Интегрирование тригонометрических

1

Интегралы вида:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

Замена переменной:

$$t = tg\frac{x}{2}$$

универсальная тригонометрическая п

Тогда

$$x = 2arctgt$$

$$dx = (2arctgt)'dt = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Следовательно

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \left| \begin{aligned} t &= tg\,\frac{x}{2} \\ dx &= \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C$$

2

Если выражение R(sin x,cos x) при замене sin x на (-sin x) только меняет знак, то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

берется заменой

$$t = \cos x$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

Решение:

$$\frac{-(\sin x)^3}{\cos^4 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$$

Следовательно, можно применять рекомендуемую подстановку:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = -\int \frac{1}{t^4}\,dt - \int \frac{t^2}{t^4}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{t^4}\,dt - \int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{t^{-3}}{3} - t^{-1} + C =$$

$$= \frac{\cos^{-3} x}{3} - \cos^{-1} x + C$$

3

Если выражение R(sin x,cos x) при замене cos x на (-cos x) только меняет знак, то интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

берется заменой

$$t = \sin x$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

Решение:

$$\sin^2 x \cdot (-\cos x)^3 = -\sin^2 x \cos^3 x$$

Следовательно, можно применять рекомендуемую подстановку:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$=\int t^2(1-t^2)\,dt=\int (t^2-t^4)\,dt=$$

$$=\int t^2\,dt-\int t^4\,dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$$

4

Интегралы вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$$

$$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$$

$$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$$

где α и β – действительные числа, вычисляются с помощью формул, преобразующих произведение тригонометрических функций в сумму.

Формулы преобразования:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x)$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x)$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x)$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \sin 3x \cos 5x dx$$

Решение

$$\int \sin 3x \cos 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C$$