Тема. Система двух случайных величин

1. Многомерные СВ
2. Способы задания двумерных СВ
3. Двумерные СВ с независимыми компонентами
4. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ
5. Плотность распределения и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ
6. Числовые характеристики системы двух случайных величин

1. Многомерные СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***n-мерной случайной величиной*** (***n-мерным случайным вектором***) *называется упорядоченная совокупность n одномерных СВ* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

При этом каждая СВ X_i называется ***составляющей*** или ***компонентой*** *n*-мерной СВ.

Геометрическая интерпретация:

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – случайная точка в *n*-мерном пространстве с координатами $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Различают два вида n-мерных СВ – дискретные и непрерывные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *n-мерная СВ называется* ***дискретной****, если все ее компоненты – дискретные.*

n-мерная СВ называется ***непрерывной****, если все ее компоненты – непрерывные.*

n-мерная СВ задается с помощью ***закона распределения*** – *соотношения, устанавливающего связь между значениями n-мерной СВ и соответствующими им вероятностями.*

Виды законов распределения:

для n-мерных ДСВ: 1) n-мерная таблица распределения;

2) функция распределения;

для n-мерных НСВ: 1) функция распределения;

2) плотность распределения вероятностей.

Для простоты изложения в дальнейшем будем рассматривать двумерные СВ. На общий случай все результаты легко переносятся.

2. Способы задания двумерных СВ
а) Таблица распределения

Пусть X,Y – одномерные ДСВ

X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Y может принимать значения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$

$\Rightarrow$ СВ (X,Y) – двумерная СВ с множеством возможных значений $(x_i; y_j)$, $i = 1,2,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$ (множество значений СВ – конечно или счётно).

Пусть $P(x_i; y_j) = P(X = x_i; Y = y_j) = p_{ij}$

Таблицей распределения двумерной ДСВ (X,Y) называется двумерная таблица, в которой перечислены все возможные значения $(x_i; y_j)$ и соответствующие им вероятности:

	x_1	x_2	…	x_i	…
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…
…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…
…	…	…	….	…	….

Замечание. Поскольку в результате опыта СВ обязательно примет одно из своих возможных значений $(x_i;\ y_j)$, и эти события всегда несовместны, то

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Пример 1.– Дискретная двумерная случайная *(X, У) задана законом распределения:*

Y	*X*		
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$
$y_1=2$	*0,1*	*0,05*	*0,35*
$y_2=4$	*0,05*	*0,2*	*0,25*

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) вероятность того, что X+Y<6.

Решение. а) Сложив вероятности «по столбцам», напишем закон распределения случайной величины *X*:

X	*1*	*3*	*4*
p	*0,15*	*0,25*	*0,6*

Сложив вероятности «по строкам», найдем закон распределения случайной величины Y:

Y	2	4
p	0,5	0,5

б) Для нахождения вероятности того, что X+Y<6 рассмотрим возможные сочетания значений компонент X, Y и сложим вероятности тех из них, для которых выполняется неравенство X+Y<6. Получим:

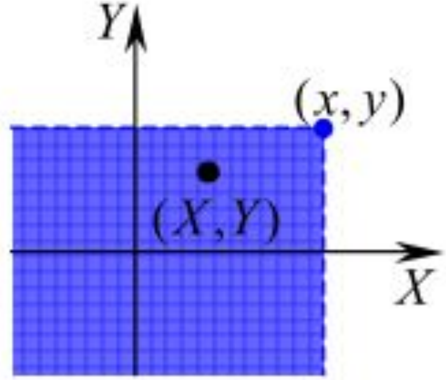
$P(X+Y<6) = P(X=1,\ Y=2) + P(X=3,\ Y=2) + P(X=1,\ Y=4) = 0{,}1+0{,}05+0{,}05=0{,}20.$

б) Функция распределения двумерной ДСВ и НСВ

Пусть (X,Y) – двумерная СВ (дискретная или непрерывная)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Функций распределения*** (*или* ***интегральным законом распределения***) двумерной СВ (X,Y) (*дискретной или непрерывной*) *называется функция* $F(x,y)$, *определяемая равенством* $F(x,y) = P\{X < x,\ Y < y\}$.

Геометрически $F(x,y)$ – вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрант, расположенный левее и ниже точки $(x;y)$.



Так как при нахождении $F(x,y)$ СВ X и Y рассматриваются совместно, то $F(x,y)$ называют также ***совместной функцией распределения СВ*** X и Y.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1) Значения $F(x,y)$ принадлежат [0; 1].

2) Функция $F(x,y)$ не убывает по каждому аргументу в отдельности, т.е.

$$\text{если } x_1 < x_2, \text{ то } F(x_1,y) \le F(x_2,y);$$

$$\text{если } y_1 < y_2, \text{ то } F(x,y_1) \le F(x,y_2).$$

3) Справедливы предельные соотношения:

$$F(-\infty, y) = 0; \; F(x, -\infty) = 0; \; F(-\infty, -\infty) = 0.$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4) Зная функцию $F(x,y)$ можно найти функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ ее составляющих X и Y:

$$F(x) = F(x;+\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y),$$

$$F(y) = F(+\infty;y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y).$$

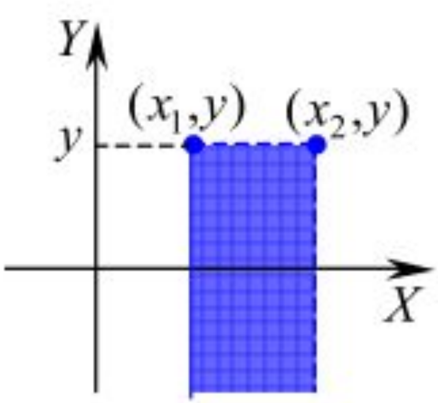
5) $F(x,y)$ – непрерывная слева по каждому аргументу.

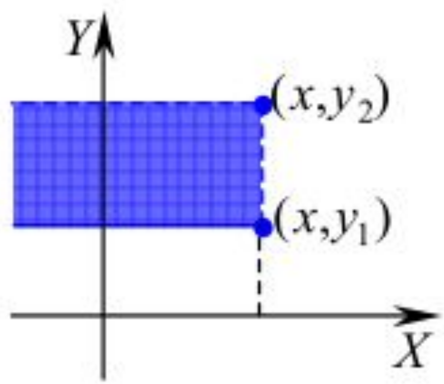
6) Вероятность попадания случайной точки в полуполосу:

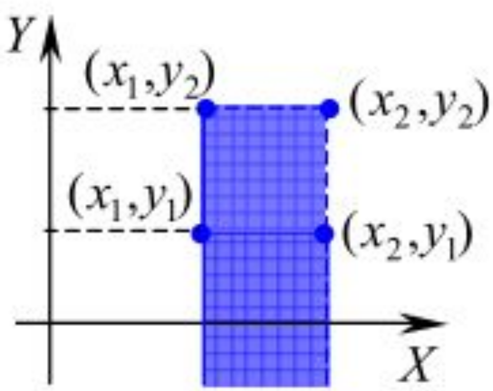
$$P(x_1 \le X < x_2,\ Y < y) = F(x_2,y) - F(x_1,y);$$
$$P(X < x,\ y_1 \le Y < y_2) = F(x,y_2) - F(x,y_1).$$

7) Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник:

$$P(x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2) =$$
$$=[F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)] - [F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)]$$







в) Плотность распределения вероятностей

Пусть (X,Y) – непрерывная двумерная СВ,

$F(x,y)$ – функция распределения СВ (X,Y),

$F(x,y)$ – имеет непрерывную $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ (всюду, за исключением возможно конечного числа кривых).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Плотностью распределения вероятностей*** (***дифференциальной функцией распределения***) двумерной СВ (X,Y) называется функция

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

График функции $f(x,y)$ называют ***поверхностью распределения*** двумерной СВ.

СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аналогичны свойствам плотности распределения вероятностей для одномерной СВ. А именно:

1) $f(x,y) \geq 0$.

2) Для функции $f(x,y)$ выполняется условие нормирования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

3) Для функций $f(x,y)$ и $F(x,y)$ справедливо равенство:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

5) Для функций распределения составляющих двумерной СВ справедливы формулы

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy, \qquad F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

6) Плотности распределения составляющих двумерной СВ находятся по формулам:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

7) Вероятность попадания двумерной СВ в заданную область.

Пусть (σ) – произвольная квадрируемая плоская область.

Тогда

$$P[(X,Y)\in(\sigma)]=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy.$$

$\Rightarrow$ вероятность попадания случайной точки (X,Y) в плоскую область (σ) численно равна объему цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного функцией $f(x,y)$ (вероятностный смысл $f(x,y)$).

Пример 2. Плотность распределения системы двух случайных величин (X,Y) задана выражением

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

а). Определить функцию распределения F(x,y) б) Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами O(0,0), A(0,1), B($\sqrt{3}$,1) и C($\sqrt{3}$,0).

Решение.

Найдем вид функции распределения F(x, y):

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}dxdy=a\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=$$

$$=a\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2}=a\left(\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right)\left(\lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{y}\frac{dy}{1+y^2}\right)=$$

$$=a\cdot\lim_{b\to-\infty}arctgx\Big|_{b}^{x}\cdot\lim_{c\to-\infty}arctgy\Big|_{c}^{y}=$$

$$=a\cdot\lim_{b\to-\infty}(arctgx-arctgb)\cdot\lim_{c\to-\infty}(arctgy-arctgc)=a\left(arctg(x)+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg(y)+\frac{\pi}{2}\right).$$

На основании свойства функции распределения имеем: $F(+\infty,+\infty)=1$.

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}a\left(arctg(x)+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg(y)+\frac{\pi}{2}\right)=a\cdot\pi^2.$$

Получаем: $a\cdot\pi^2=1$, откуда $a=1/\cdot\pi^2$. Таким образом, функция распределения системы двух случайных величин (X,Y) задана выражением

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(arctg(x)+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg(y)+\frac{\pi}{2}\right).$$

б) Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами O(0,0), A(0,1), B($\sqrt{3}$,1) и C($\sqrt{3}$,0) найдем, воспользовавшись формулой (1) при $x_1=0$; $x_2=\sqrt{3}$; $y_1=0$; $y_2=1$:

$$P(0<X<\sqrt{3},\ 0<Y<1)=[F(\sqrt{3},1)-F(0,1)]-[F(\sqrt{3},0)-F(0,0)]=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\mathrm{arctg}(\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}\right)\left(\mathrm{arctg}(1)+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\mathrm{arctg}(0)+\frac{\pi}{2}\right)\left(\mathrm{arctg}(1)+\frac{\pi}{2}\right)\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\mathrm{arctg}(\sqrt{3})+\frac{\pi}{2}\right)\left(\mathrm{arctg}(0)+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\mathrm{arctg}(0)+\frac{\pi}{2}\right)\left(\mathrm{arctg}(0)+\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\left(0+\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{12}.$$

Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами O(0,0), A(0,1), B($\sqrt{3}$,1) и C($\sqrt{3}$,0) равна 1/12.

3. Двумерные СВ с независимыми компонентами

Пусть X,Y – одномерные СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *СВ* X *и* Y *называются* **независимыми**, *если* $\forall x,y \in \mathbb{R}$ *независимы события* «$X < x$» и «$Y < y$». *В противном случае СВ* X *и* Y *называются зависимыми.*

Из определения независимых событий и теоремы умножения вероятностей получаем:

События «$X < x$» и «$Y < y$» – независимы $\Leftrightarrow$ вероятность их совместного наступления равна произведению их вероятностей, т.е.

$$P(X < x\ ,\ Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)\ .$$

$\Rightarrow$ можно дать другое определение независимых СВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *СВ* X *и* Y *называются* **независимыми**, *если функция распределения двумерной СВ* (X,Y) *равна произведению функций распределения составляющих ее одномерных СВ, т.е.*

$$F(x,y) = F(x) \cdot F(y).$$

Пусть X,Y – независимые СВ,

$f(x)$, $f(y)$ – плотность распределения вероятностей СВ X и Y соответственно,

$f(x,y)$ – плотность вероятностей двумерной СВ (X,Y).

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА.

СВ X *и* Y *независимы* $\Leftrightarrow$ *плотность вероятностей их совместного распределения* (т.е. двумерной СВ (X,Y)) *равна произведению их плотностей распределения вероятностей*, т.е.

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y).$$

4. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ

Пусть составляющие X и Y дискретны и имеют соответственно следующие возможные значения: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Условным распределением *составляющей X при* $Y=y_j$ *(j сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X) называют совокупность условных вероятностей*

$$p(x_1 / y_j),\ p(x_2 / y_j),\ \ldots,\ p(x_n / y_j)$$

Аналогично определяется условное распределение Y.

Условные вероятности составляющих X Y вычисляют соответственно по формулам

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \qquad p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Условное математическое ожидание составляющей X при $Y=y_j$ *можно найти по формуле*

$$M(X / y_j) = x_1\, p(x_1 / y_j) + x_2\, p(x_2 / y_j) + \ldots + x_n\, p(x_n / y_j).$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание составляющей Y.

Пример 1 (продолжение).– Дискретная двумерная случайная *(X, У) задана законом распределения:*

Y	*X*		
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$
$y_1=2$	*0,1*	*0,05*	*0,35*
$y_2=6$	*0,05*	*0,2*	*0,25*

Найти: а) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая *Y* приняла значение 6; б) условный закон распределения *Y* при условии, что X= $x_3=4$; в) условное математическое ожидание X при Y=6.

Решение. а)Найдем условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1= 6$:

$$p(x_1 | y_1) = p(x_1, y_1)/p(y_1) = 0{,}05/0{,}50=0{,}1$$
$$p(x_2 | y_1) = p(x_2, y_1)/p(y_1) = 0{,}20/0{,}50=0{,}4$$
$$p(x_3 | y_1) = p(x_3, y_1)/p(y_1) = 0{,}25/0{,}50=0{,}5$$

Напишем искомый условный закон распределения *X:*

X	*1*	*3*	*4*
$p(X | y_1)$	*0,1*	*0,4*	*0,5*

Контроль: 0,1+0,4+0,5=1.

б) Аналогично найдем условный закон распределения Y:

У	2	6
$P(Y | x_3)$	7/12	5/12

Контроль: 7/12+5/12=1.

в) условное математическое ожидание X при Y=6 будем искать, используя найденный в п. а) условный закон распределения *X:*

$$M(X|Y=6)= x_1\cdot p(x_1|y_1) + x_2\cdot p(x_2 | y_1) + x_3\cdot p(x_3 | y_1) =$$
$$= 1\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}5=0{,}1+1{,}2+2=3{,}3.$$

5. Плотность распределения и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ

Плотности распределения составляющих непрерывной двумерной случайной величины $f_1(x)$, $f_2(y)$ можно определить по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении Y=y называют отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y:

$$\varphi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}.$$

Аналогично определяется условная вероятность распределения составляющей Y:

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}.$$

Если условные плотности распределения случайных величин X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы.

6. Числовые характеристики системы двух случайных величин

Основные числовые характеристики двумерной СВ (X,Y):

а) математические ожидания M[X] и M[Y],

б) дисперсии D[X] и D[Y],

в) ковариация

г) коэффициент корреляции.

а) Математические ожидания M[X] и M[Y]

Математические ожидания M[X] и M[Y] определяются по следующим формулам:

1) если (X,Y) – дискретная СВ, то

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m(\infty)} p_{ij}\right),$$

$$M[Y]=\sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot P(Y=y_j)=\sum_{j=1}^{m(\infty)} y_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_{ij}\right).$$

2) если (X,Y) – непрерывная СВ с плотностью вероятностей $f(x,y)$, то

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy,$$

$$M[y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy.$$

Замечание. M[X] и M[Y] существуют, если ряды (интегралы) в формулах их определяющих, сходятся абсолютно.

В противном случае говорят, что СВ ***не имеет математического ожидания***.

Математические ожидания M[X] и M[Y] – характеристики положения значений СВ на плоскости.

Они являются координатами центра рассеивания значений двумерной СВ.

Математические ожидания M[X] и M[Y] обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание одной СВ.

б) Дисперсии D[X] и D[Y]

Дисперсии D[X] и D[Y] определяются по формулам:

1) если (X,Y) – дискретная СВ, то

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (x_i - M[X])^2 p_{ij},$$

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{n(\infty)} \sum_{j=1}^{m(\infty)} (y_j - M[Y])^2 p_{ij}.$$

2) если (X,Y) – непрерывная СВ с плотностью вероятностей $f(x,y)$, то

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 \cdot f(x,y)\,dxdy,$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y])^2 \cdot f(x,y)\,dxdy.$$

Дисперсии D[X] и D[Y] характеризуют рассеивание значений двумерной СВ вдоль осей Ox и Oy соответственно.

Дисперсии D[X] и D[Y] обладают теми же свойствами, что и дисперсия одной СВ.

В частности, остается справедливой формула

$$\mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[X^2] - \mathrm{M}[X]^2 .$$

в) ковариация

Пусть X,Y – СВ, имеющие математические ожидания M[X] и M[Y] соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ковариацией*** (***корреляционным моментом***) *СВ X и Y называется математическое ожидание произведения их отклонений*:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])].$$

Используя свойства математического ожидания, получаем:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = M[X \cdot Y] - M[X] \cdot M[Y] \qquad (1)$$

В частности, при X = Y из (1) получаем:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = M[X^2] - M[X]^2 = D[X]$$

Кроме того, из (1) получаем: $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$

Понятие ковариации позволяет получить формулу для дисперсии суммы 2-х произвольных СВ. А именно:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2\mathrm{cov}(X,Y).$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ КОВАРИАЦИИ

Пусть X и Y – независимые СВ.

Тогда $X - M[X]$ и $Y - M[Y]$ – тоже независимы.

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])] =$$
$$= M[X - M[X]] \cdot M[Y - M[Y]] = 0$$

ВЫВОД: $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ – *необходимое условие независимости СВ X и Y*.

Однако это условие не является достаточным.

Существуют зависимые X и Y, для которых $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

В общем случае справедливы утверждения:

1) $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0 \Rightarrow$ X и Y – зависимые СВ.

2) $\operatorname{cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow$ о характере связи X и Y ничего сказать нельзя

Таким образом, *ковариация – числовая характеристика взаимосвязи СВ*.

г) коэффициент корреляции

Недостаток ковариации – ее размерность равна произведению размерностей отклонений СВ от своих математических ожиданий (т.е. произведению размерностей СВ).

Для устранения этого недостатка вводят безразмерную величину – коэффициент корреляции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Величина* $r(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ *называется* ***коэффициентом корреляции*** (линейным коэффициентом корреляции, коэффициентом корреляции Пирсона)

$\Rightarrow$ коэффициент корреляции также является числовой характеристикой взаимосвязи СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. СВ называются ***коррелированными***, если

$$r(X,Y) \neq 0.$$

Если $r(X,Y) = 0$, то СВ называют ***некоррелированными***.

$\Rightarrow$ независимые СВ – некоррелированные.

Зависимые СВ – могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

1) $| r(X,Y) | \le 1$;

2) если $| r(X,Y) | = 1$, то СВ X и Y связаны линейной зависимостью, т.е.

$$Y = aX + b, \text{ где } a,b \text{ – числа.}$$

Плотность двумерного нормального распределения

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$