

Теория игр

Информатика ЕГЭ 19-21

Голяков Николай Александрович

Как правило задания на теорию игр в ЕГЭ лаконичные

- при конкретной начальной позиции стратегию имеет только один игрок
- нет возможности ничьи
- однозначно описаны правила ходов при игре

выигрышная позиция – это такая позиция, в которой игрок, делающий первый ход, обязательно выиграет при любых действиях соперника, если не допустит ошибки; при этом говорят, что у данного игрока есть **выигрышная стратегия** – алгоритм выбора очередного хода, позволяющий ему выиграть;

Если рассмотреть игру для первого игрока, то возможно выделить

- выигрышную позицию
- проигрышную позицию

Так же выделяется последний возможный номер хода стратегии

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 5)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(11, 5)$, $(20, 5)$, $(10, 6)$, $(10, 10)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 77. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 77 или больше камней.

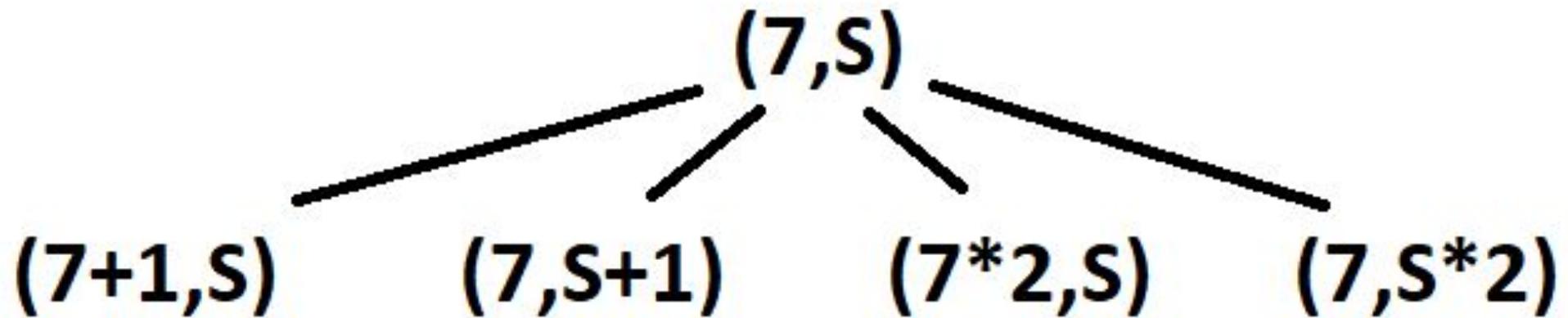
В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче — S камней; $1 \leq S \leq 69$.

$(7, S)$ – Петя – Ваня ≥ 77

+1

*2

Выигрышная позиция возможна при рассмотрении любого возможного хода с получением требуемого результата



$(7, S)$ – Петя – Ваня ≥ 77

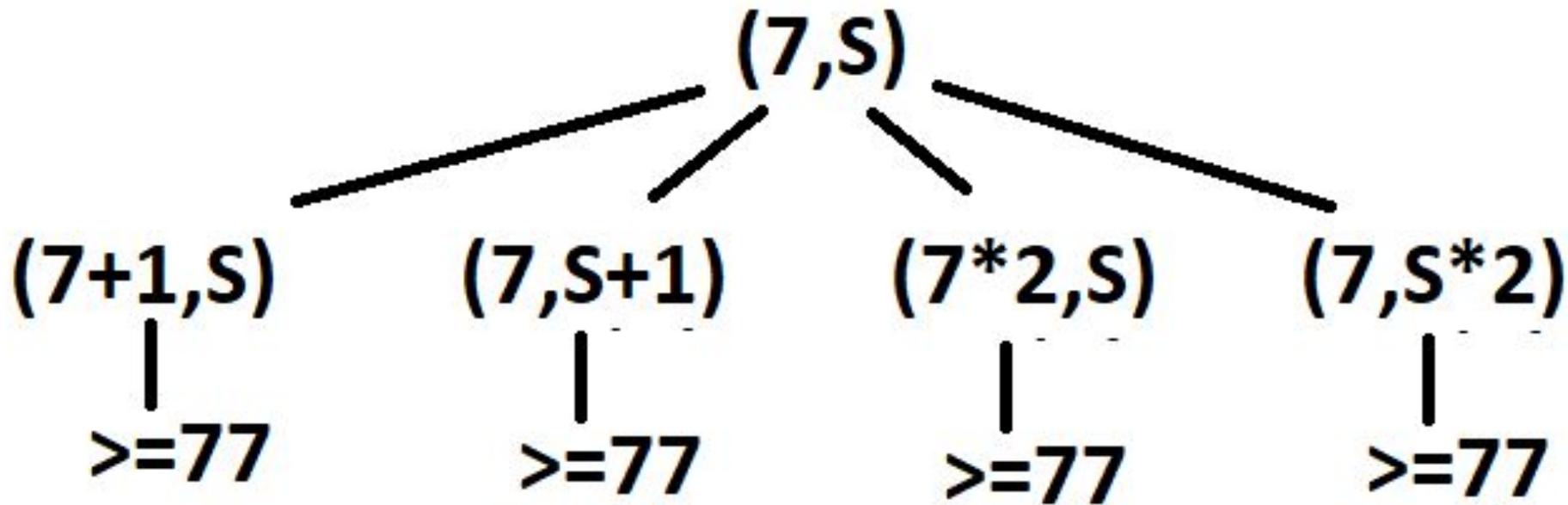
+1 или *2

```
if (n mod 2 =1) and  
    (hod(i+1, j, n) or  
     hod(i, j+1, n) or  
     hod(i*2, j, n) or  
     hod(i, j*2, n)) then mas[i, j] := n;
```

(7,5) – Петя – Ваня >=77

+1 или *2

Проигрышная позиция неизбежна, когда при любом возможном ходе с не достигнут результат, но противник всегда имеет возможность этот результат добрать



$(7, S)$ – Петя – Ваня ≥ 77
+1 или *2

Проигрышная позиция – это стратегия для второго игрока

```
if (n mod 2 =0) and  
    (hod(i+1, j, n) and  
     hod(i, j+1, n) and  
     hod(i*2, j, n) and  
     hod(i, j*2, n)) then mas[i, j] :=n;
```

(7,5) – Петя – Ваня >=77

+1 или *2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	
2	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	
3	7	8	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	
4	9	10	11	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	
5	11	12	13	14	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	
6	13	14	15	16	17	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	
7	15	16	17	18	19	20	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	
8	17	18	19	20	21	22	23	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	
9	19	20	21	22	23	24	25	26	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	
10	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	
11	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	
12	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	
13	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	
14	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	
15	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	
16	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	
17	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	
18	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	
19	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	
20	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	##	
21	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	##	
22	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	##	##	
23	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	##	##	
24	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	##	##	##	
25	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	##	##	##
26	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	##	##	##	##	
27	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	##	##	##	##	

Правило (применяется в указанном порядке)

Формат

Значение ячейки = 73

AaBbBбя

Значение ячейки от 74 до 75

AaBbBбя

Значение ячейки = 76

AaBbBбя

Значение ячейки >= 77

AaBbBбя

$$=МАКС(В$1; $A2)*2+МИН(В$1; $A2)$$

Видео по разбору решения в таблицах

<https://youtu.be/G8wMmW0qTK8>

<https://youtu.be/9Ssh8ubqdvI>

Моя запись к презентации:

https://youtu.be/JXB_mbV7nqg

```

const gl=40;
var mas:array [1..100,1..100] of integer;
i,j,n:integer;

function hod(i,j,n:integer):boolean;
begin result:=(mas[i,j]<>n) and (mas[i,j]<>0) and ((mas[i,j] mod 2)=((n+1) mod 2));
end;

begin
  for i:=1 to 100 do for j:=1 to 100 do if max(i,j)*2+min(i,j)>=77 then mas[i,j]:=1;
  for n:=2 to 40 do
    for i:=1 to gl do
      for j:=1 to gl do begin
        if ((i<gl) and (j<gl) and (mas[i,j]=0)) then begin
          if (n mod 2 =1) and (hod(i+1,j,n) or hod(i,j+1,n) or
            hod(i*2,j,n) or hod(i,j*2,n)) then mas[i,j]:=n;
          if (n mod 2 =0) and(hod(i+1,j,n) and hod(i,j+1,n) and
            hod(i*2,j,n) and hod(i,j*2,n)) then mas[i,j]:=n;
        end;
      end;
    for i:=1 to gl do begin
      for j:=1 to gl do write(mas[i,j]:3);
      writeln();
    end;
  readln();
end.

```


Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить** в любую кучу **один камень** или **увеличить** количество камней в любой куче **в два раза**. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. В начальный момент в первой куче было K камней, а во второй – S камней, $1 \leq K \leq 29$, $1 \leq S \leq 29$.

Ответьте на следующие вопросы:

Вопрос 1. Сколько существует пар $(S; K)$ таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

Вопрос 2. При $K=6$, найдите минимальное и максимальное значение S , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

Вопрос 3. Сколько существует пар $(S; K)$, при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

А. Кабанов

Скрипт для тренировки в стратегии игр:

<http://оннаш.рф/eg19.exe>

Моя запись к презентации, краткий обзор программы:

<https://youtu.be/gen8H6S2KQE>

19. Два игрока, Олег и Виталий, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Олег. За один ход игрок может из каждой кучи убрать по четыре камня или убрать целиком одну кучу, а другую разделить на две равные (если это позволяет количество камней).

Игра завершается после того хода, когда хотя бы одна куча становится пустой или когда невозможно сделать очередной ход по правилам. Побеждает тот, кто сделал последний ход. В начальный момент времени в одной куче лежит N камней, а в другой — K камней.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игро-

ка — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Известно, что после первого неудачного хода Олега Виталий выиграл первым своим ходом. При каком наибольшем значении K это возможно, если $N = 28$?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK				
1																																									
2	1																																								
3	2																																								
4	3																																								
5	4																																								
6	5																																								
7	6																																								
8	7																																								
9	8																																								
10	9																																								
11	10																																								
12	11																																								
13	12																																								
14	13																																								
15	14																																								
16	15																																								
17	16																																								
18	17																																								
19	18																																								
20	19																																								
21	20																																								
22	21																																								
23	22																																								

20. Для игры, которая описана в предыдущем задании, при $N = 28$ найдите все такие значения K , при которых у Олега есть выигрышная стратегия, обладающая следующими свойствами:

- Олег не может выиграть за один ход;
- Олег может выиграть вторым своим ходом независимо от того, как сыграет Виталий.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания

Ответ: _____.

21. Для игры, которая описана в задании 19, при $N = 30$ найдите наибольшее значение K , при котором у Виталия есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть своим первым или вторым ходом.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	A
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
диагональ																															
операция		/2		-4	-4	/2	-4					-4	-4	-4	-4	/2		/2		/2		/2									

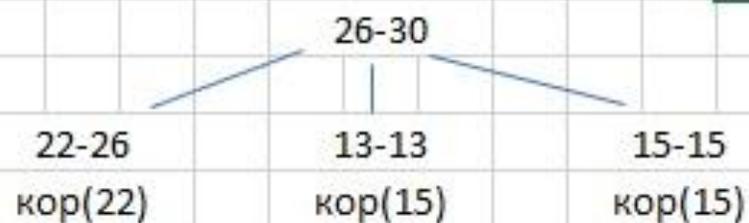
/2 дает диагональную позицию при любом втором значении

19. Победу 1 ходом возможно получить максимум из 7
возможен неудачный ход из $(7*2=14)$ 28-14

14

20. При любом значении (28) победа вторым ходом возможна при операции /2 из 16, 18, 20, 22
В остальных позициях невозможно так быстро прийти к победе с 28, нужно от 28 избавляться первым ходом

21. Как бы ни сходил 1 игрок (-4 или /2) требуется проверить попадание в коричневую зону
значение 22 максимальное коричневое
Если предположить аккуратный ход -4, то получим 26



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL					
1																			35	232																							
2																																											
3																37	232	105	232	35	234	35	696																				
4																																											
5																	269		337		269		731																				
6																																											
7				37	232								105	232									35	234													35	696					
8																																											
9	39	232	111	232	37	234	37	696			107	232	315	232	105	234	105	696				37	234	105	234	35	236	35	702			37	696	105	696	35	698	35	2088				
10																																											
11		271		343		271		733				339		547		339		801				271		339		271		737				733		801		733					2123		
12																																											
13	41	232	113	232	39	234	39	696			109	232	317	232	107	234	107	696				39	234	107	234	37	236	37	702			39	696	107	696	37	698	37	2088				
14	117	232	333	232	111	234	111	696			321	232	945	232	315	234	315	696				111	234	315	234	105	236	105	702			111	696	315	696	105	698	105	2088				
15	39	234	111	234	37	236	37	698			107	234	315	234	105	236	105	698				37	236	105	236	35	238	35	704			37	698	105	698	35	700	35	2090				
16	39	696	111	696	37	702	37	2088			107	696	315	696	105	702	105	2088				37	702	105	702	35	708	35	2106			37	2088	105	2088	35	2094	35	6264				
17																																											
18	273		345		273		735				341		549		341		803					273		341		273		739			735		803		735					2125			
19	349		565		345		807				553		1177		549		1011					345		549		341		807			807		1011		803					2193			
20	273		345		273		735				341		549		341		803					273		341		273		739			735		803		735					2125			
21	735		807		739		2125				803		1011		807		2193					739		807		743		2141			2125		2193		2129					6299			
22																																											

Видео для презентации

<https://youtu.be/YFXIpLkBTyQ>