Урок по алгебре
в 9 классе

Числовые последовательности

Цели урока:

- *Определение числовой последовательности*
- *Способы задания*
- *Стандартные упражнения*

Рассмотрим функцию $y = x^2, x \in N$

График состоит из отдельных точек.

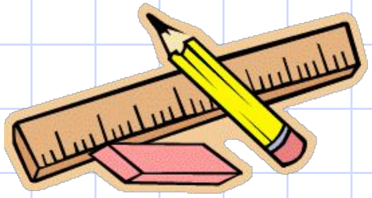
$f(1) = 1^2 = 1$

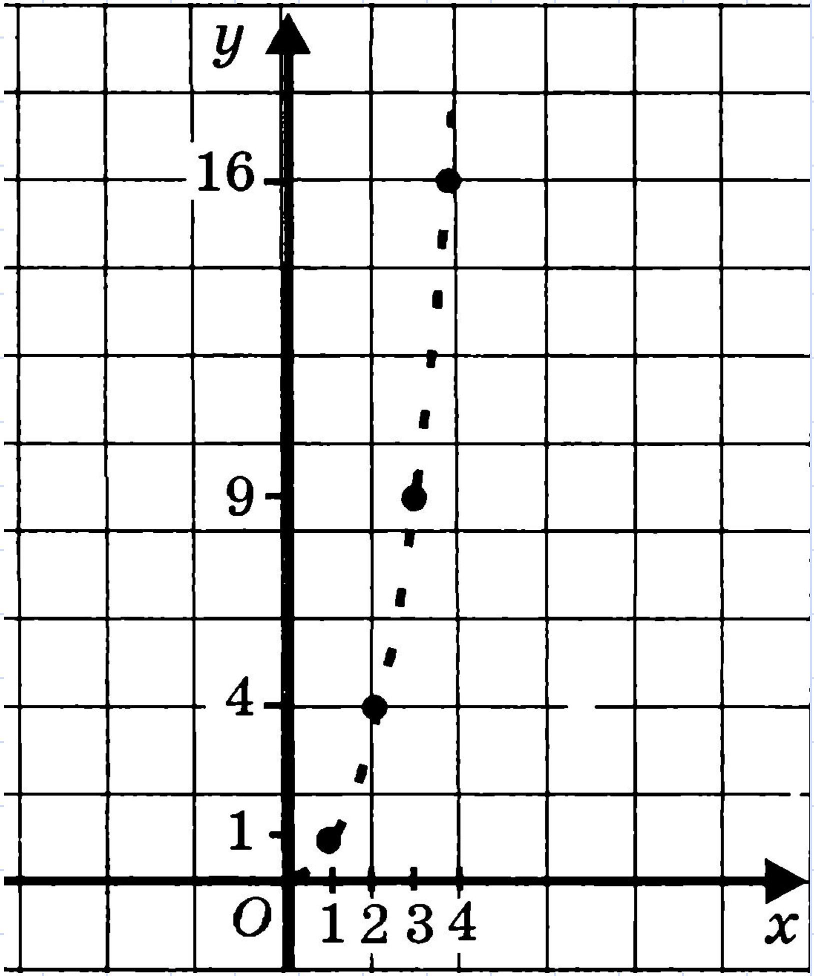
$f(1) = 1^2 = 1$

$f(1) = 1^2 = 1$

...

$f(1) = 1^2 = 1$





$f(1) = 1^2 = 1$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Последовательность квадратов натуральных чисел

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Определение числовой последовательности

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Понятие числовой последовательности

- Числа, записанные в последовательности, называются членами последовательности.
- Обычно их обозначают маленькими буквами, например, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, где индекс 1,2,3,4,…,n,… после буквы а указывает на порядковый номер каждого члена последовательности.
- a_n называется общим членом последовательности или n-ым членом, где **n** - порядковый номер члена последовательности.

Понятие числовой последовательности возникло и развилось задолго до создания учения о функции. Вот примеры бесконечных числовых последовательностей, известных еще в древности:

1, 2, 3, 4, 5,… - последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10,… - последовательность четных чисел;

1, 3, 5, 7, 9, … - последовательность нечетных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … - последовательность квадратов натуральных чисел;

2, 3, 5, 7, 11, … - последовательность простых чисел;

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ - последовательность чисел, обратных натуральным.

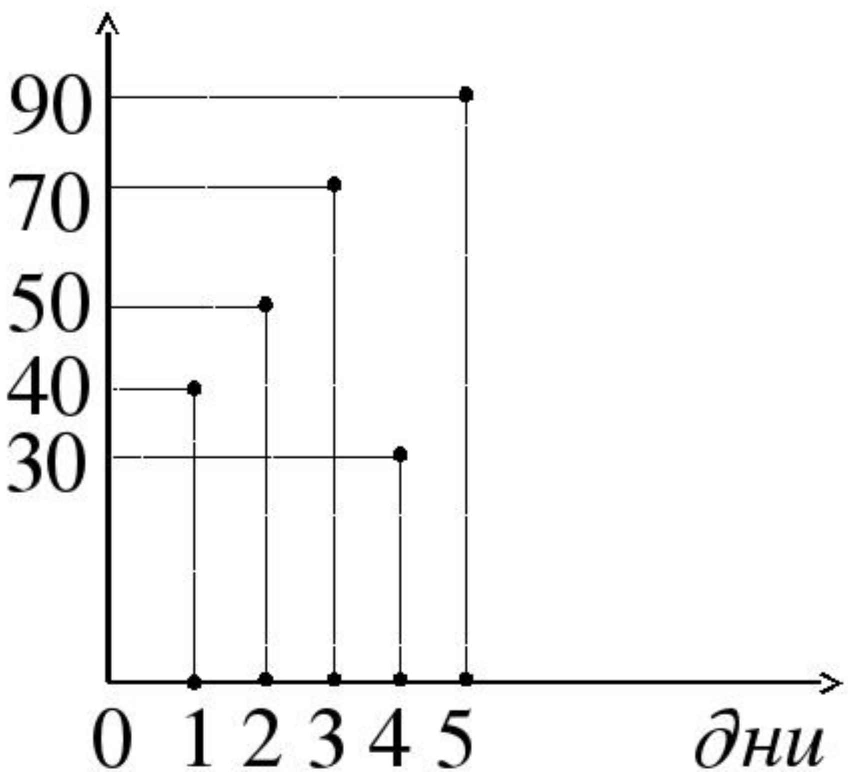
Способы задания

- *Графический*
- *Описательный*
- *Табличный*
- *Аналитический*
- *Рекуррентный*

Способы задания числовой последовательности

Графический

Графиком последовательности как и функции, заданной на множестве натуральных чисел, являются отдельные, изолированные точки координатной плоскости.



Описательный

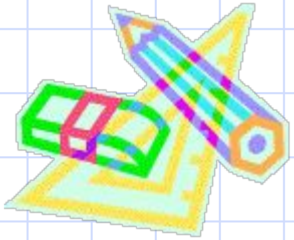
Пример:

3; 7; 13; 19; 29; …

Это- простые числа (через одно)

Словесное задание числовой последовательности.

Правило составления последовательности описывается словами



Пример :

последовательность простых чисел

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …

последовательность кубов натуральных чисел

1, 8, 27, 64, 125, …

Табличный

№1	№2	№3	№4	№5
220 в	217 в	221 в	219 в	212 в

Аналитическое задание числовой последовательности.

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Пример 1:

$y_n = n^2$

последовательность $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

Аналитический

формула n- го члена

Примеры:

1) $a_n=2n+3$ $a_1=2\cdot1+3=5$ $a_2=2\cdot2+3=7$ $a_3=2\cdot3+3$

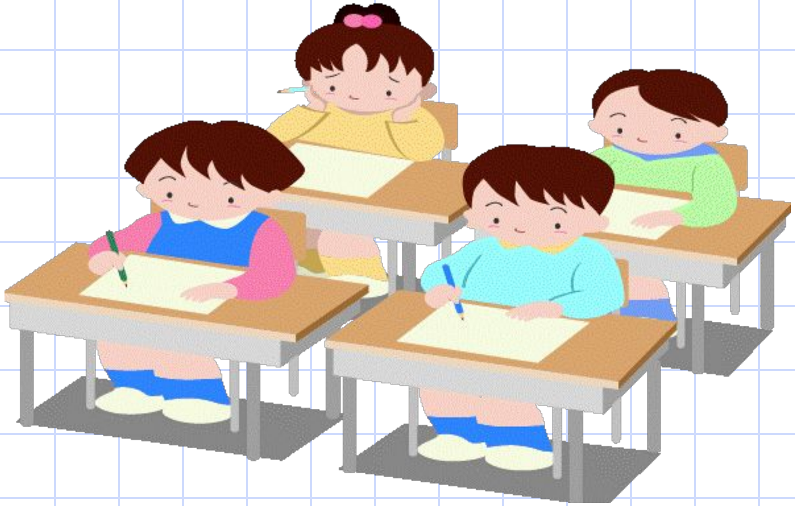
2) $a_n=100-10n^2$. *Найдите первые три члена.*

3) $a_n=n^2-2n-6$. *Является ли членом последовательности (-3)?*

$-3=n^2-2n-6$; $n^2-2n-3=0$; $\underline{n=3}$, $n=-1$ (не подходит)

Аналитическое задание числовой последовательности.

$$f(1) = 1^2 = 1$$



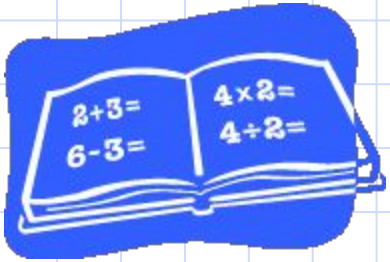
Аналитическое задание числовой последовательности.

Пример 3:

Задать последовательность формулой *n*-го члена:

а) 2, 4, 6, 8, … **б) 4, 8, 12, 16, 20, …**

$f(1) = 1^2 = 1$ $f(1) = 1^2 = 1$



Последовательности

1) $1;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9;\ 10;\ 20;\ \ldots$

2) $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\ldots$

3) $-a;-\frac{1}{2}a;-\frac{1}{3}a;\ldots$

4) $\frac{1}{5};-\frac{1}{5};\frac{1}{5};-\frac{1}{5};\ldots$

5) $2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ldots$

6) $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots$

7) $1;\ 3;\ 7;\ 13;\ldots$

8) $1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ldots$

Проверьте аналитическую формулу n-го члена для этих последовательностей:

$$a_n = \frac{1}{n+1};\ a_n = -\frac{n}{k};\ a_n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{5},\ \ n \in N$$

Угадайте закономерность

1) $2^2; 3^2; \ldots; n^2$.

2) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$

3) $\frac{1}{2\cdot 3}; \frac{1}{3\cdot 4}; \frac{1}{4\cdot 5}; \ldots$

4) $\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \ldots$

Способы задания последовательности

Рекуррентное задание числовой последовательности.

Указывается правило позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

При вычислении членов последовательности по этому правилу мы все время возвращаемся назад, выясняем чему равны предыдущие члены, поэтому такой способ называют рекуррентным (от латинского recurrere – возвращаться)

Способы задания последовательности

Рекуррентное задание числовой последовательности.

Пример 1:

$y_1=3,\ y_n=y_{n-1}+4$, если $n = 2, 3, 4, \ldots$

Каждый член последовательности получается из предыдущего прибавлением к нему числа 4

$y_1 = 3$ $\qquad$ $y_2=y_1+4=3+4=7$

$y_3=y_2+4=7+4=11$ $\qquad$ $y_4=y_3+4=11+4=15$ **и т.д.**

Получаем последовательность

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, …

Рекуррентный

Следующий определяется через предыдущий

Пример:

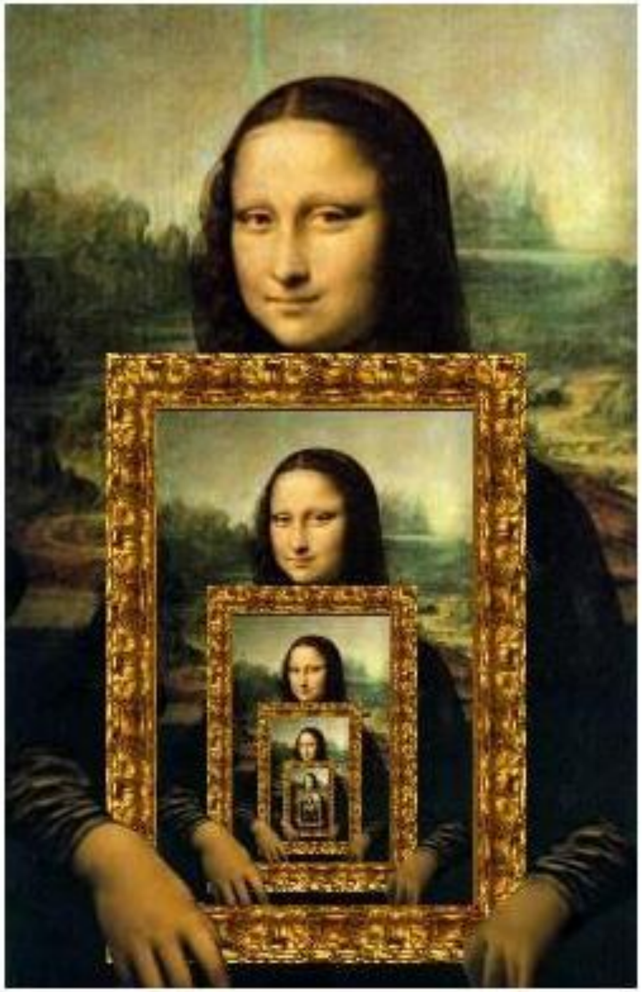
Дана последовательность:

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=2a_n+a_{n+1}$

$a_3=2a_1+a_2=2\cdot1+3=5$

$a_4=2a_2+a_3=2\cdot3+5=11$

$a_5=2a_3+a_4=2\cdot5+11=21\ \ldots$



Рекуррентное задание числовой последовательности.

Пример 2:

$y_1=1,\ y_2=1,\ y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$

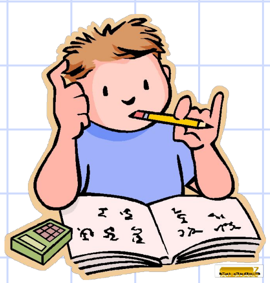
Каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих членов

$y_1=1 \qquad y_2=1 \qquad y_3=y_1+y_2=1+1=2$

$y_4=y_2+y_3=1+2=3 \qquad y_5=y_3+y_4=2+3=5$ **и т.д.**

Получаем последовательность

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …



1. Найдите пятый член последовательности c_n, если $c_1 = -6$, $c_{n+1} = c_n + 3$.

Решение.

Последовательность задана рекуррентным способом, поэтому по очереди найдём её члены со второго по пятый.

$c_2 = c_1 + 3 = -6 + 3 = -3$,

$c_3 = c_2 + 3 = -3 + 3 = 0$,

$c_4 = c_3 + 3 = 0 + 3 = 3$,

$c_5 = c_4 + 3 = 3 + 3 = 6$.

Ответ: 6.

Рекуррентное задание числовой последовательности.

Выделяют 2 особенно важные рекуррентно заданные последовательности:

1) Арифметическая прогрессия

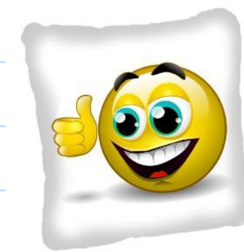
$y_1 = a,\ y_n = y_{n-1} + d$, a и d – числа, $n = 2, 3, \ldots$

2) Геометрическая прогрессия

$y_1 = b,\ y_n = y_{n-1} \cdot q$, b и q – числа, $n = 2, 3, \ldots$

Монотонные последовательности

Последовательность (y_n) – возрастающая, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего, т.е.



$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < \dots$

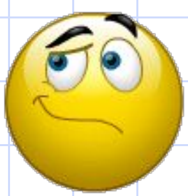
Пример:

2, 4, 6, 8, 10, …

Если $a > 1$, то последовательность $y_n = a^n$ – возрастает.

Последовательность (y_n) – убывающая, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего, т.е. y_1

$> y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > \dots$



Пример:

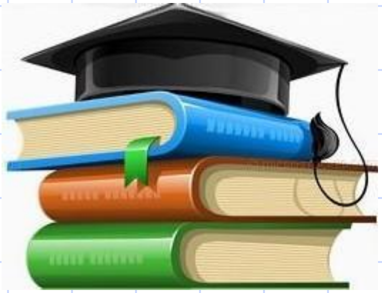
-1, -3, -5, -7, -9, …

Если $0 < a < 1$, то последовательность $y_n = a^n$ – убывает.

Монотонные последовательности

- **Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.**

Последовательности, которые не возрастают и не убывают, являются *немонотонными*.



Ограниченность числовой последовательности

Последовательность $\{y_n\}$ называют ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа.

Последовательность $\{y_n\}$ ограниченна снизу, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство

$$y_n \geq m$$

Число m называют нижней границей последовательности.

Пример: 1, 4, 9, 16, …, n^2, … - ограничена снизу 1.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ограниченной последовательностью.

Числовые последовательности.

А нужны ли нам последовательности в реальной жизни?

Предположим у нас есть некоторый счет в банке, на который раз в месяц начисляют некоторую конкретную сумму денег. Так вот такое начисление можно описать в виде числовой последовательности:

$$y = a + n \cdot b$$

Где а - начальная сумма на счете, b – сумма которую каждый месяц начисляют, n – натуральное число.

Если мы хотим подсчитать какая сумма будет находиться в банке через 12 месяцев:

$$y(12) = a + 12 \cdot b$$

Числовые последовательности в литературе

Даже в литературе мы встречаемся с математическими понятиями! Так, вспомним строки из"Евгения Онегина".

…***Не мог он ямба от хорея,***
Как мы не бились отличить...

Ямб - это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2; 4; 6; 8...
Номера ударных слогов образуют числовую последовательность.

Хорей - это стихотворный размер с ударением на нечетных слогах стиха. Номера ударных слогов образуют числовую последовательность 1; 3; 5; 7...

Проверочная работа

1.Последовательность задана формулой an=5n+2 . Чему равен её третий член?

а) 3 б)17 в) 12 г) 22

2 . Выпишите 5 первых членов последовательности, заданной формулой an=n-3

а) -3,-2,-1,0,1 б) -2,-1,0,1,2

в) 0,-2,-4,-16,-50 г) 1,2,3,4,5

3. Найдите сумму 6-ти первых членов числовой последовательности: 2,4,6,8,…

а) 66 б) 36 в) 32 г) 42

4. Какая из перечисленных последовательностей является бесконечно убывающей:

а) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$ **б) 2,4,6,8,…**

в) $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \dots$ **г)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

Домашнее задание:

Учебник п.15,

Задачник №15.8, №15.10, №15.12(а,б), №15.13(а,б), №15.20(а,б)

Спасибо за работу на уроке!