  от середины щели к точке  $P$ ; за положительное направление отсчета угла  $\phi$  примем поворот отрезка  $QP$  по часовой стрелке.
- Направим ось  $Y$  перпендикулярно щели, начало оси совместим с серединой щели – точкой  $Q$ . Координаты краев щели:  $-b/2$  и  $+b/2$ .



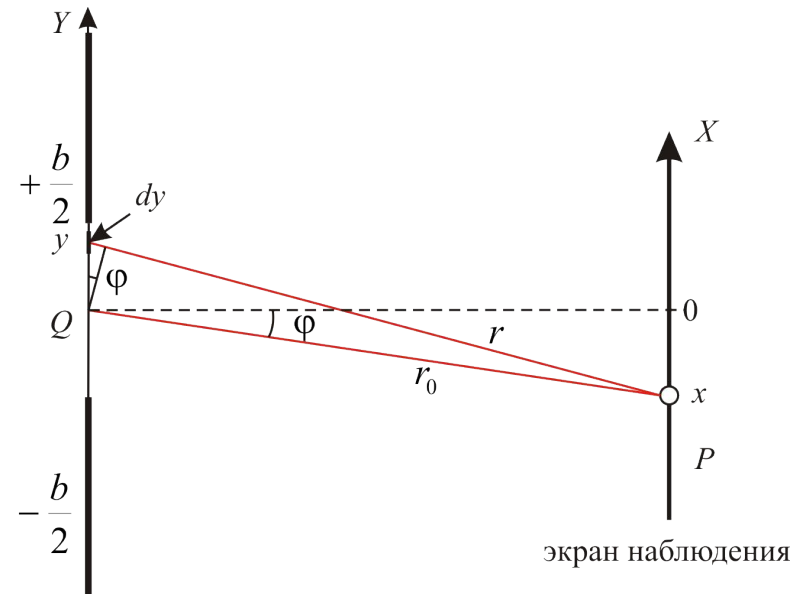
экран со щелью



# Дифракция Фраунгофера от щели

- Мысленно разделим поверхность щели на элементарные полосы толщиной  $dy$ , края которых параллельны краям щели.
- Обозначим:  $r_0$  – длина отрезка  $QP$ , тогда в силу параллельности всех лучей,  
 $r \approx r_0 + y \sin \varphi$
- Все вторичные волны от одной элементарной полосы приходят в точку  $P$  в одинаковой фазе, т.е.:

$$\begin{aligned} dE &= A dy \cos(\omega t - kr) = \\ &= A dy \cos(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) \end{aligned}$$



экран со щелью

Здесь  $A dy$  – амплитуда колебания, пропорциональная площади участка излучения (ширине  $dy$  элементарной полосы).

# Дифракция Фраунгофера от щели

- Результирующее колебание светового вектора  $E$  в точке наблюдения  $P$  представляет собой сумму колебаний, порожденных всеми элементарными полосами, на которые мысленно разбита щель:

$$E = \int dE = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} A dy \cos(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) = -\frac{A}{k \sin \varphi} \sin(\omega t - kr_0 - ky \sin \varphi) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} =$$
$$= -\frac{A}{k \sin \varphi} \left[ \sin\left(\omega t - kr_0 - \frac{kb \sin \varphi}{2}\right) - \sin\left(\omega t - kr_0 + \frac{kb \sin \varphi}{2}\right) \right] = Ab \frac{\sin \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\frac{kb \sin \varphi}{2}} \cos(\omega t - kr_0)$$

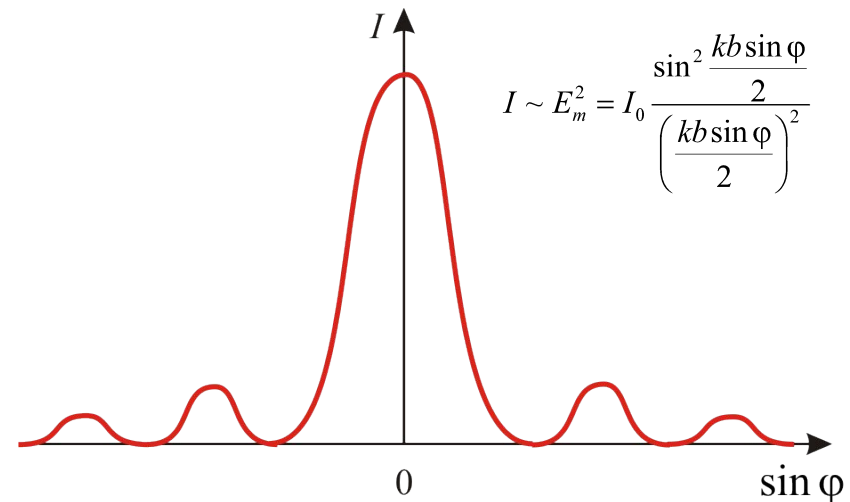
- Интенсивность волны:

$$I \sim E_m^2 = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\left(\frac{kb \sin \varphi}{2}\right)^2}$$

Здесь  $I_0$  – интенсивность света в точке наблюдения, расположенной напротив середины щели ( $\varphi = 0$ )

# Дифракция Фраунгофера на щели

- Формула  $I(\phi)$  является основной при описании дифракции Фраунгофера. С ее помощью можно определить направления на минимум/максимум интенсивности света на экране и вычислить интенсивность в любой его точке.
- Если  $x$  – координата точки экрана,  $l$  расстояние от щели до экрана, то заменой  $\sin\phi = x/l$  можно получить зависимость  $I(x)$ .



Из графика видно, что основная часть энергии световой волны, прошедшей через щель, сосредоточена в области центрального дифракционного максимума.

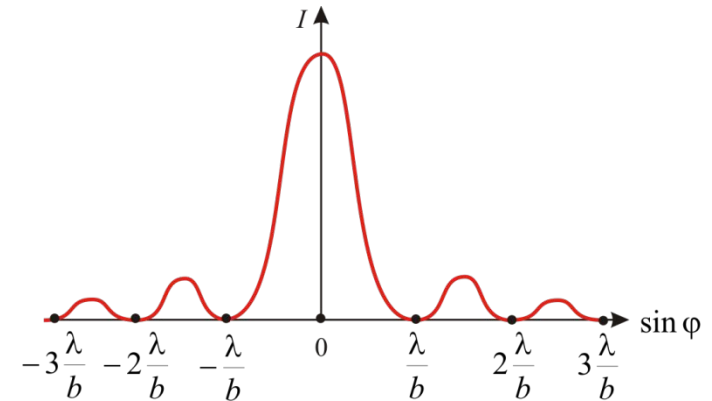
# Дифракция Фраунгофера на щели

- Направления на минимумы интенсивности света в дифракционной картине определяются из равенства нулю числителя дроби  $I(\phi)$ :

$$\sin \frac{kb \sin \phi}{2} = 0,$$

$$\frac{kb \sin \phi}{2} = \frac{2\pi \sin \phi}{2\lambda} = \frac{\pi \sin \phi}{\lambda} = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$b \sin \phi = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$I \sim E_m^2 = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \phi}{2}}{\left(\frac{kb \sin \phi}{2}\right)^2}$$

$$b \sin \phi = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

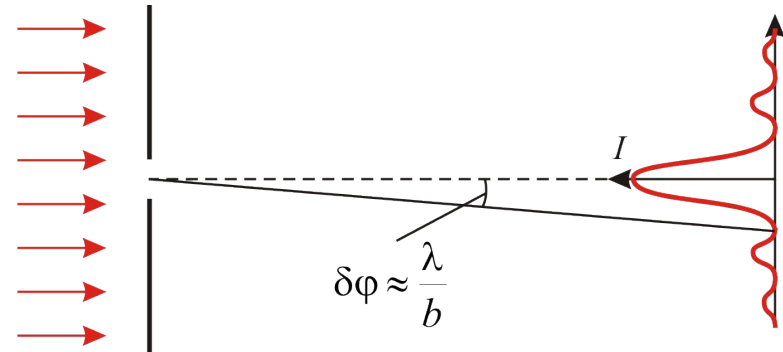
# Дифракция Фраунгофера на щели

- Направления на первые ( $m = \pm 1$ ) минимумы дифракции:

$$b \sin \varphi_1 = \pm \lambda, \quad \sin \varphi_1 = \pm \frac{\lambda}{b}$$

- Угол  $\varphi_1$  называется **угловой полушириной дифракционного максимума**. Для малых углов угловая полуширина дифракционного максимума

$$\delta\varphi \approx \sin \varphi = \frac{\lambda}{b}$$



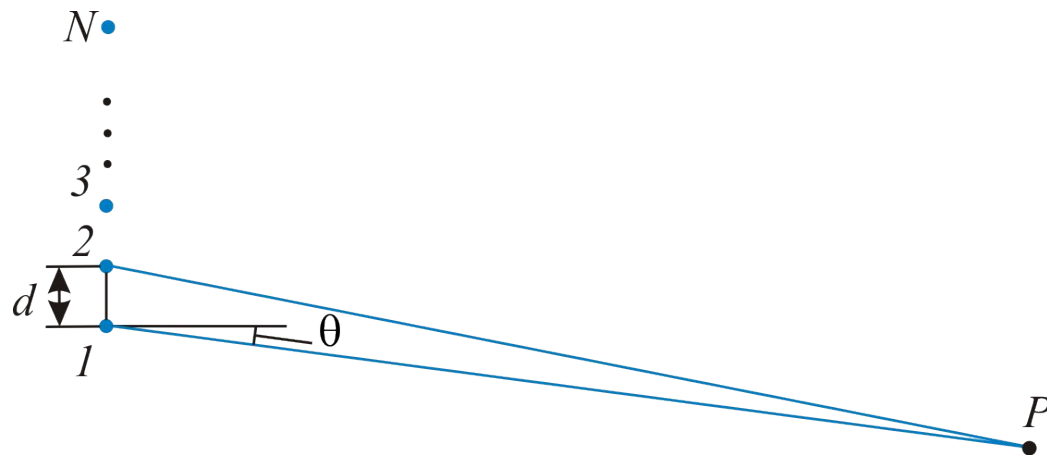
Всякий пучок лучей с характерным поперечным размером  $b$  (например, ширина щели, диаметр диафрагмы) характеризуется **дифракционным уширением**, равным по порядку величины угловой полуширине  $\delta\varphi$  центрального дифракционного максимума.

ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

# 6.4 Многолучевая интерференция

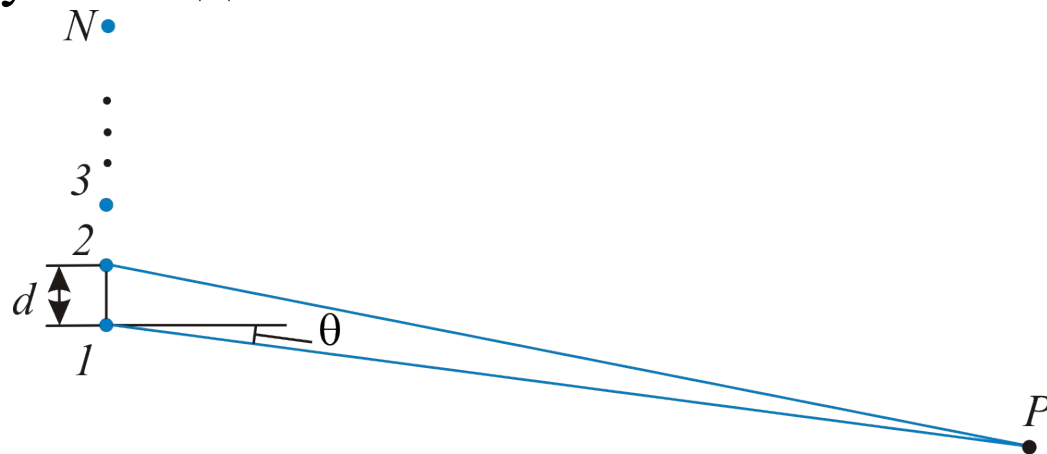
# Многолучевая интерференция

- Рассмотрим интерференцию волн, излучаемых несколькими точечными когерентными источниками света – **многолучевую интерференцию**.
- Пусть в однородной изотропной среде с  $\varepsilon = \mu = 1$  имеется  $N$  расположенных вдоль одной прямой когерентных источников света, колебания которых происходят в одинаковой фазе  $\omega t$ , где  $\omega$  – циклическая частота. Расстояние между соседними источниками равно  $d$ . Определим интенсивность излучения в точке наблюдения  $P$ .



# Многолучевая интерференция

- Поскольку точка  $P$  находится на большом удалении от источников, то лучи, идущие от источников в точку  $P$  можно считать параллельными друг другу. Будем также предполагать, что амплитуды волн от всех источников одинаковы.
- Обозначим  $\theta$  – угол между нормалью к линии, вдоль которой расположены источники и направлением на точку  $P$ .
- Расстояние от  $i$ -го источника до точки  $P$  равно:  
 $r_i = r_1 + (i - 1)d\sin\theta$ , где  $d\sin\theta$  – оптическая разность хода лучей, идущих от двух соседних источников.





# Многолучевая интерференция

- Каждый источник с порядковым номером  $i$  порождает в точке  $P$  колебание светового вектора  $E_i$ :

$$E_1 = E_m \cos(\omega t - kr_1),$$

$$E_2 = E_m \cos(\omega t - kr_2) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - kd \sin \theta),$$

$$E_3 = E_m \cos(\omega t - kr_3) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - 2kd \sin \theta),$$

.....

$$E_i = E_m \cos(\omega t - kr_i) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - (i - 1)kd \sin \theta),$$

.....

$$E_N = E_m \cos(\omega t - kr_N) = E_m \cos(\omega t - kr_1 - (N - 1)kd \sin \theta),$$

Здесь  $E_m$  – амплитуда колебания, возбужденного в точке  $P$  волной от одного источника и одинаковая для всех источников.

# Многолучевая интерференция

- Результирующее колебание  $E$  светового вектора в точке  $P$  равно сумме всех колебаний:

$$E = \sum_{i=1}^N E_i$$

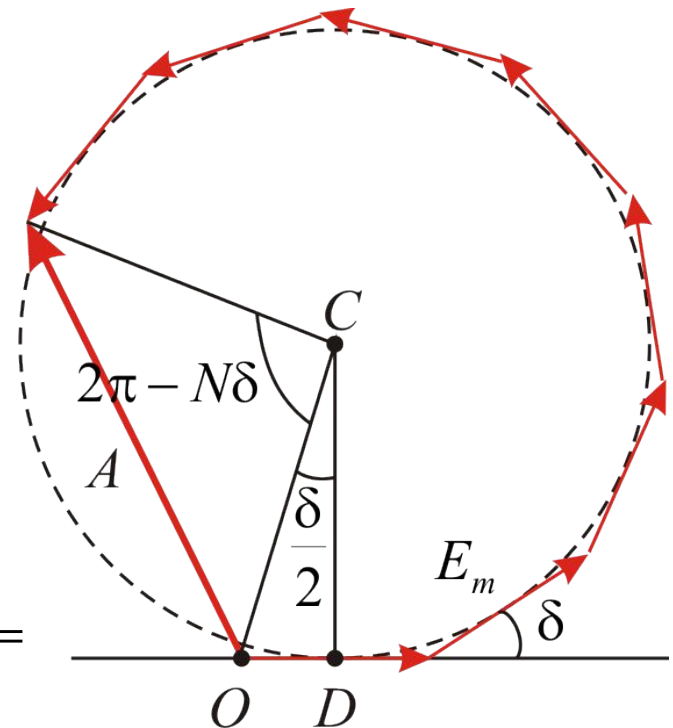
- Для вычисления  $E$  воспользуемся методом векторной диаграммы.
- Все складываемые колебания имеют одинаковую амплитуду  $E_m$ , разность фаз между колебания от двух соседних источников равна  $\delta = kdsin\theta$ , поэтому вектор каждого колебания имеет длину  $E_m$  и повернут на угол  $\delta$  против часовой стрелки по отношению к вектору предыдущего колебания.
- Векторная диаграмма представлена на следующем слайде.

# Многолучевая интерференция

- Векторная диаграмма представляет собой часть правильного  $N$ -угольника, со стороной  $E_m$ . Результирующее колебание изображается на диаграмме вектором  $E$ . Из простых геометрических соображений ясно, что его длина:

$$E = OB = 2OC \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = 2 \frac{OD}{\sin \frac{\delta}{2}} \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} =$$

$$= 2 \frac{E_m}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \sin \frac{2\pi - N\delta}{2} = E_m \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}$$



# Зависимость интенсивности света от угла дифракции

- Тогда интенсивность  $I$  света в точке  $P$ , пропорциональная квадрату амплитуды  $E_m$  светового вектора, равна

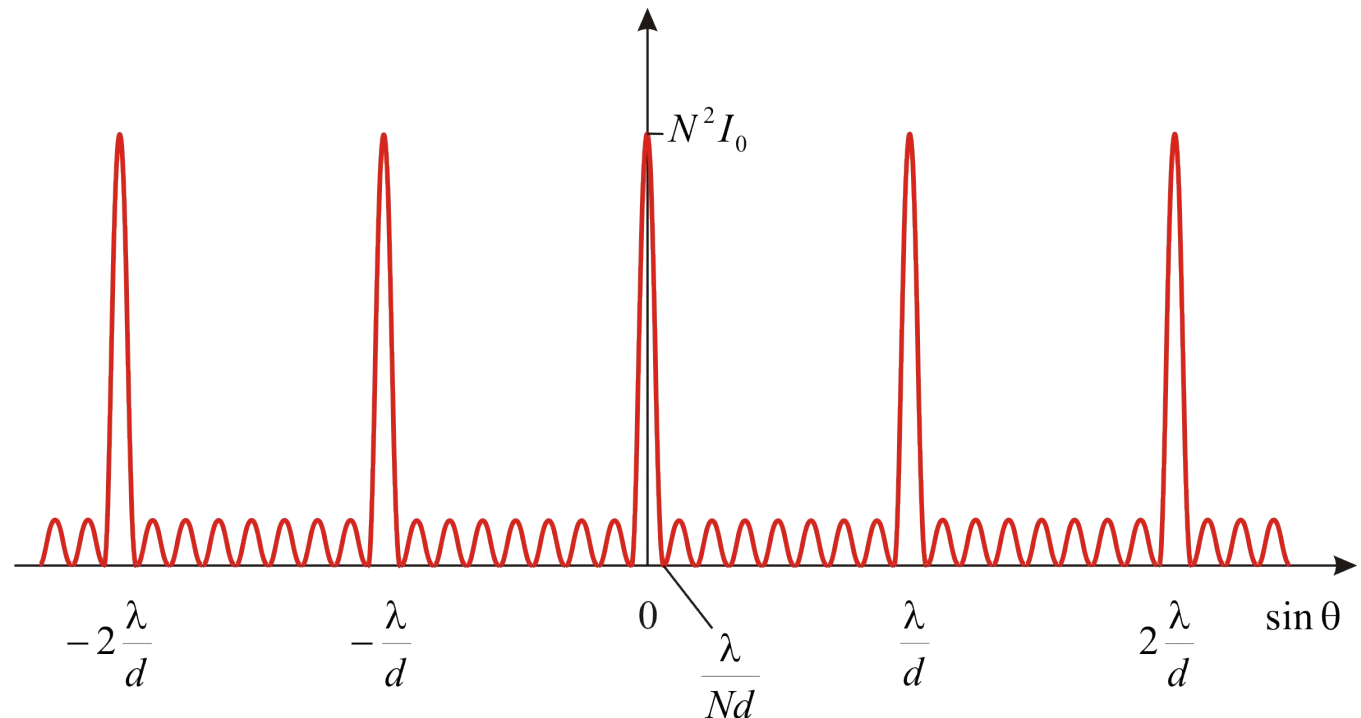
$$I \sim E^2 = I_0^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$

- Здесь  $I_0$  – интенсивность световой волны, пришедшей в точку  $P$  от каждого из  $N$  источников, пропорциональная квадрату амплитуды  $E_m$ .
- Таким образом, интенсивность света в точке наблюдения  $P$  зависит от угла  $\theta$ , определяющего направление наблюдения.

# Зависимость интенсивности света от угла дифракции

- На рисунке представлен график зависимости  $I(\theta)$ , на котором имеются резко выраженные максимумы — так называемые главные интерференционные максимумы интенсивности

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$

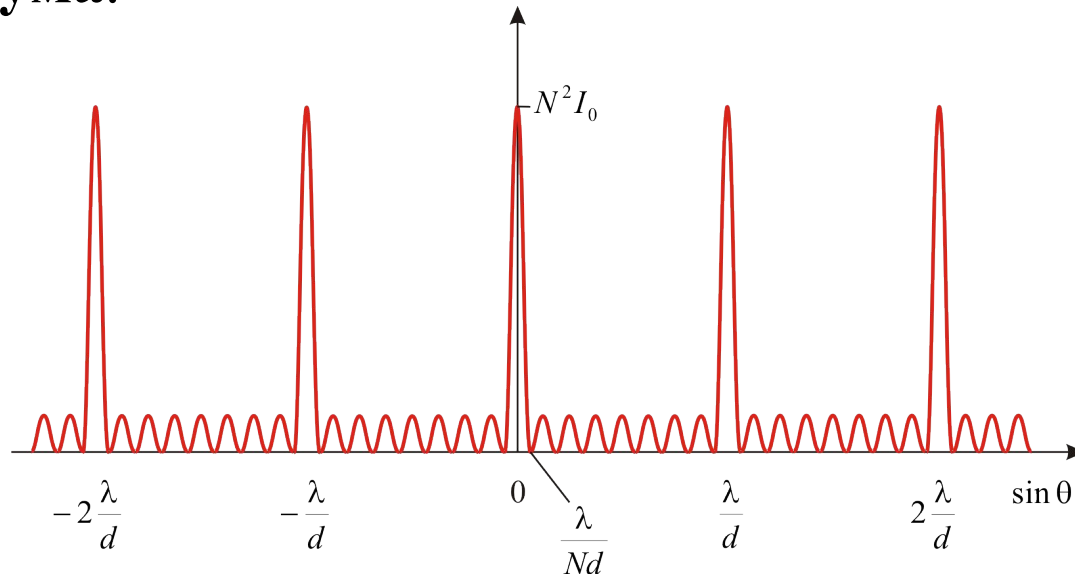


# Главные максимумы

- Найдем положения главных максимумов на экране: приравняем к нулю знаменатель выражения  $I(\theta)$ :

$$\sin \frac{kd \sin \theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{kd \sin \theta}{2} = m\pi, \Leftrightarrow \frac{2\pi d \sin \theta}{2\lambda}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Число  $m$  называется **порядком главного интерференционного максимума**.



$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$

# Главные максимумы

- Таким образом, углы, определяющие направления на главные максимумы интенсивности в интерференционной картине от  $N$  когерентных источников света, должны удовлетворять условию:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

# Интенсивность главного максимума

- Теперь найдем значение интенсивности света в центральном ( $m = 0$ ) главном максимуме, для которого  $\theta = 0$  и тогда значение разности фаз складываемых колебаний  $\delta = kdsin\theta = 0$ .
- Тогда, согласно выражению для  $I(\theta)$ :

$$I_{\max} = I_0 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \approx I_0 \frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = N^2 I_0$$

- Т.о. интенсивность света в главном максимуме в  $N^2$  раз превышает интенсивность света  $I_0$  от отдельного взятого источника.



# Интенсивность главного максимума

- Оценим угловую ширину  $\delta\theta$  центрального максимума, т.е. угловое расстояние между направлениями на центральный максимум ( $\theta = 0$ ) и направлением на первый (ближайший к центральному максимуму) минимум интенсивности:  $\delta\theta = \theta_{1\min}$ :

$$\sin \frac{Nkd \sin \theta_{1\min}}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{Nkd \sin \theta_{1\min}}{2} = \frac{2\pi Nd \sin \theta_{1\min}}{2\lambda} = \pi,$$

$$\sin \theta_{1\min} = \frac{\lambda}{Nd}.$$

- При малых углах  $\theta$ :  $\sin \theta_{1\min} \approx \theta_{1\min}$ , поэтому угловая ширина центрального (и ближайших к нему) главного максимума:

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}.$$

ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

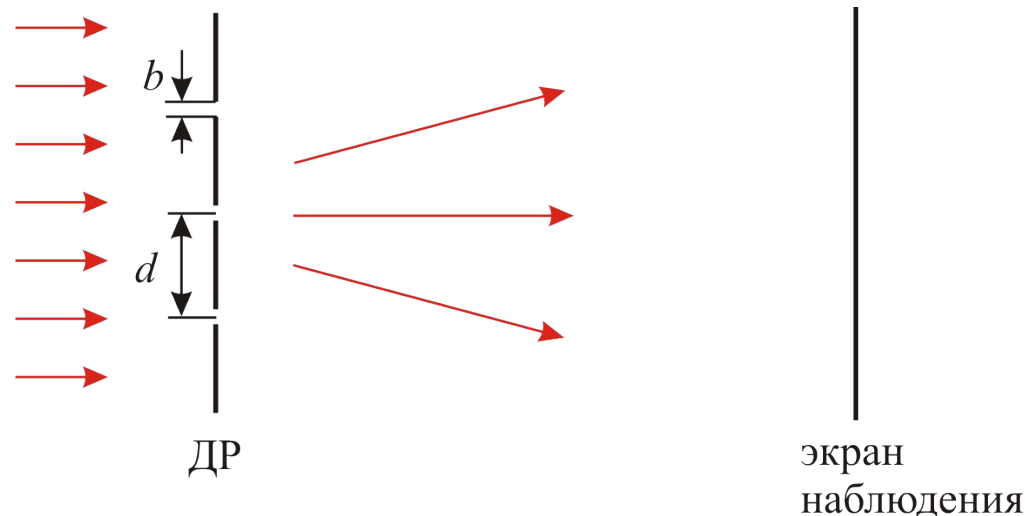
## 6.5 Дифракционная решетка

# Дифракционная решетка

- **Дифракционная решетка** представляет собой совокупность большого количества одинаковых, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга длинный щелей в непрозрачном экране.
- **Периодом (постоянной) решетки  $d$**  называется расстояние между серединами соседних щелей.
- Дифракция света, прошедшего через решетку, – это дифракция Фраунгофера.

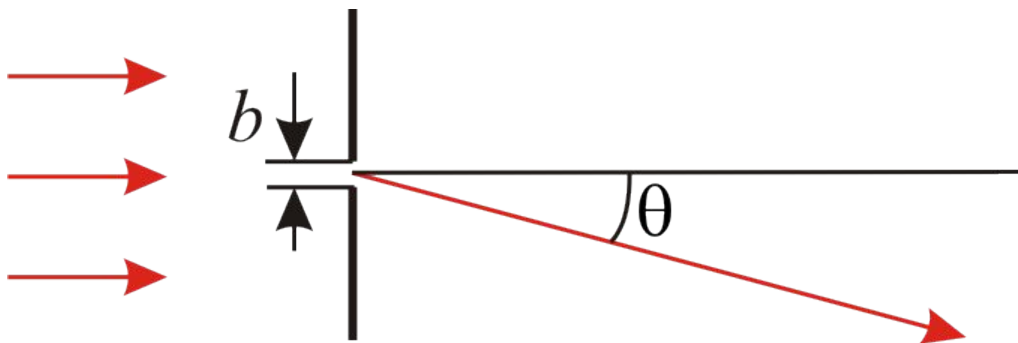
# Дифракционная решетка

- Пусть плоская световая волна падает на ДР по нормали к ее поверхности. За решеткой на большом расстоянии располагается экран для наблюдения дифракционной картины.
- Если расстояние между решеткой и экраном недостаточно велико для наблюдения дифракции Фраунгофера, между решеткой и экраном помещают собирающую линзу, которая сводит на экране лучи, пересекающиеся в отсутствие линзы на бесконечности.



# Дифракционная решетка

- Пусть период решетки равен  $d$ , ширина каждой щели  $b$ , число щелей  $N$ . Определим угловое распределение интенсивности света на экране после прохождения решетки.
- Рассмотрим сначала одну отдельную щель ширины  $b$ . Обозначим  $I_1(\theta)$  – интенсивность света, испускаемого поверхностью щели в направлении  $\theta$ .
- Ранее была получена формула для  $I_1(\theta)$ :

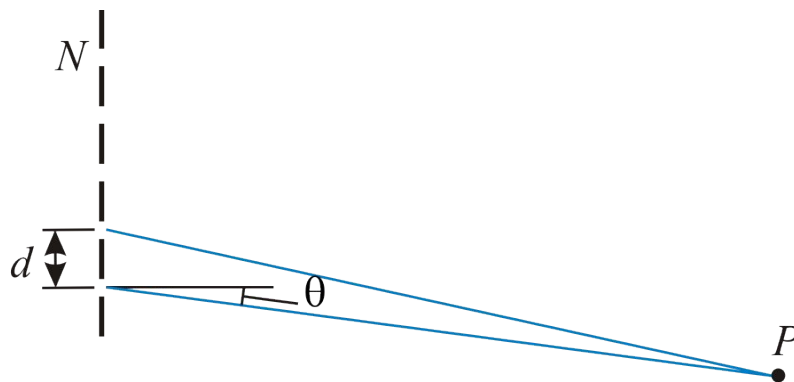


$$I_1(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \varphi}{2}}{\left( \frac{kb \sin \varphi}{2} \right)^2}$$

# Распределение интенсивности света на экране

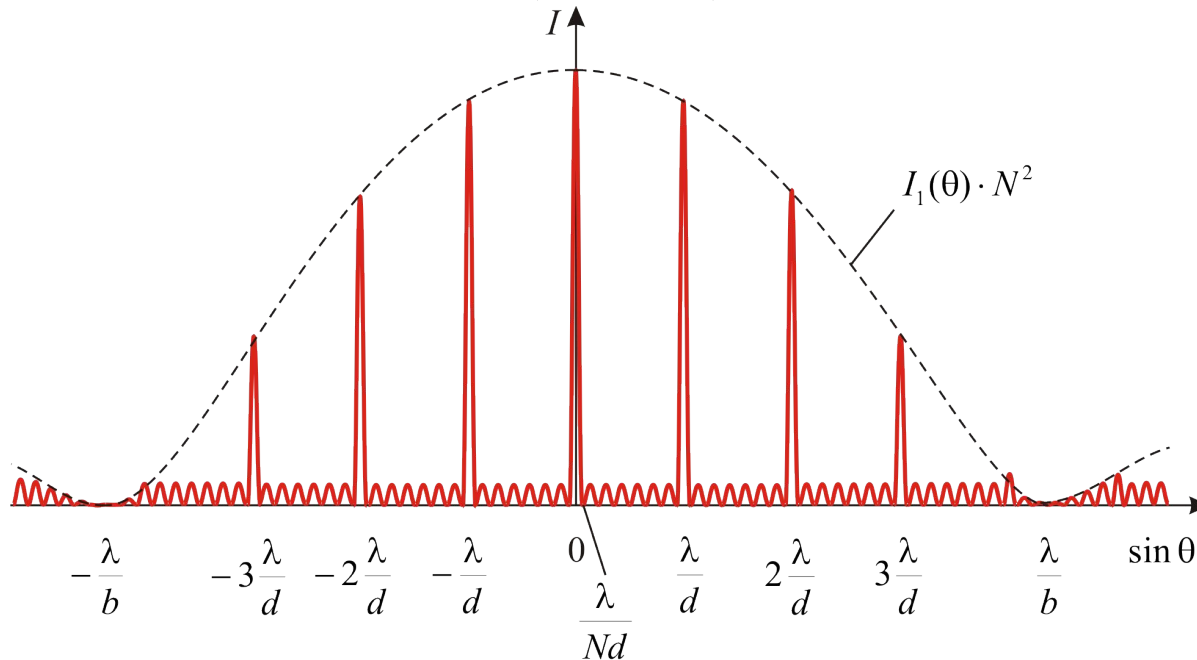
- Пусть теперь свет падает на решетку, состоящую из  $N$  щелей –  $N$  когерентных источников света, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга.
- Тогда интенсивность  $I(\theta)$  результирующей световой волны, возникающей в результате наложения волн от  $N$  источников:

$$I = I_1(\theta) \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \theta}{2}}{\left( \frac{kb \sin \theta}{2} \right)^2} \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}}$$



# Распределение интенсивности света на экране

- Таким образом, дифракционная картина, возникающая при прохождении света через ДР, представляет собой наложение двух дифракционных картин: дифракции Фраунгофера от щели и интерференционной картины, возникающей при наложении волн от  $N$  когерентных источников (щелей).



# Свойства дифракционной решетки

- Перечислим основные особенности дифракционной картины от ДР.

- 1) Углы  $\theta$ , определяющие направления на главные интерференционные максимумы, удовлетворяют условию, аналогичному рассмотренному в предыдущем параграфе:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 2) Угловая полуширина главного максимума при небольших  $m$ :

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}.$$

- 3) Интенсивность света  $I_{\max}$  в главном максимуме ДР в  $N^2$  раз превышает интенсивность  $I_1$  света, испускаемого одной отдельно расположенной щелью:  $I_{\max} = N^2 I_1$ .



# Свойства дифракционной решетки

- 4) Предельный (наибольший возможный) порядок главного максимума  $m_{\text{пред}}$  в дифракционной картине зависит от геометрических размеров решетки
- Из условия главных максимумов найдем:

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda} \Rightarrow m_{\text{пред}} = \left\{ \frac{d}{\lambda} \right\}$$

- Таким образом,  $m_{\text{пред}}$  равен целому числу длин волн  $\lambda$ , укладываемых на расстоянии  $d$ . Период решетки равен наибольшей возможной оптической разности хода интерферирующих лучей, идущих от двух соседних щелей. При этом лучи распространяются вдоль поверхности ДР ( $\theta = \pi/2$ ).

ЛЕКЦИЯ 6. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

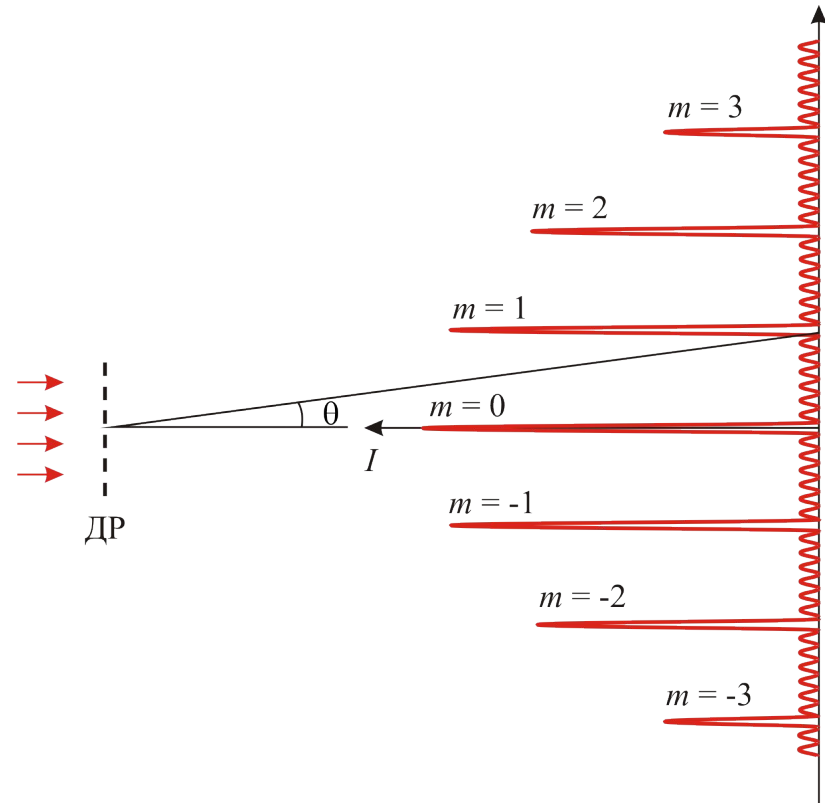
# 6.6 Дифракционная решетка как спектральный прибор

# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda$  на ДР положение в пространстве главных максимумов интенсивности в дифракционной картине определяется условием:

$$d \sin \theta = m\lambda$$

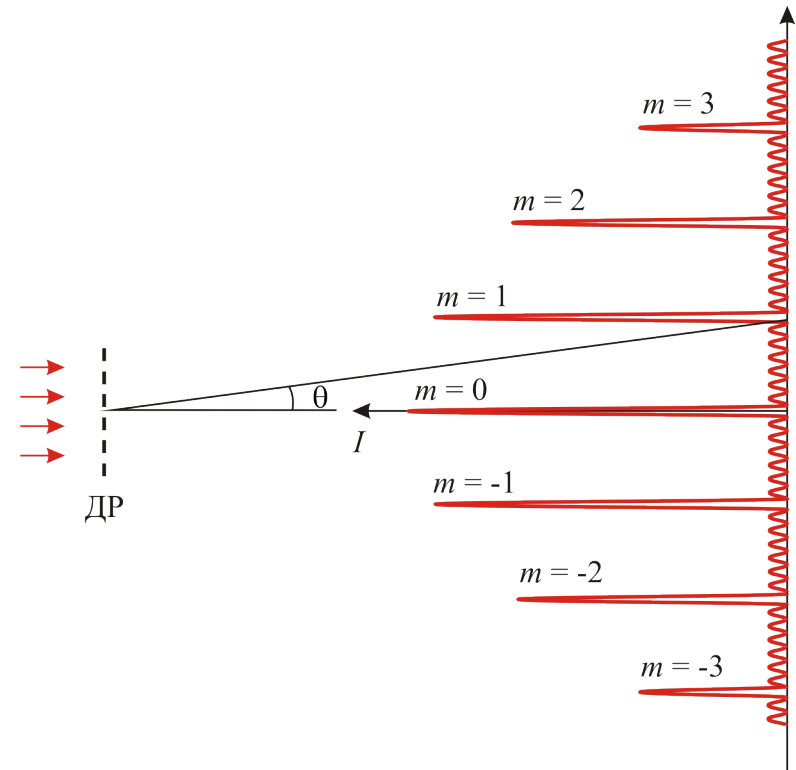
- Здесь  $d$  – период решетки,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  - порядок главного максимума,  $\theta$  – угол между нормалью к поверхности ДР и направлением на главный максимум.



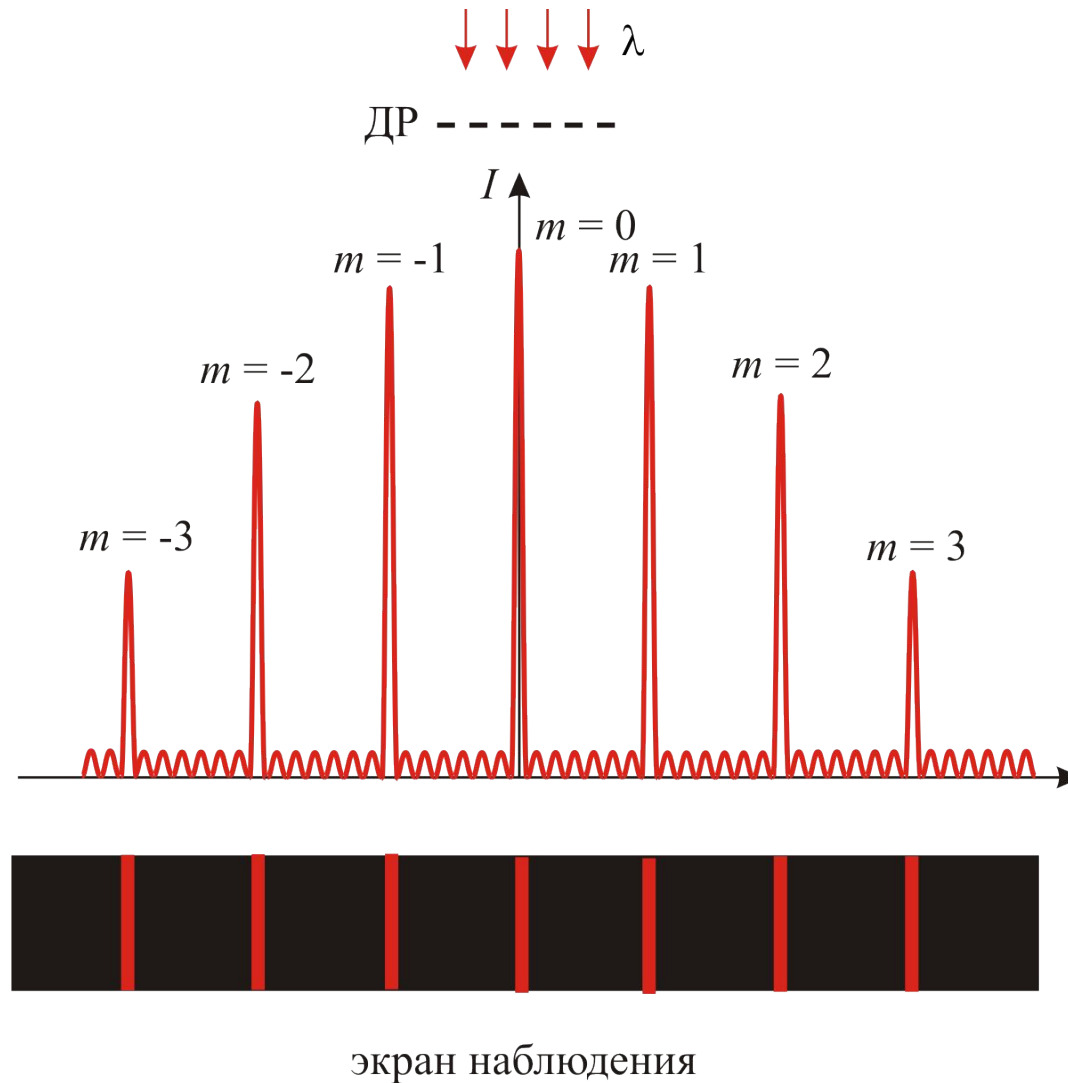
# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- Направления на главный максимум (угол  $\theta$ ) и положения максимума на экране *зависят от длины волны  $\lambda$* : чем больше  $\lambda$ , тем больше угол  $\theta$  и тем дальше от центра дифракционной картины располагается соответствующий максимум интенсивности.
- От длины волны  $\lambda$  не зависит положение только одного главного максимума – центрального (при  $m = 0$ ,  $\theta = 0$  для любых  $\lambda$ )

$$d \sin \theta = m\lambda$$

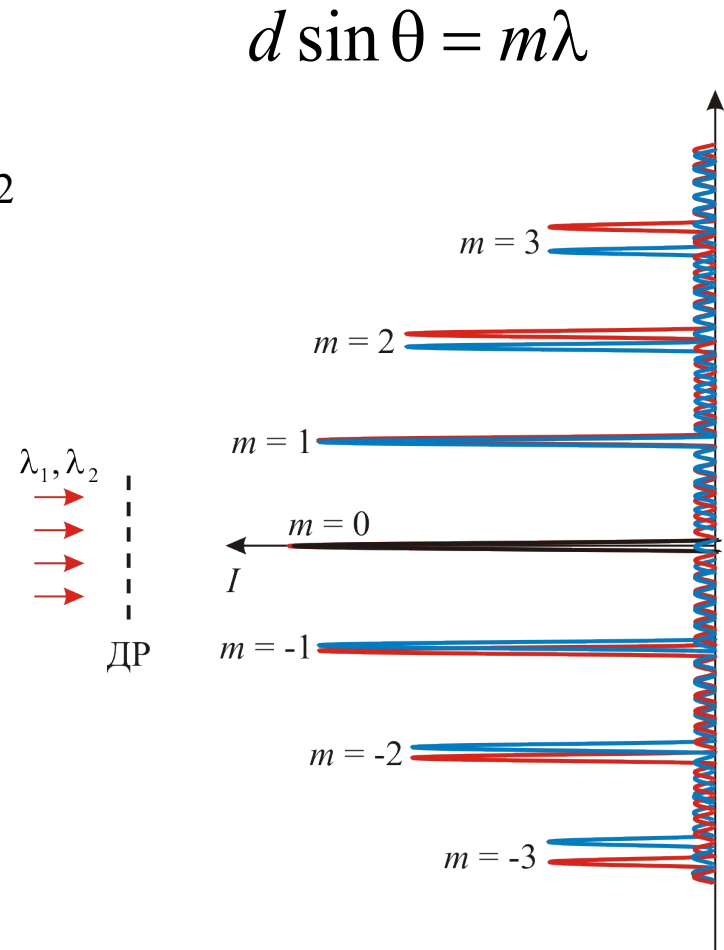


# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

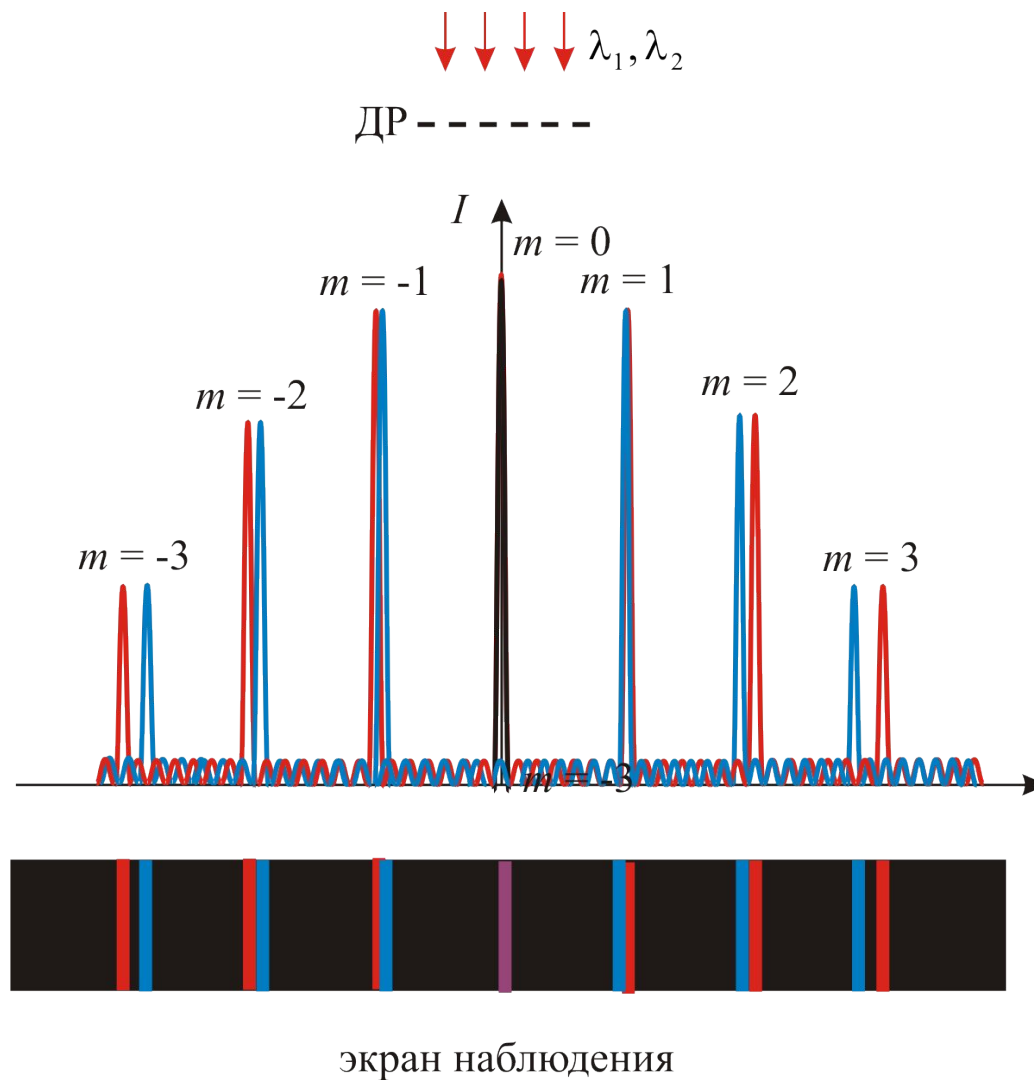


# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- Пусть в свете, падающем на ДР, присутствует излучение с двумя длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , причем, пусть  $\lambda_2 > \lambda_1$ . Дифракционная картина будет выглядеть, как показано на рисунке.
- Поскольку углы  $\theta$ , определяющие направления от ДР на главные максимумы одного и того же порядка  $m$  излучения с разными длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , различны, то и положения указанных максимумов на экране наблюдения не совпадают. Все имеющиеся максимумы, кроме центрального, раздваиваются.

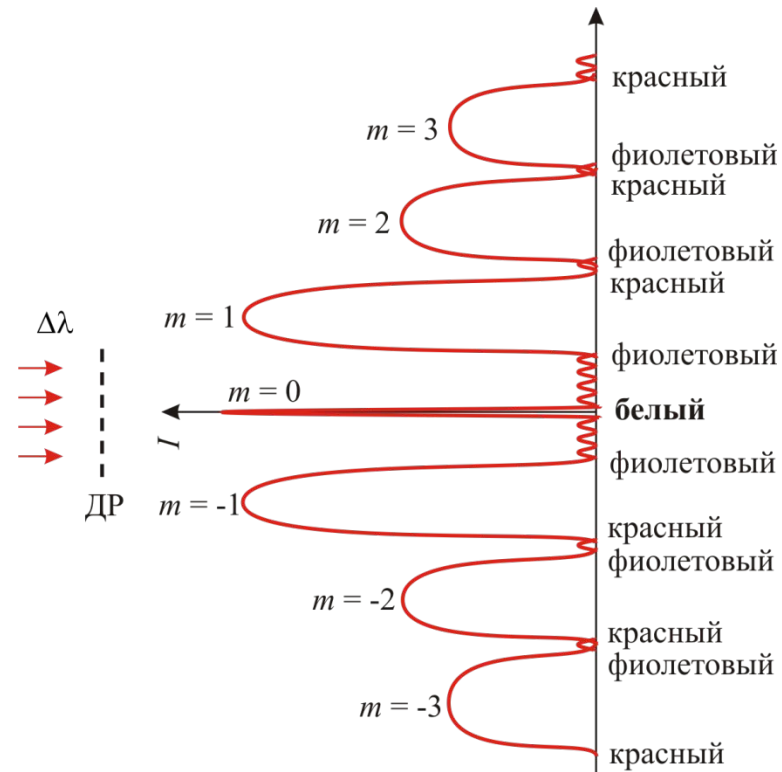


# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света



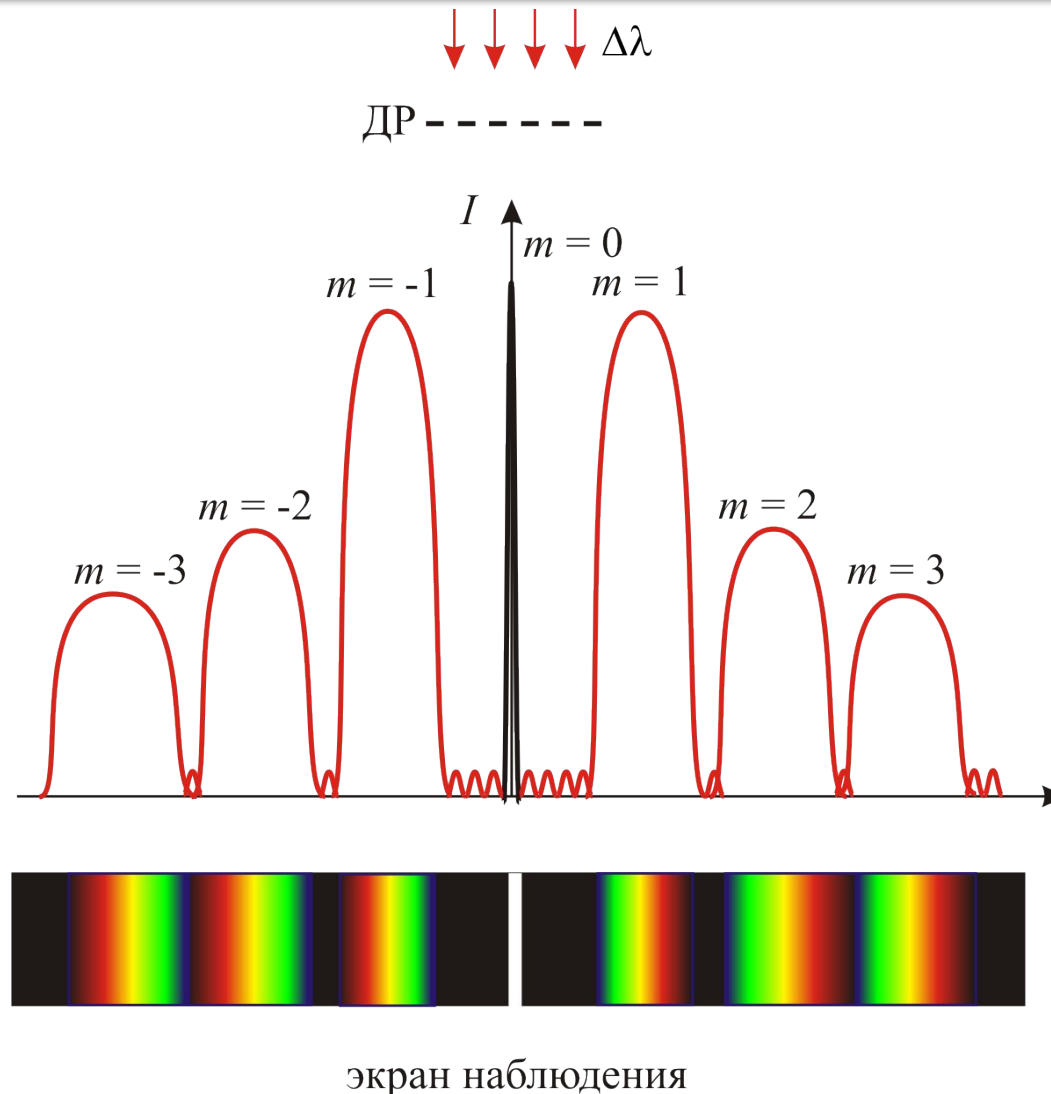
# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света

- Если пропускать через ДР белый свет, то каждый максимум  $m$ -го порядка в дифракционной картине будет представлять собой совокупность смещенных один относительно другого вдоль экрана наблюдения дифракционных максимумов этого же порядка, каждый из которых соответствует определенной длине волны излучения.
- Совокупность всех максимумов  $m$ -го порядка, соответствующих разным длинам волн, образует окрашенную в разные цвета – от фиолетового до красного – полосу, причем ее фиолетовый край располагается ближе к центру дифракционной картины, чем красный.





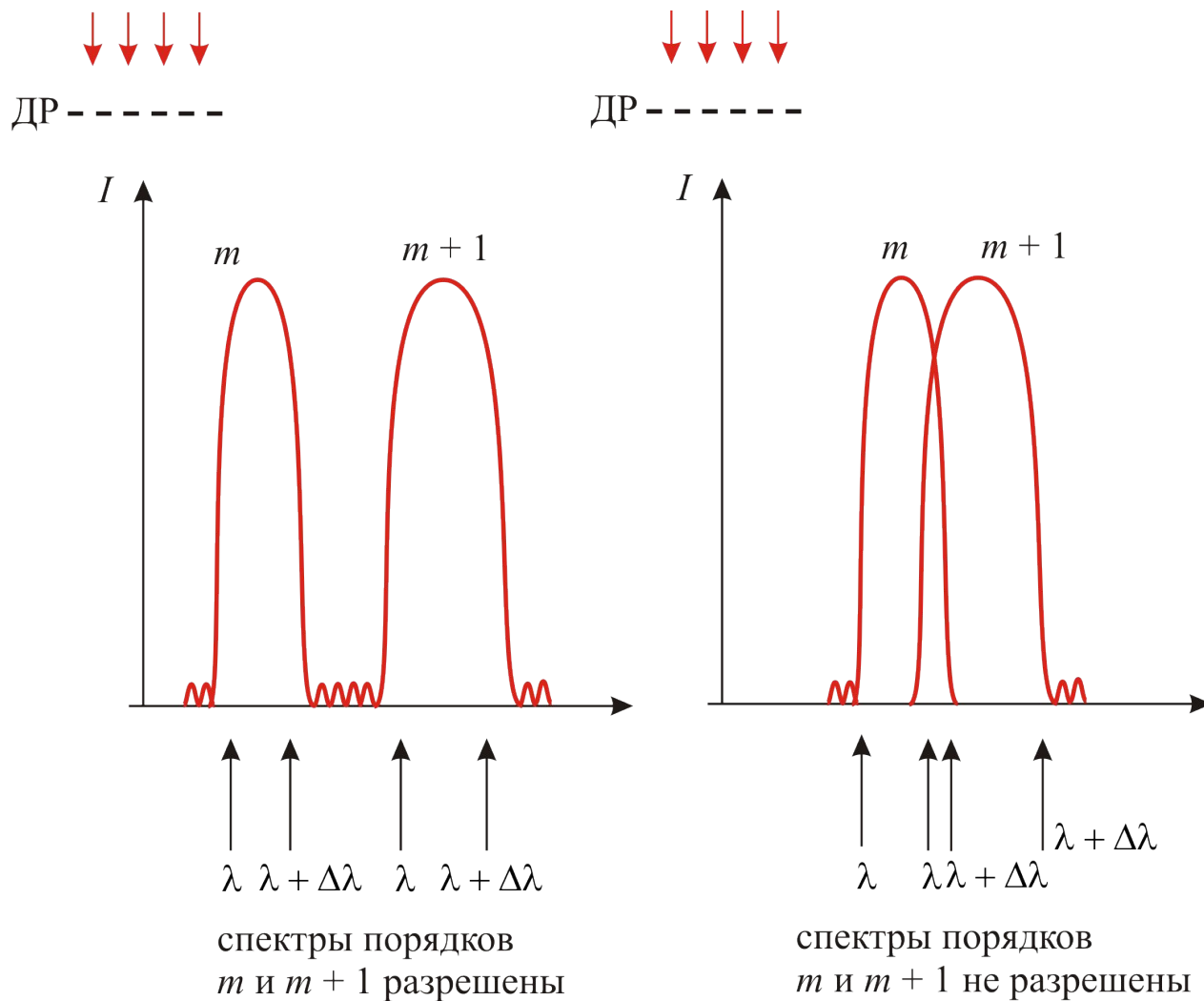
# Зависимость положений главных максимумов от длины волны света



# Дисперсионная область дифракционной решетки

- Дисперсионной областью  $\Delta\lambda$  спектрального прибора называется наибольший интервал длин волн света, который с помощью данного прибора может быть разложен в спектр.
- Ограничение ширины спектрального интервала  $\Delta\lambda$  при использовании ДР в качестве спектрального прибора обусловлено следующим обстоятельством. Если интервал  $\Delta\lambda$  слишком велик, то в дифракционной картине максимум  $m$ -го порядка излучения с наибольшей имеющейся длиной волны перекрывается с максимумом  $(m + 1)$ -го порядка с наименьшей длиной волны. В этих условиях наблюдение спектра становится невозможным (говорят, что спектры  $m$ -го и  $(m + 1)$ -го порядков *не разрешаются*).

# Перекрывание спектров соседних порядков



# Дисперсионная область дифракционной решетки

- Обозначим:  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$  – соответственно наименьшая и наибольшая длины волн в падающем на ДР свете. Тогда ширина спектрального интервала равна  $\Delta\lambda$ .
- Запишем условия главных максимумов, определяющие углы  $\theta_{\lambda+\Delta\lambda}$  и  $\theta_\lambda$ , определяющие направления на максимумы  $m$ -го порядка для излучения с длиной волны  $\lambda + \Delta\lambda$  и  $(m + 1)$ -го порядка для излучения с длиной волны  $\lambda$ :

$$d \sin \theta_{\lambda+\Delta\lambda} = m(\lambda + \Delta\lambda);$$

$$d \sin \theta_\lambda = (m + 1)\lambda$$

- Если рассматриваемые максимумы перекрываются, то  $\theta_{\lambda+\Delta\lambda} = \theta_\lambda$  и тогда  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$ , откуда находим значение  $\Delta\lambda$ , при котором начинается перекрывание максимумов интенсивности соседних порядков в дифракционной картине:  $\Delta\lambda = \lambda/m$

# Дисперсионная область дифракционной решетки

- Выражение  $\Delta\lambda = \lambda/t$  определяет дисперсионную область дифракционной решетки. Она зависит от порядка  $t$  главного максимума, который используется для получения спектра: с ростом  $t$  дисперсионная область уменьшается, т.е. перекрывание спектров соседних порядков наступает раньше – при меньшей ширине спектрального интервала  $\Delta\lambda$  пропускаемого через ДР света.
- Зная ширину спектрального интервала  $\Delta\lambda$  падающего на решетку света, можно оценить порядок главного максимума  $t$ , наиболее удобный для наблюдения спектра.

# Ограничение порядка спектра дисперсионной областью ДР

- Пусть например, белый свет содержит волны в диапазоне от 400 до 760 нм, т.е.  $\Delta\lambda = 360$  нм. Тогда порядок главного максимума, который начинает перекрываться с соседним  $(m + 1)$ -м максимумом равен:

$$m \sim \frac{\langle \lambda \rangle}{\Delta\lambda} \approx \frac{600}{360} \sim 2$$

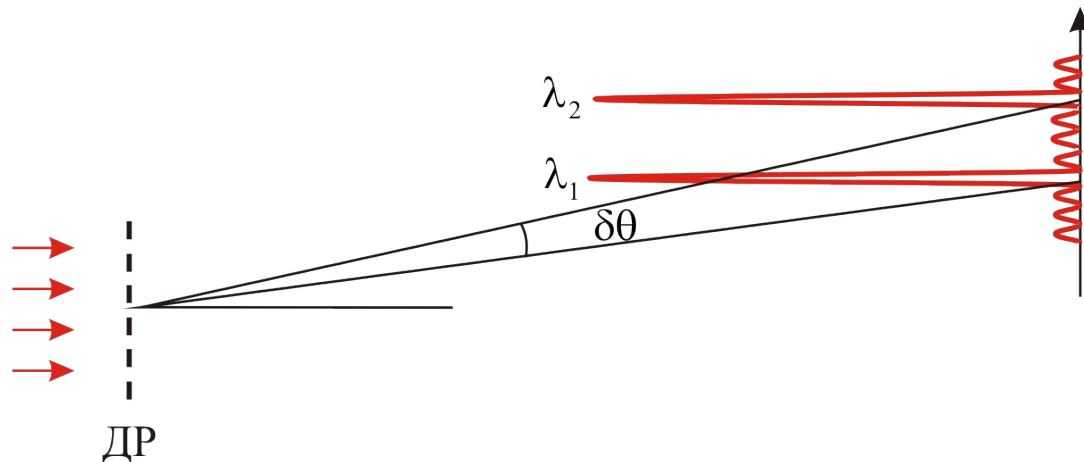
- Следовательно, разложение белого света в спектр с помощью дифракционной решетки возможно лишь в первом или, в крайнем случае, втором порядке главного максимума.

# Спектральная линия

- В зависимости от природы источника света **спектр электромагнитного излучения** – набор характеризующих излучение частот или длин волн – может быть непрерывным или дискретным.
- Дискретный спектр, наблюдаемый с помощью дифракционной решетки, представляется в виде системы окрашенных (каждый в определенный цвет) главных максимумов интенсивности в дифракционной картине.
- **Спектральной линией** называется излучение с определенной длиной волны, а также соответствующая этому излучению дифракционный максимум интенсивности света в виде окрашенной в определенный цвет полосы на экране наблюдения.

# Спектральная линия

- На рисунке показаны две спектральные линии с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые представляют собой главные дифракционные максимумы некоторого порядка  $m$ .
- **Угловым расстоянием** между двумя спектральными линиями называется угол  $\delta\theta$  между направлениями на главные дифракционные максимумы интенсивности, соответствующие этим спектральным линиям (см. рисунок).





# Угловая дисперсия дифракционной решетки

- Обозначим через  $d\theta$  угловое расстояние между двумя спектральными линиями с близкими друг другу длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а через  $d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  – разность длин волн этих линий.
- **Угловой дисперсией  $D$**  называется величина, равна угловому расстоянию между двумя спектральными линиями, длины волн которых отличаются на единицу:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

- Вычислим угловую дисперсию решетки.

# Угловая дисперсия дифракционной решетки

- Продифференцируем обе части равенства, определяющего направления на главные максимумы интенсивности света:  
 $d \sin \theta = m \lambda$ :

$$d \cos \theta d\theta = m d\lambda \Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

- При разложении света в спектр с помощью ДР, как правило, используются максимумы не слишком высокого порядка, что соответствует малым углам  $\theta$ . Тогда  $\cos \theta \approx 1$ , так что угловая дисперсия решетки приблизительно равна:

$$D \approx \frac{m}{d}$$

# Разрешающая способность спектрального прибора

- Разрешающей силой (способностью) спектрального прибора, в частности, дифракционной решетки, называется величина

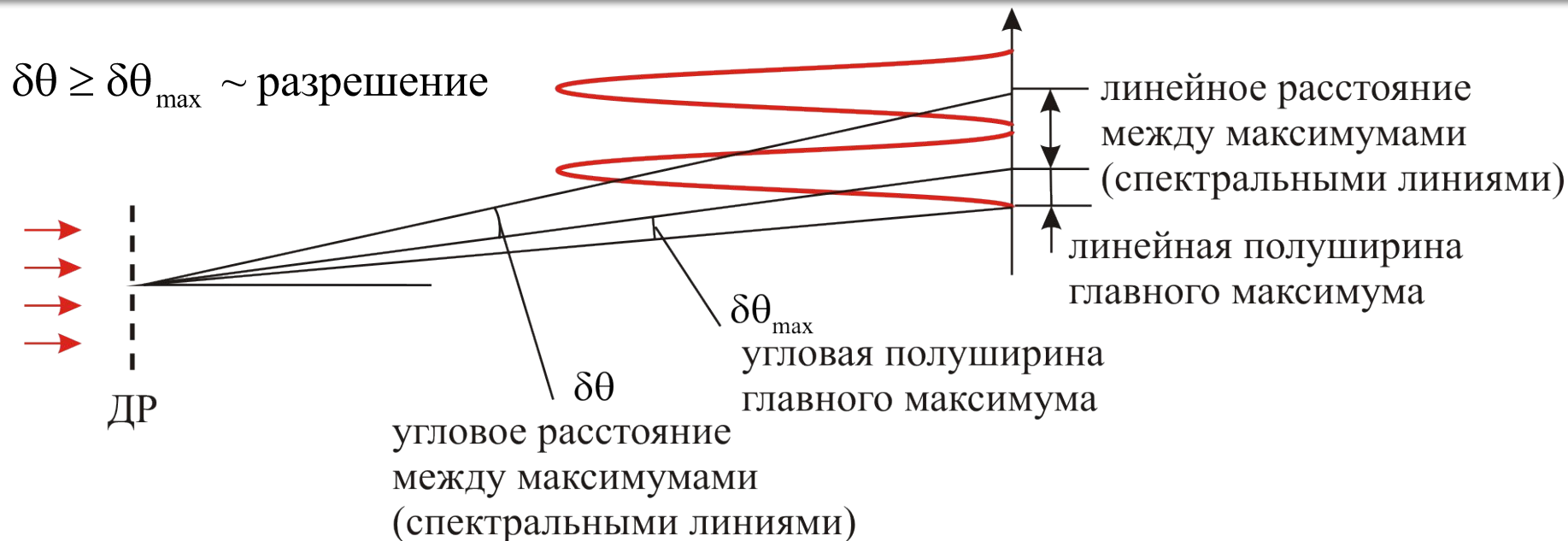
$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}}$$

Здесь  $\delta\lambda_{\min}$  – наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются отдельно (т.е. разрешаются);  $\lambda$  – длина волны одной из линий или средняя из них.

# Критерий Рэля

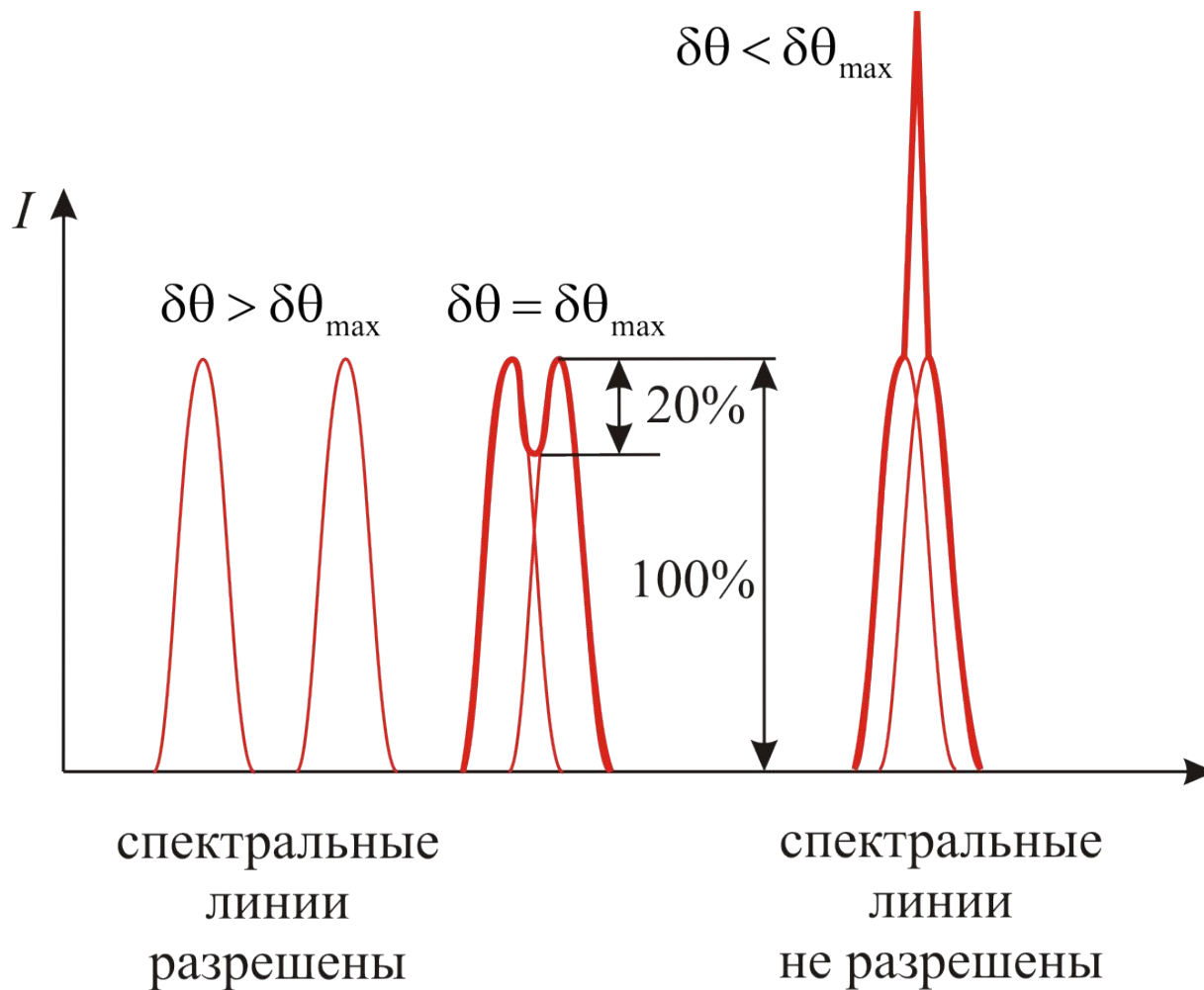
- **Критерий разрешения Рэля.** *Две спектральные линии воспринимаются отдельно (разрешаются), если расстояние между соответствующими этим линиям максимумами интенсивности света в дифракционной картине равно полуширине каждого максимума.*
- **Развернутая формулировка критерия спектрального разрешения Рэля:** *две спектральные линии с близкими длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны.*

# Критерий Рэля



- На рисунке (см. следующий слайд) показана зависимость интенсивности света от угла  $\theta$ , определяющего направление наблюдения, или от линейной координаты точки наблюдения на экране.

# Критерий Рэля



Средний рисунок иллюстрирует критерий Рэля: если  $\delta\theta = \delta\theta_{\max}$ , то между двумя максимумами интенсивности имеется минимум, относительная глубина которого приблизительно составляет 20%.

# Разрешающая способность дифракционной решетки

- Вычислим разрешающую силу  $R$  дифракционной решетки. Угловое расстояние  $\delta\theta$  между двумя спектральными линиями, длины волн которых отличаются на  $\delta\lambda$ , равно

$$\delta\theta = D\delta\lambda \approx \frac{m}{d}\delta\lambda$$

- С другой стороны, угловая полуширина главного максимума в дифракционной картине:

$$\delta\theta_{\text{гл. max}} = \frac{\lambda}{Nd}$$

- Две линии разрешены, если, согласно критерию Рэлея,  $\delta\theta \geq \delta\theta_{\text{max}}$ , т.е.

$$\frac{m}{d}\delta\lambda \geq \frac{\lambda}{Nd} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\delta\lambda} \leq mN \qquad \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\text{min}}} = R = mN$$