

Тема. Система двух случайных величин

1. Многомерные СВ
2. Способы задания двумерных СВ
3. Двумерные СВ с независимыми компонентами
4. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ
5. Плотность распределения и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ
6. Числовые характеристики системы двух случайных величин

1. Многомерные СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *n*-мерной случайной величиной (*n*-мерным случайным вектором) называется упорядоченная совокупность *n* одномерных СВ (X_1, X_2, \dots, X_n) .

При этом каждая СВ X_i называется *составляющей* или *компонентой* *n*-мерной СВ.

Геометрическая интерпретация:

(X_1, X_2, \dots, X_n) – случайная точка в *n*-мерном пространстве с координатами (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Различают два вида n -мерных СВ – дискретные и непрерывные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. n -мерная СВ называется **дискретной**, если все ее компоненты – дискретные.

n -мерная СВ называется **непрерывной**, если все ее компоненты – непрерывные.

n -мерная СВ задается с помощью **закона распределения** – соотношения, устанавливающего связь между значениями n -мерной СВ и соответствующими им вероятностями.

Виды законов распределения:

для n -мерных ДСВ: 1) n -мерная таблица распределения;
2) функция распределения;

для n -мерных НСВ: 1) функция распределения;
2) плотность распределения вероятностей.

Для простоты изложения в дальнейшем будем рассматривать двумерные СВ. На общий случай все результаты легко переносятся.

2. Способы задания двумерных СВ

а) Таблица распределения

Пусть X, Y – одномерные ДСВ

X может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Y может принимать значения $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

\Rightarrow СВ (X, Y) – двумерная СВ с множеством возможных значений $(x_i; y_j)$, $i = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots$ (множество значений СВ – конечно или счётно).

Пусть $P(x_i; y_j) = P(X = x_i; Y = y_j) = p_{ij}$

Таблицей распределения двумерной ДСВ (X, Y) называется двумерная таблица, в которой перечислены все возможные значения $(x_i; y_j)$ и соответствующие им вероятности:

	x_1	x_2	...	x_i	...
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{i1}	...
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{i2}	...
...
y_j	p_{1j}	p_{2j}	...	p_{ij}	...
...

Замечание. Поскольку в результате опыта СВ обязательно примет одно из своих возможных значений $(x_i; y_j)$, и эти события всегда несовместны, то

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Пример 1. – Дискретная двумерная случайная (X, Y) задана законом распределения:

Y	X		
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$
$y_1=2$	0,1	0,05	0,35
$y_2=4$	0,05	0,2	0,25

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) вероятность того, что $X+Y < 6$.

Решение. а) Сложив вероятности «по столбцам», напишем закон распределения случайной величины X :

X	1	3	4
p	0,15	0,25	0,6

Сложив вероятности «по строкам», найдем закон распределения случайной величины Y :

Y	2	4
p	0,5	0,5

б) Для нахождения вероятности того, что $X+Y < 6$ рассмотрим возможные сочетания значений компонент X, Y и сложим вероятности тех из них, для которых выполняется неравенство $X+Y < 6$. Получим:

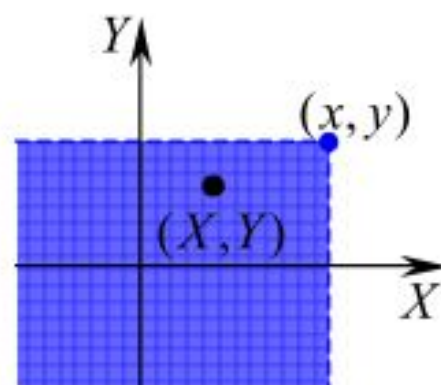
$$P(X+Y < 6) = P(X=1, Y=2) + P(X=3, Y=2) + P(X=1, Y=4) = 0,1 + 0,05 + 0,05 = 0,20.$$

б) Функция распределения двумерной ДСВ и НСВ

Пусть (X, Y) – двумерная СВ (дискретная или непрерывная)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функцией распределения (или интегральным законом распределения)* двумерной СВ (X, Y) (дискретной или непрерывной) называется функция $F(x, y)$, определяемая равенством $F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$.

Геометрически $F(x, y)$ – вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрант, расположенный левее и ниже точки (x, y) .



Так как при нахождении $F(x, y)$ СВ X и Y рассматриваются совместно, то $F(x, y)$ называют также *совместной функцией распределения СВ* X и Y .

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

- 1) Значения $F(x,y)$ принадлежат $[0; 1]$.
- 2) Функция $F(x,y)$ не убывает по каждому аргументу в отдельности, т.е.

$$\text{если } x_1 < x_2, \text{ то } F(x_1, y) \leq F(x_2, y);$$

$$\text{если } y_1 < y_2, \text{ то } F(x, y_1) \leq F(x, y_2).$$

- 3) Справедливы предельные соотношения:

$$F(-\infty, y) = 0; \quad F(x, -\infty) = 0; \quad F(-\infty, -\infty) = 0.$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

- 4) Зная функцию $F(x,y)$ можно найти функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ ее составляющих X и Y :

$$F(x) = F(x; +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y),$$

$$F(y) = F(+\infty; y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y).$$

5) $F(x,y)$ – непрерывная слева по каждому аргументу.

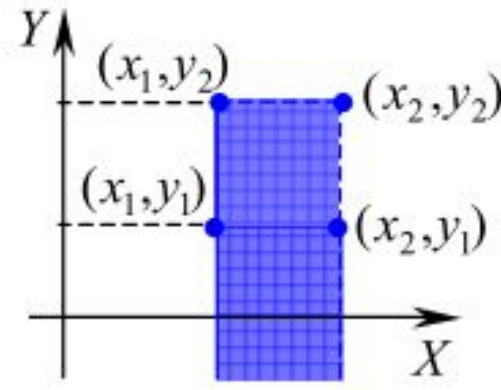
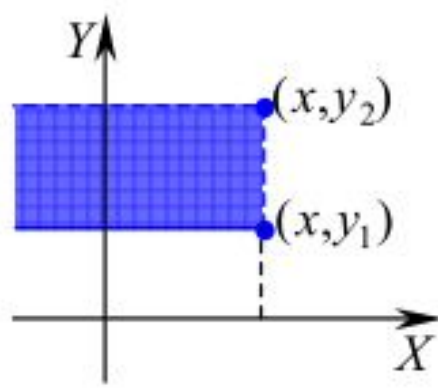
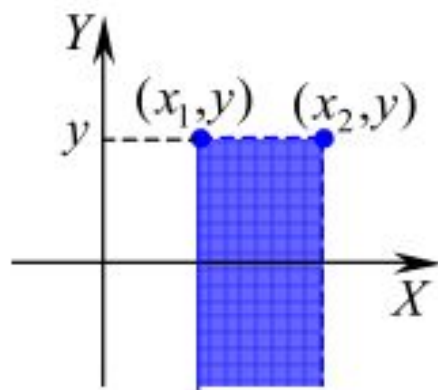
6) Вероятность попадания случайной точки в полуполосу:

$$P(x_1 \leq X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y);$$

$$P(X < x, y_1 \leq Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1).$$

7) Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник:

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = \\ = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \end{aligned}$$



в) Плотность распределения вероятностей

Пусть (X, Y) – непрерывная двумерная СВ,

$F(x, y)$ – функция распределения СВ (X, Y) ,

$F(x, y)$ – имеет непрерывную $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ (всюду, за

исключением возможно конечного числа кривых).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Плотностью распределения вероятностей (дифференциальной функцией распределения)* двумерной СВ (X, Y) называется функция

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

График функции $f(x, y)$ называют *поверхностью распределения* двумерной СВ.

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аналогичны свойствам плотности распределения вероятностей для одномерной СВ. А именно:

1) $f(x,y) \geq 0$.

2) Для функции $f(x,y)$ выполняется условие нормирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1.$$

3) Для функций $f(x,y)$ и $F(x,y)$ справедливо равенство:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy.$$

5) Для функций распределения составляющих двумерной СВ справедливы формулы

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy, \quad F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

6) Плотности распределения составляющих двумерной СВ находятся по формулам:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

7) Вероятность попадания двумерной СВ в заданную область.

Пусть (σ) – произвольная квадрируемая плоская область.

Тогда

$$P[(X, Y) \in (\sigma)] = \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy.$$

\Rightarrow вероятность попадания случайной точки (X, Y) в плоскую область (σ) численно равна объему цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного функцией $f(x, y)$ (вероятностный смысл $f(x, y)$).

Пример 2. Плотность распределения системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$f(x, y) = \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

а). Определить функцию распределения $F(x, y)$ б) Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(\sqrt{3},1)$ и $C(\sqrt{3},0)$.

Решение.

Найдем вид функции распределения $F(x, y)$:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2} dx dy = a \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy =$$

$$= a \int_{-\infty}^x \frac{dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^y \frac{dy}{1+y^2} = a \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^x \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^y \frac{dy}{1+y^2} \right) =$$

$$= a \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_t^x \cdot \lim_{c \rightarrow -\infty} \arctg y \Big|_c^y =$$

$$= a \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctg x - \arctg t) \cdot \lim_{c \rightarrow -\infty} (\arctg y - \arctg c) = a \left(\arctg(x) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\arctg(y) + \frac{\pi}{2} \right).$$

На основании свойства функции распределения имеем: $F(+\infty, +\infty) = 1$.

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty} a \left(\arctg(x) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\arctg(y) + \frac{\pi}{2} \right) = a \cdot \pi^2.$$

Получаем: $a \cdot \pi^2 = 1$, откуда $a = 1/\pi^2$. Таким образом, функция распределения системы двух случайных величин (X, Y) задана выражением

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\arctg(x) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\arctg(y) + \frac{\pi}{2} \right).$$

б) Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(\sqrt{3},1)$ и $C(\sqrt{3},0)$ найдем, воспользовавшись формулой (1) при $x_1=0$; $x_2=\sqrt{3}$; $y_1=0$; $y_2=1$:

$$\begin{aligned}
 P(0 < X < \sqrt{3}, 0 < Y < 1) &= [F(\sqrt{3}, 1) - F(0, 1)] - [F(\sqrt{3}, 0) - F(0, 0)] = \\
 &= \left[\frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg}(1) + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\operatorname{arctg}(0) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg}(1) + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \\
 &- \left[\frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg}(0) + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\operatorname{arctg}(0) + \frac{\pi}{2} \right) \left(\operatorname{arctg}(0) + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) - \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) + \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(\sqrt{3},1)$ и $C(\sqrt{3},0)$ равна $1/12$.

3. Двумерные СВ с независимыми компонентами

Пусть X, Y – одномерные СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. СВ X и Y называются **независимыми**, если $\forall x, y \in \mathbb{R}$ независимы события « $X < x$ » и « $Y < y$ ». В противном случае СВ X и Y называются зависимыми.

Из определения независимых событий и теоремы умножения вероятностей получаем:

События « $X < x$ » и « $Y < y$ » – независимы \Leftrightarrow вероятность их совместного наступления равна произведению их вероятностей, т.е.

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y).$$

\Rightarrow можно дать другое определение независимых СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. СВ X и Y называются **независимыми**, если функция распределения двумерной СВ (X, Y) равна произведению функций распределения составляющих ее одномерных СВ, т.е.

$$F(x, y) = F(x) \cdot F(y).$$

Пусть X, Y – независимые СВ,

$f(x), f(y)$ – плотность распределения вероятностей СВ X и Y соответственно,

$f(x, y)$ – плотность вероятностей двумерной СВ (X, Y) .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА.

СВ X и Y независимы \Leftrightarrow плотность вероятностей их совместного распределения (т.е. двумерной СВ (X, Y)) равна произведению их плотностей распределения вероятностей, т.е.

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y).$$

4. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно следующие возможные значения: $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$.

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ (j сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X) называют совокупность условных вероятностей

$$p(x_1 / y_j), p(x_2 / y_j), \dots, p(x_n / y_j)$$

Аналогично определяется условное распределение Y .

Условные вероятности составляющих X и Y вычисляются соответственно по формулам

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$$

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Условное математическое ожидание составляющей X при $Y=y_j$ можно найти по формуле

$$M(X / y_j) = x_1 p(x_1 / y_j) + x_2 p(x_2 / y_j) + \dots + x_n p(x_n / y_j).$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание составляющей Y .

Пример 1 (продолжение). – Дискретная двумерная случайная (X, Y) задана законом распределения:

Y	X		
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$
$y_1=2$	0,1	0,05	0,35
$y_2=6$	0,05	0,2	0,25

Найти: а) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение 6; б) условный закон распределения Y при условии, что $X=x_3=4$; в) условное математическое ожидание X при $Y=6$.

Решение. а) Найдем условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1=6$:

$$p(x_1 | y_1) = p(x_1, y_1) / p(y_1) = 0,05 / 0,50 = 0,1$$

$$p(x_2 | y_1) = p(x_2, y_1) / p(y_1) = 0,20 / 0,50 = 0,4$$

$$p(x_3 | y_1) = p(x_3, y_1) / p(y_1) = 0,25 / 0,50 = 0,5$$

Напишем искомый условный закон распределения X :

X	1	3	4
$p(X y_1)$	0,1	0,4	0,5

Контроль: $0,1+0,4+0,5=1$.

б) Аналогично найдем условный закон распределения Y :

Y	2	6
$p(Y x_3)$	7/12	5/12

Контроль: $7/12+5/12=1$.

в) условное математическое ожидание X при $Y=6$ будем искать, используя найденный в п. а) условный закон распределения X :

$$\begin{aligned} M(X | Y=6) &= x_1 \cdot p(x_1 | y_1) + x_2 \cdot p(x_2 | y_1) + x_3 \cdot p(x_3 | y_1) = \\ &= 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,5 = 0,1 + 1,2 + 2 = 3,3. \end{aligned}$$

5. Плотность распределения и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ

Плотности распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины $f_1(x)$, $f_2(y)$ можно определить по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении $Y=y$ называют отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y :

$$\varphi(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Аналогично определяется условная вероятность распределения составляющей Y :

$$\psi(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Если условные плотности распределения случайных величин X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы.

6. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Основные числовые характеристики двумерной СВ (X,Y):

- а) математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$,
- б) дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$,
- в) ковариация
- г) коэффициент корреляции.

а) Математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$

Математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$ определяются по следующим формулам:

1) если (X,Y) – дискретная СВ, то

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m(\infty)} p_{ij} \right),$$

$$M[Y] = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_{ij} \right).$$

2) если (X, Y) – непрерывная СВ с плотностью вероятностей $f(x, y)$, то

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy.$$

Замечание. $M[X]$ и $M[Y]$ существуют, если ряды (интегралы) в формулах их определяющих, сходятся абсолютно.

В противном случае говорят, что СВ ***не имеет математического ожидания.***

Математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$ – характеристики положения значений СВ на плоскости.

Они являются координатами центра рассеивания значений двумерной СВ.

Математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$ обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание одной СВ.

б) Дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$

Дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$ определяются по формулам:

1) если (X, Y) – дискретная СВ, то

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (x_i - M[X])^2 p_{ij},$$

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (y_j - M[Y])^2 p_{ij}.$$

2) если (X, Y) – непрерывная СВ с плотностью вероятностей $f(x, y)$, то

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y])^2 \cdot f(x, y) dx dy.$$

Дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$ характеризуют рассеивание значений двумерной СВ вдоль осей Ox и Oy соответственно.

Дисперсии $D[X]$ и $D[Y]$ обладают теми же свойствами, что и дисперсия одной СВ.

В частности, остается справедливой формула

$$D[X] = M[X^2] - M[X]^2 .$$

в) ковариация

Пусть X, Y – СВ, имеющие математические ожидания $M[X]$ и $M[Y]$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ковариацией (корреляционным моментом) СВ X и Y называется математическое ожидание произведения их отклонений:*

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])].$$

Используя свойства математического ожидания, получаем:

$$\text{cov}(X, Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y] \quad (1)$$

В частности, при $X = Y$ из (1) получаем:

$$\text{cov}(X, Y) = M[X^2] - M[X]^2 = D[X]$$

Кроме того, из (1) получаем: $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$

Понятие ковариации позволяет получить формулу для дисперсии суммы 2-х произвольных СВ. А именно:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2\text{cov}(X, Y).$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ КОВАРИАЦИИ

Пусть X и Y – независимые СВ.

Тогда $X - M[X]$ и $Y - M[Y]$ – тоже независимы.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) &= M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])] = \\ &= M[X - M[X]] \cdot M[Y - M[Y]] = 0\end{aligned}$$

ВЫВОД: $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ – *необходимое условие независимости СВ X и Y .*

Однако это условие не является достаточным.

Существуют зависимые X и Y , для которых $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

В общем случае справедливы утверждения:

1) $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0 \Rightarrow X$ и Y – зависимые СВ.

2) $\operatorname{cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow$ о характере связи X и Y ничего сказать нельзя

Таким образом, *ковариация – числовая характеристика взаимосвязи СВ.*

г) коэффициент корреляции

Недостаток ковариации – ее размерность равна произведению размерностей отклонений СВ от своих математических ожиданий (т.е. произведению размерностей СВ).

Для устранения этого недостатка вводят безразмерную величину – коэффициент корреляции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина $r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ называется **коэффициентом корреляции** (линейным коэффициентом корреляции, коэффициентом корреляции Пирсона)

⇒ коэффициент корреляции также является числовой характеристикой взаимосвязи СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СВ называются **коррелированными**, если $r(X, Y) \neq 0$.

Если $r(X, Y) = 0$, то СВ называют **некоррелированными**.

⇒ независимые СВ – некоррелированные.

Зависимые СВ – могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1) $|r(X,Y)| \leq 1$;

2) если $|r(X,Y)| = 1$, то СВ X и Y связаны линейной зависимостью, т.е.

$$Y = aX + b, \text{ где } a, b - \text{ числа.}$$

Плотность двумерного нормального распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}.$$